01/12/2023

Quadrivetores.

Finalmente podemos escrever a estrutura do espaço-tempo.

(1) Quadrivetores: Das T.L: $x^0 \equiv ct$, $\beta \equiv \frac{v}{c}$

Fazemos: $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$

As T.L são:
$$\begin{cases} \bar{x}^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ \bar{x}^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ \bar{x}^2 = x^2 \\ \bar{x}^3 = x^3 \end{cases}$$

Em forma de matriz:
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{pmatrix}}_{\bar{x}^\mu} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda^\mu_\nu} \underbrace{\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}}_{x^\nu}$$

Ou então: $\bar{x}^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} (\Lambda^\mu_\nu) x^\nu$ → linha → coluna. ⟹ maneira mais geral de escrever uma T.L.

Λ^μ_ν é a matriz de transformação de Lorentz.

Λ seria diferente se o movimento não fosse ao longo do eixo $\bar{x}^\nu$, mas teria uma estrutura semelhante.

Esse tipo de escrita é semelhante à uma rotação.

Regras de rotação usadas para 3-vetores pode ser estendida para 4-vetores. Elas se transformam da mesma forma que

(x^0, x^1, x^2, x^3) sob T.L, de forma que:

$$\bar{a}^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu a^\nu$$

Para o caso particular de transformação sob eixo x:

$$\begin{cases} \bar{a}^0 = \gamma(a^0 - \beta a^1) \\ \bar{a}^1 = \gamma(a^1 - \beta a^0) \\ \bar{a}^2 = a^2 \\ \bar{a}^3 = a^3 \end{cases}$$

Podemos escrever um produto interno para 4-vetores análogo ao produto interno de um 3-vetor:

$$-a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3.$$

Este é o produto escalar quadridimensional.

Podemos verificar que:

$$-\bar{a}^0 \bar{b}^0 + \bar{a}^1 \bar{b}^1 + \bar{a}^2 \bar{b}^2 + \bar{a}^3 \bar{b}^3 = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3.$$

O produto interno convencional é invariante sob rotações (T.L).

Para acompanharmos o sinal negativo, introduzimos um vetor a_μ covariante, que difere da contravariante a^μ:

$$a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3) \equiv (-a^0, a^1, a^2, a^3)$$

O produto escalar pode ser escrito das seguintes formas:

$$\sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu \quad \text{ou} \quad \underbrace{a_\mu b^\mu}_{\text{convenção de soma de Einstein}}.$$

Podemos escrever: $a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$

(2) Intervalo invariante:

Supondo 2 eventos:

$$A = (x_A^0, x_A^1, x_A^2, x_A^3)$$
$$B = (x_B^0, x_B^1, x_B^2, x_B^3)$$

A diferença $\Delta x^\mu \equiv x_A^\mu - x_B^\mu$ é o deslocamento do 4-vetor.

O produto escalar de Δx^μ com ele mesmo é o intervalo entre dois eventos:

$$I \equiv (\Delta x)_\mu (\Delta x)^\mu = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = -c^2 t^2 + d^2$$

separação temporal

separação espacial.

Se formos para um referencial que se move, o tempo entre A e B é diferente ($\bar{t} \neq t$) e $\bar{d} \neq d$ mas o intervalo I continua o mesmo.

Dependendo do evento:

1) $I < 0$: intervalo tipo tempo (ocorrem no mesmo lugar, $d = 0$)

2) $I > 0$: intervalo tipo espaço (ocorrem ao mesmo tempo, $t = 0$)

3) $I = 0$: intervalo tipo luz (eventos conectados por um sinal que viaja na velocidade c).

(3) Diagrama espaço-tempo.

