Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

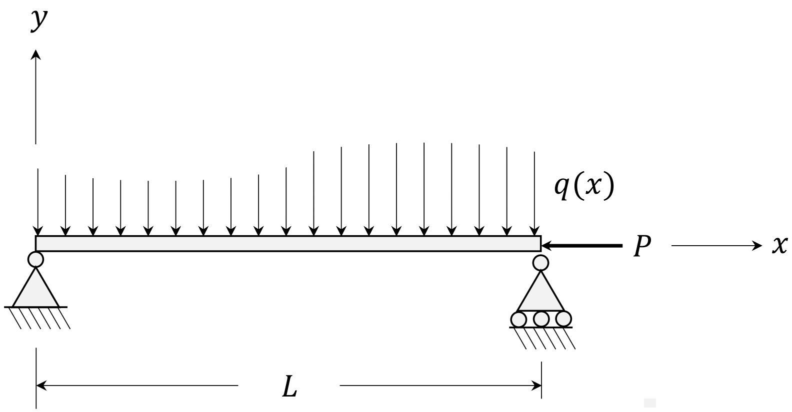
PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

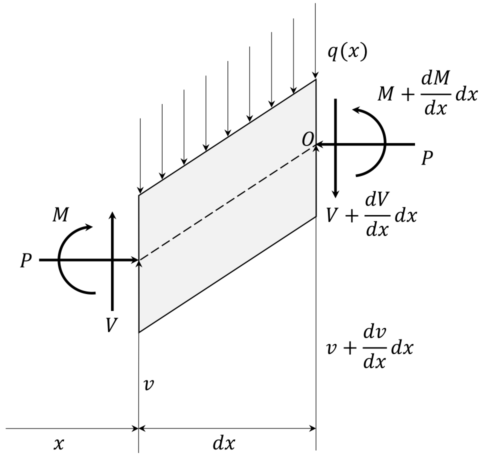
Aula #26

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

05/12/2023

Equação diferencial da curva de deflexão incluindo o efeito da força normal





$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V - \left(V + \frac{dV}{dx}dx\right) - q dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dx} = -q(x)$$

$$\Sigma M_O = 0 \quad \Rightarrow -M + \left(M + \frac{dM}{dx}dx\right) - V dx$$

$$+P\frac{dV}{dx}\, dx + q dx\frac{dx}{2} = 0$$

$$\Rightarrow V = \frac{dM}{dx} + P\frac{dv}{dx}$$

(Note a influência da força norma na força cortante!)

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dM}{dx} + P\frac{dv}{dx}\right) = -q(x)$$

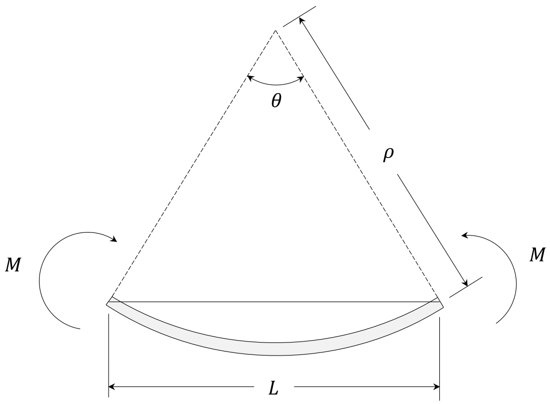
Como P é constante:

$$\frac{d^2M}{dx^2} + P\frac{d^2v}{dx^2} = -q(x)$$

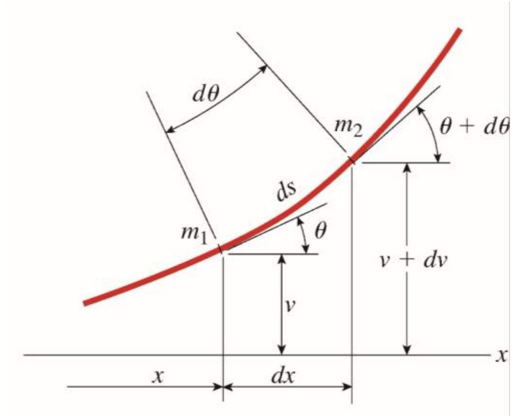
Equação diferencial da curva de deflexão incluindo o efeito da força normal

