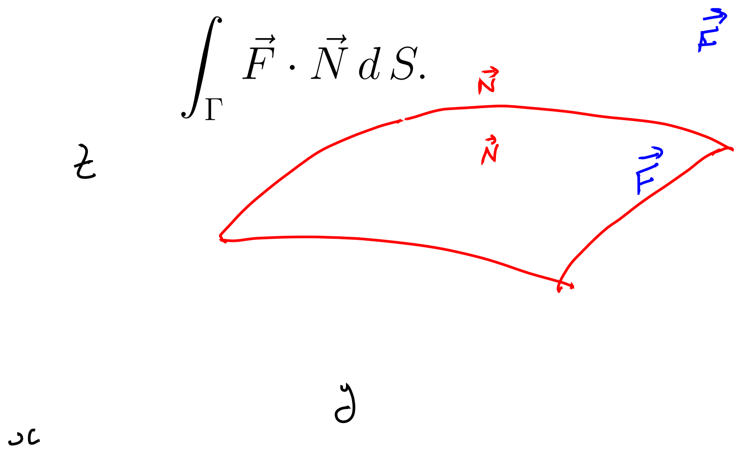
1. Fluxo e orientação de superfícies

Seja $\Gamma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada lisa e $\vec{F}(x, y, z)$ um campo vetorial contínuo definido em um domínio contendo a imagem de $Im(\Gamma) = \Gamma(U)$. Supondo que $\vec{F}$ é o campo de velocidades de um fluido e que $\vec{N}(x, y, z)$ é um campo normal unitário contínuo definido em cada ponto $(x, y, z) \in Im(\Gamma)$, é natural definir o **fluxo através da superfície** pela integral

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS.$$



Para isto, porém, é necessário garantir a existência do campo $N(x, y, z)$.

Definição 1.1. *Dizemos que a superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é* ***orientável*** *se existir um campo de vetores normal unitário e contínuo $N(x, y, z)$ definido para todo $(x, y, z) \in Im(\Gamma)$. Um tal campo, caso exista é denominado uma* ***orientação*** *de S. (É claro que uma outra orientação é então dada por $-N(x, y, z)$).*

Date: December 5, 2023.

Exemplo 1.2. *O cilindro de raio* $a > 0$, $x^2 + y^2 = a^2$, *pode ser parametrizado por*

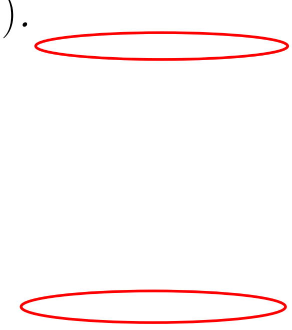
$$\Gamma : \begin{cases} x(u, v) = a \cos u \\ y(u, v) = a \ \operatorname{sen} u \\ z(u, v) = v, \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$\vec{X}(u, v) = a \cos u\vec{i} + a \ \operatorname{sen} u\vec{j} + v\vec{k}$ *e o produto vetorial fundamental é dado por*

$$\vec{X}_u(u, v) \wedge \vec{X}_v(u, v) = (a \cos u, a \ \operatorname{sen} u, 0),$$
$$\|\vec{X}_u(u, v) \wedge \vec{X}_v(u, v)\| = a \neq 0.$$

Definindo $\vec{N}(\Gamma(u, v)) = \frac{\vec{X}_u(u,v) \wedge \vec{X}_v(u,v)}{\|\vec{X}_u(u,v) \wedge \vec{X}_v(u,v)\|} = (\cos u, \ \operatorname{sen} u, 0)$, *obtemos um campo normal unitário contínuo definido no cilindro, ou seja, uma* ***orientação no cilindro****.*

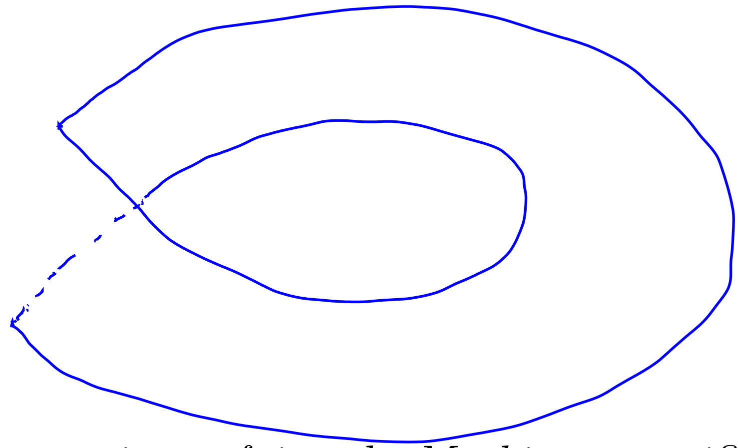
Observemos que Γ *não é injetora:* $\Gamma(0, v) = \Gamma(2\pi, v)$, *mas isto não causa nenhum problema na definição do campo, pois* $\vec{N}(\Gamma(0, v)) = \vec{N}(\Gamma(2\pi, v)) = (1, 0, 0)$.