A velocidade é dada pelo recíproco da inclinação da reta

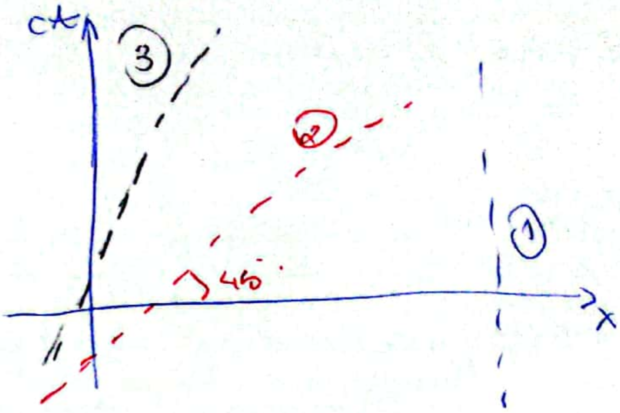


Diagrama de Minkowski

① partícula em repouso: linha vertical

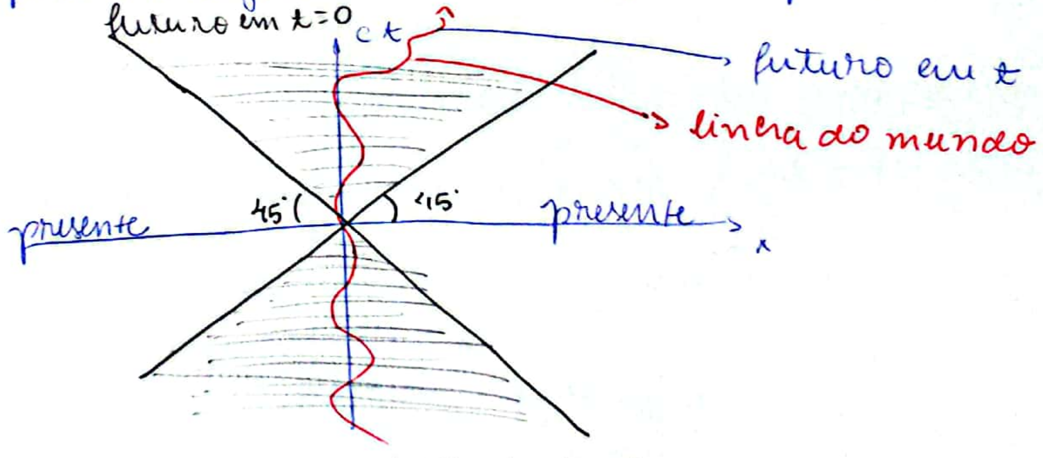
② fóton: linha de 45°

③ foguete: linha de inclinação $\frac{c}{v} = 1/\beta$

A trajetória da partícula no diagrama é chamada de linha do mundo.

Como nada é mais rápido que c, não podemos ter uma inclinação menor que 1. A região acessível é restrita pelas linhas de 45°:

(t = 0)



Futuro: pontos acessíveis a você. Conforme o tempo passa, suas opções vão se limitando: seu "futuro" a qualquer momento é a forma em "v" subsequente construída em qualquer ponto que você estiver.

Passado: são os pontos dos quais você pode ter vindo.

Presente: região de pontos inacessíveis. Não se pode influenciar nenhum evento no presente pois o sinal (ou mensagem) teria que ter velocidade > c.

Se adicionarmos a coordenada y teríamos um cone, e se adicionarmos y e z teríamos um hiper cone.

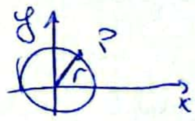
A inclinação da linha que conecta dois eventos no diagrama nos informa o tipo de intervalo invariante.

Pontos no passado e futuro são do tipo tempo com respeito a sua localização presente. Pontos no presente são tipo espaço e pontos na superfície do cone são do tipo luz.

O tempo não é só mais uma coordenada.

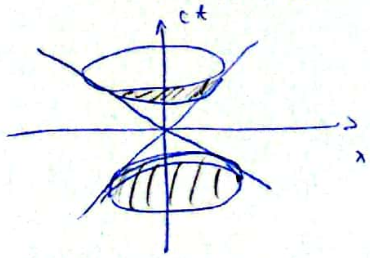
O sinal menos no intervalo invariante transmite uma simetria hiperbólica no espaço-tempo.

Por exemplo, sob rotação no eixo z, um ponto P no plano x y descreve um círculo de raio $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

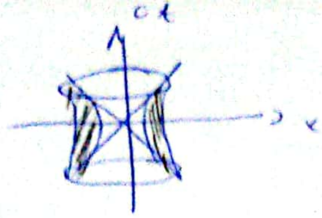


Sob uma T.L., o intervalo $I = (x^2 - c^2 t^2)$ é preservado. Isso significa que, da mesma forma que a circunferência, o locus em que todos os pontos com intervalo I é uma hipérbole ou hiperboloide de revolução.

Quando o intervalo é do tipo tempo, é um hiperboloide de duas folhas:



Quando o intervalo é do tipo espaço, é um hiperboloide de uma folha.



Mesmo fazendo uma T.L e indo para um referencial não inercial, as novas coordenadas vão cair na mesma hipérbole que as coordenadas originais.

As T.L. podem mover os pontos pelo hiperbolóide mas nunca será capaz de mover um ponto da folha de cima do hiperbolóide tipo tempo para a folha de baixo ou para um hiperbolóide tipo espaço.

Quando falamos de simultaneidade, o ordenamento temporal de dois eventos pode ser revertido simplesmente mudando para um referencial ñ inercial.

Se o intervalo invariante entre dois eventos é do tipo tempo, o ordenamento é absoluto. Se o intervalo é do tipo espaço, o ordenamento vai depender do sistema inercial do qual são observados.

No primeiro caso, um evento que ~~está~~ na folha de cima do hiperbolóide tipo tempo certamente ocorreu depois de (0,0); e um evento que na folha de baixo ocorreu antes.

No caso do hiperbolóide tipo espaço, os eventos irão ocorrer em +t ou -t dependendo do referencial. Então, intervalos invariantes entre eventos relacionados por causalidade são sempre tipo tempo, e seu ordenamento é sempre o mesmo para todos os referenciais inerciais.