- Para material elástico-linear:

$$M = EI\,\kappa = EI\frac{d\theta}{ds}$$



- Para pequenos ângulos:



$$\theta = \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2v}{dx^2}$$ (linearização da curvatura)

$$\Rightarrow M = EI\frac{d^2v}{dx^2}$$

Equação diferencial da curva de deflexão incluindo o efeito da força normal

$$\frac{d^2M}{dx^2} + P\frac{d^2v}{dx^2} = -q(x)$$

- Material elástico linear: $$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) + P\frac{d^2v}{dx^2} = -q(x)$$
- Barra prismática: $$EI\frac{d^4v}{dx^4} + P\frac{d^2v}{dx^2} = -q(x)$$
- Na notação de Lagrange: $$EIv^{iv} + Pv'' = -q(x)$$
- Equação homogênea: $$EIv^{iv} + Pv'' = 0$$
- Definindo-se $k^2 = \frac{P}{EI}$: $$v^{iv} + k^2\,v'' = 0$$

Força cortante

$$V = \frac{dM}{dx} + P\frac{dv}{dx}$$

- Material elástico linear: $V = \dfrac{d}{dx}\left(EI\dfrac{d^2v}{dx^2}\right) + P\dfrac{dv}{dx}$

- Barra prismática: $V = EI\dfrac{d^3v}{dx^3} + P\dfrac{dv}{dx}$

- Na notação de Lagrange: $V = EIv''' + Pv'$

- Definindo-se $k^2 = \dfrac{P}{EI}$: $\dfrac{V}{EI} = v''' + k^2\, v'$

Solução da equação diferencial:

$$v^{iv} + k^2\, v'' = 0$$

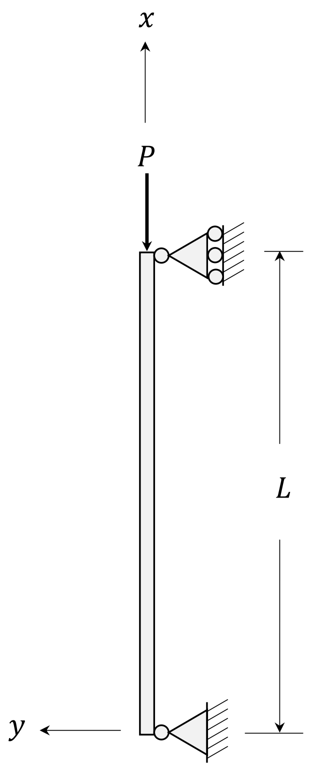
$$v(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx + Cx + D$$

$$\theta(x) = v' = kA \cos kx - kB \operatorname{sen} kx + C$$

$$\frac{M(x)}{EI} = v'' = -k^2\, A \operatorname{sen} kx - k^2\, B \cos kx$$

$$\frac{V(x)}{EI} = v''' + k^2 v' = k^2\, C$$

Coluna biapoiada



$$v(x) = A\,\text{sen}\,kx + B\cos kx + Cx + D$$

$$\theta(x) = v' = kA\cos kx - kB\,\text{sen}\,kx + C$$

$$\frac{M(x)}{EI} = v'' = -k^2\,A\,\text{sen}\,kx - k^2\,B\cos kx$$

$$\frac{V(x)}{EI} = v''' + k^2 v' = k^2\,C$$

$$v(0) = 0 \;\Rightarrow B + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$v(L) = 0 \;\Rightarrow\; A\,\text{sen}\,kL + B\cos kL + CL + D = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$M(0) = 0 \;\Rightarrow\; B = 0$$

$$M(L) = 0 \Rightarrow A\,\text{sen}\,kL + \;B\cos kL = 0 \;\Rightarrow A\,\text{sen}\,kL = 0$$

- Equação característica:

$$A\,\text{sen}\,kL = 0 \begin{cases} A = 0 & \text{(solução trivial)} \\ \quad\text{ou} & \\ \text{sen}\,kL = 0 & \end{cases}$$

Coluna biapoiada

$$\text{sen}\, kL = 0 \;\Rightarrow kL = n\pi \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots$$

como $\quad k^2 = \dfrac{P}{EI} \Rightarrow P_n = n^2 \dfrac{\pi^2\, EI}{L^2}$

- *Carga crítica* ou *carga de Euler:*

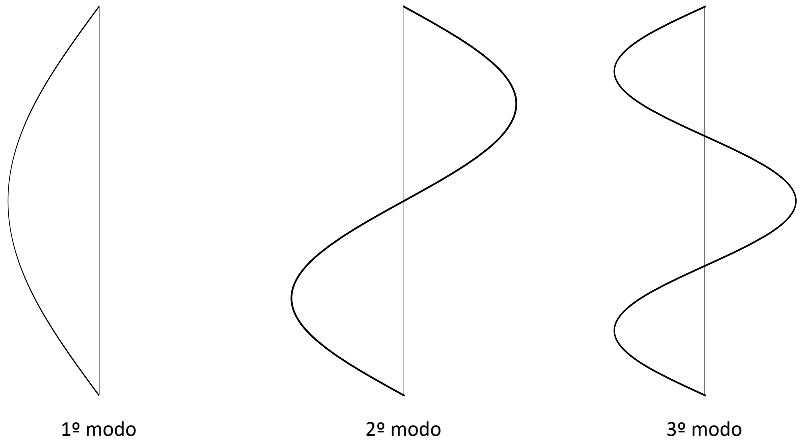
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