Em geral, se Γ é superfície regular e $\vec{X}_u(u_1, v_1) \wedge \vec{X}_v(u_1, v_1) = \vec{X}_u(u_2, v_2) \wedge \vec{X}_v(u_2, v_2)$ sempre que $\Gamma(u_1, v_1) = \Gamma(u_2, v_2)$, podemos definir um campo vetorial unitário nos pontos $(x, y, z) = \Gamma(u, v)$ na Imagem de Γ como no exemplo 1.2 :

$$\vec{N}(\Gamma(u,v)) = \frac{\vec{X}_u(u,v) \wedge \vec{X}_v(u,v)}{\|\vec{X}_u(u,v) \wedge \vec{X}_v(u,v)\|}.$$

Uma superfície não orientável famosa é a **faixa de Moebius**, esboçada abaixo.



Exercício 1.3. *Parametrize a faixa de Moebius e verifique que não é possível obter um campo vetorial normal unitário usando o procedimento do exemplo 1.2.*

Solução: $\Gamma : \begin{cases} x(r,\theta) = \cos\theta + r\ \mathit{sen}\,(1/2\ \theta)\cos\theta \\ y(r,\theta) = \ \mathit{sen}\,\theta + r\ \mathit{sen}\,(1/2\ \theta)\ \mathit{sen}\,\theta \\ z(r,\theta) = r\cos\theta, \quad \theta \in [0,2\pi], r \in [-1/2, 1/2]. \end{cases}$

2. Integral de superfície de campos vetoriais

Definição 2.1. *Seja $\Gamma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada lisa, orientada pelo campo de vetores normal unitário $N(x,y,z)$. e $\vec{F}(x,y,z)$ um campo vetorial contínuo definido em um domínio contendo a imagem de $Im(\Gamma) = \Gamma(U)$. Definimos então a integral de superfície do campo vetorial $\vec{F}(x,y,z)$ sobre Γ (ou fluxo através da superfície Γ), pela integral*

$$\iint_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{N}\,d\,S = \iint_U \vec{F}(\Gamma(u,v)\cdot\vec{N}(\Gamma(u,v)\,\|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v(u,v)\|\,d\,u\,d\,v.$$

Observando que o campo de vetores normal unitário $N(x,y,z)$ satisfaz
$\vec{N}(\Gamma(u,v)) = \frac{\vec{X}_u(u,v)\wedge\vec{X}_v(u,v)}{\|\vec{X}_u(u,v)\wedge\vec{X}_v(u,v)\|}$ ou $\vec{N}(\Gamma(u,v)) = -\frac{\vec{X}_u(u,v)\wedge\vec{X}_v(u,v)}{\|\vec{X}_u(u,v)\wedge\vec{X}_v(u,v)\|}$, a expressão para a integral de superfície de $\vec{F}(x,y,z)$ sobre Γ é dada por

$$\iint_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{N}\,d\,S = \pm\iint_U \vec{F}(\Gamma(u,v)\cdot\ \vec{X}_u\wedge\vec{X}_v(u,v)\,d\,u\,d\,v.$$

O sinal $+$ ocorre caso a orientação escolhida seja no sentido do vetor $\vec{X}_u(u,v)\wedge\vec{X}_v(u,v)$ e o sinal $-$, se a orientação escolhida seja a oposta.

Exemplos 2.2. *(Ex. 4 da lista 5)*

Calcule a integral de superfície $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ *para cada um dos campos de vetores* $\vec{F}$ *e superfícies orientadas* S *indicadas abaixo. Em outras palavras, calcule o fluxo de* $\vec{F}$ *através de* S.

(a) $\vec{F}(x,y,z) = x^2y\,\vec{\imath} - 3xy^2\,\vec{\jmath} + 4y^3\vec{k}$ *e* S *é a parte do parabolóide* $z = 9 - x^2 - y^2$, *com* $z \geq 0$, *orientada de modo que a normal no ponto* $(0,0,9)$ *é* $\vec{k}$;

(b) $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\vec{k}$ *e* S *é a esfera* $x^2+y^2+z^2 = 9$, *orientada pela normal exterior.*

2.1. **Notação de formas.**

Suponhamos que $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$ e $\vec{X}(u,v) = x(u,v)\imath + y(u,v)\jmath + z(u,v)\vec{k}$.

Então temos

$$\vec{X}_u\wedge\vec{X}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\vec{k},$$

onde usamos as notações:

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Temos então

$$\iint_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{N}\,d\,S = \pm\iint_U \vec{F}(\Gamma(u,v)\cdot\ \vec{X}_u\wedge\vec{X}_v(u,v)\,d\,u\,d\,v$$

$$= \pm\iint_U P(\Gamma(u,v))\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q(\Gamma(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + Q(\Gamma(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,d\,v$$

e usamos a notação

$$\iint_\Gamma P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy$$

para indicar a integral de superfície de $\vec{F}$ sobre Γ.

Exemplo 2.3. *Calcular* $\displaystyle\iint_S -x\,dy\wedge dz - y\,dz\wedge dx + z^2\,dx\wedge dy$ *sendo* S *a parte do cone* $z=\sqrt{x^2+y^2}$ *entre os planos* $z=1$ *e* $z=2$, *orientada de modo que sua normal* $\vec{N}$ *satisfaça* $\vec{n}\cdot\vec{k}<0$.