- Curva de deflexão:

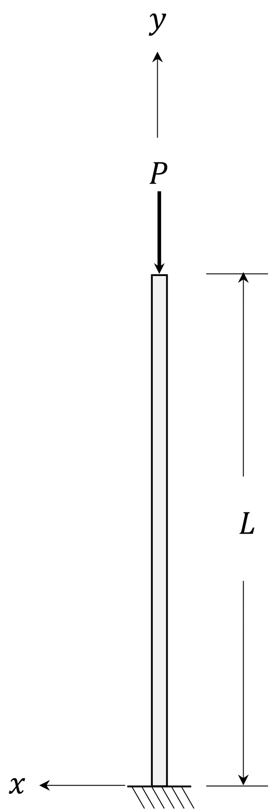
$$v(x) = A\, \text{sen}\, kx$$

- *Modos de flambagem*:

$$v_n(x) = A\, \text{sen}\left(n\pi \frac{x}{L}\right)$$



Coluna engastada



$$v(x) = A\,\text{sen}\,kx + B\cos kx + Cx + D$$

$$\theta(x) = v' = kA\cos kx - kB\,\text{sen}\,kx + C$$

$$\frac{M(x)}{EI} = v'' = -k^2 A\,\text{sen}\,kx - k^2 B\cos kx$$

$$\frac{V(x)}{EI} = v''' + k^2 v' = k^2 C$$

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow B + D = 0 \Rightarrow B = -D$$

$$\theta(0) = 0 \quad \Rightarrow kA + C = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$M(L) = 0 \quad \Rightarrow A\,\text{sen}\,kL + B\cos kL = 0 \Rightarrow B\cos kL = 0$$

$$V(L) = 0 \quad \Rightarrow V(L) = 0 \Rightarrow C = 0$$

- Equação característica:

$$B\cos kL = 0 \begin{cases} B = 0 \quad \text{(solução trivial)} \\ \quad \text{ou} \\ \cos kL = 0 \end{cases}$$

Coluna engastada

$$\cos kL = 0 \ \Rightarrow kL = (2\mathrm{n}-1)\frac{\pi}{2} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots$$

como $\quad k^2 = \dfrac{P}{EI} \Rightarrow P_n = (2n-1)^2 \dfrac{\pi^2\,EI}{4L^2}$

- *Carga crítica* ou *carga de Euler:*

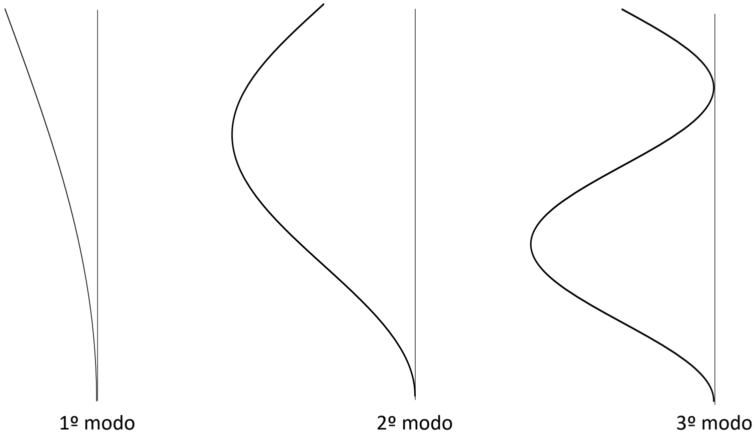
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

- Curva de deflexão:

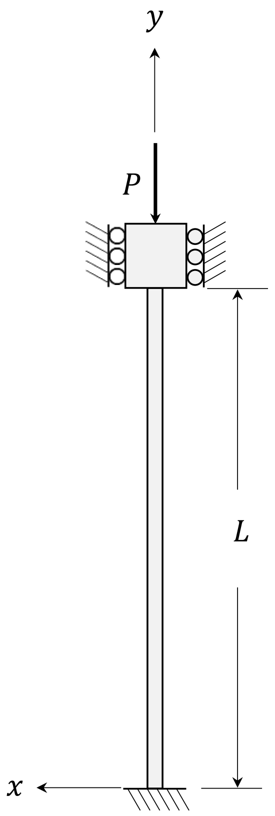
$$v(x) = D(1 - coskx)$$

- *Modos de flambagem*:

$$v_n(x) = D\left[1 - \cos\left((2n-1)\,\frac{\pi}{2}\,\frac{x}{L}\right)\right]$$



Coluna biengastada



$$v(x) = A\,\text{sen}\,kx + B\cos kx + Cx + D$$

$$\theta(x) = v' = kA\cos kx - kB\,\text{sen}\,kx + C$$

$$\frac{M(x)}{EI} = v'' = -k^2\,A\,\text{sen}\,kx - k^2\,B\cos kx$$

$$\frac{V(x)}{EI} = v''' + k^2 v' = k^2\,C$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow B + D = 0$$

$$\theta(0) = 0 \Rightarrow kA + C = 0$$

$$v(L) = 0 \Rightarrow A\,\text{sen}\,kL + B\cos kL + CL + D = 0$$

$$\theta(L) = 0 \Rightarrow kA\cos kL - kB\,\text{sen}\,kL + C = 0$$

- Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\,kL & \cos kL & L & 1 \\ k\cos kL & -k\,\text{sen}\,kL & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Coluna biengastada

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} kL & \cos kL & L & 1 \\ k\cos kL & -k\operatorname{sen} kL & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- É imediato ver que o sistema admite a solução trivial $A = B = C = D = 0$

- Para que exista uma outra solução é necessário que:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} kL & \cos kL & L & 1 \\ k\cos kL & -k\operatorname{sen} kL & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- Equação característica:

$$2 - 2\cos kL - kL\operatorname{sen} kL = 0$$

Coluna biengastada

- Usando as relações trigonométricas:

$$\cos kL = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\frac{kL}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,kL = 2\,\mathrm{sen}\frac{kL}{2}\cos\frac{kL}{2}$$

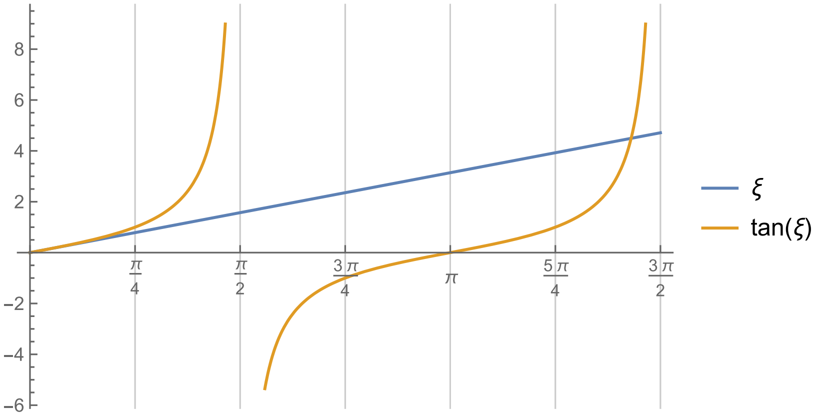
- A equação característica pode ser colocada na forma:

$$\mathrm{sen}\frac{kL}{2}\left(\frac{kL}{2}\cos\frac{kL}{2} - \mathrm{sen}\frac{kL}{2}\right) = 0$$

- Soluções:

i) $\mathrm{sen}\frac{kL}{2} = 0 \Rightarrow \frac{kL}{2} = \pi$

ii) $\frac{kL}{2} = \tan\frac{kL}{2} \Rightarrow \frac{kL}{2} > \pi$



- Carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

Coluna biengastada

- Primeiro modo natural:

$$kL = 2\pi$$

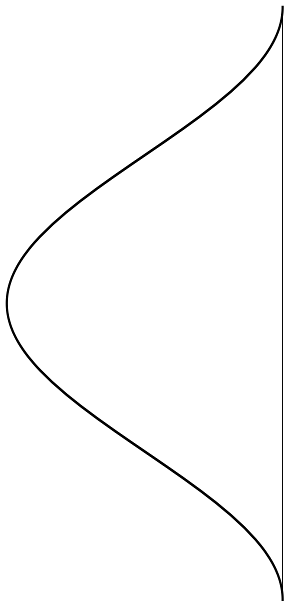
$$B + D = 0 \Rightarrow B = -D$$

$$kA + C = 0$$

$$A \operatorname{sen} kL + B \cos kL + CL + D = 0 \Rightarrow B + CL + D = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$kA \cos kL - kB \operatorname{sen} kL + C = 0 \Rightarrow kA + C = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$v_1(x) = D\left(1 - \cos 2\pi \frac{x}{L}\right)$$



1º Modo

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo da Flambagem de Barras.* Disponível no Moodle