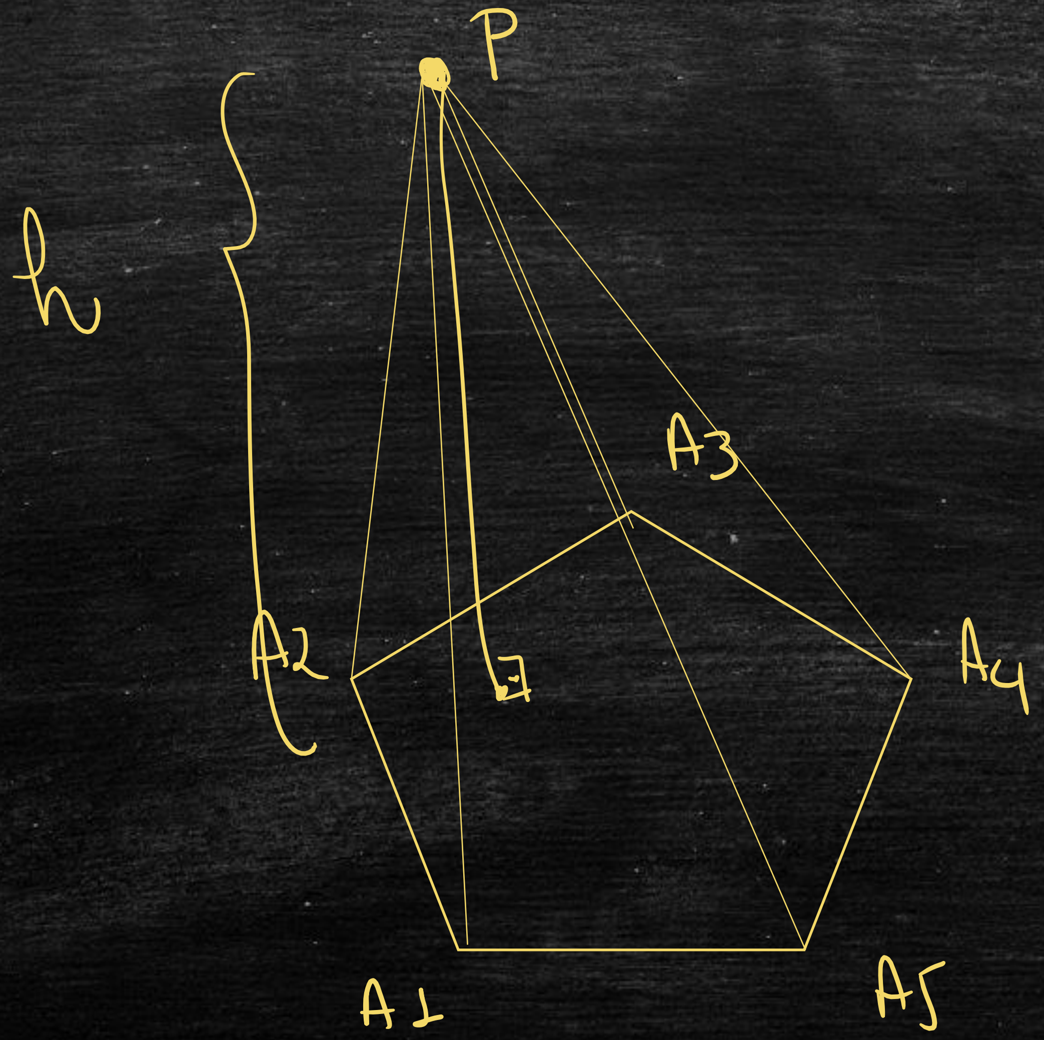
Prisma

- Quando a base de um prisma é um *paralelogramo*, então ele é chamado de **paralelepípedo**.
- Quando as arestas laterais são perpendiculares à base, chamamos de **prisma reto**. Nesse caso, as faces laterais são *retângulos.*
- Quando a base de um prisma reto é um retângulo, chamamos de **paralelepípedo reto retângulo** ou **bloco retangular**
- Quando todas as seis faces de um paralelepípedo reto retângulo são quadrados, chamamos de **cubo**.

Pirâmide

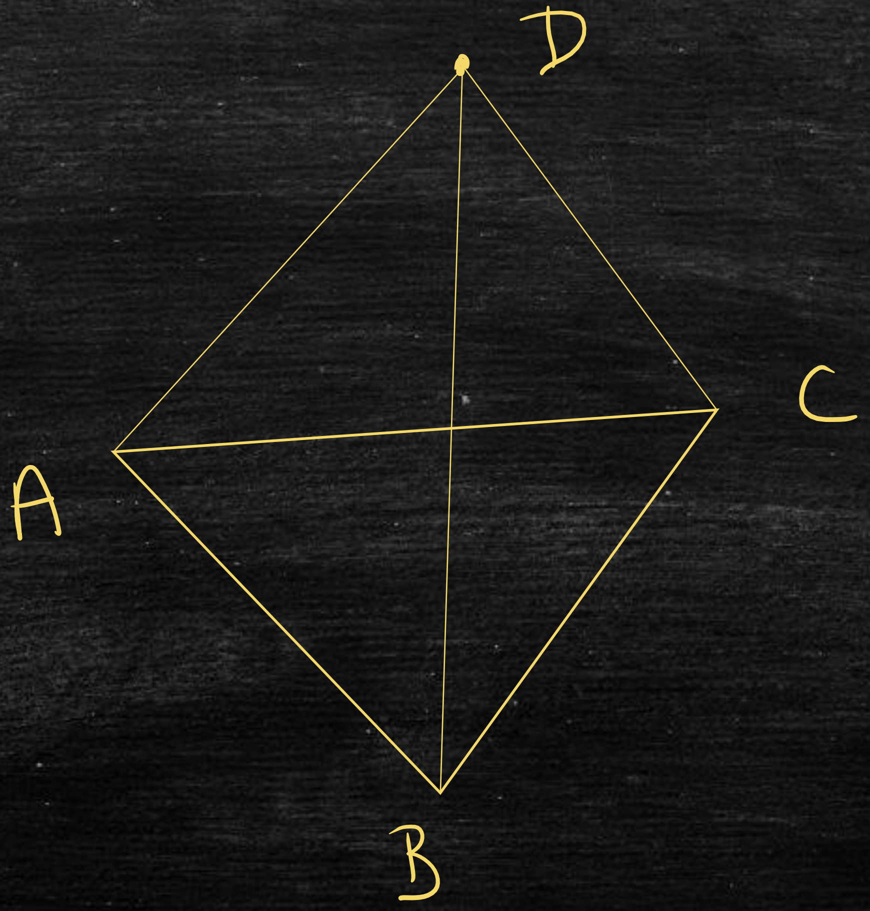
- Consideramos um figura plana $A_1A_2 \cdots A_n$ contido em um plano α. Em um plano β, paralelo a α, consideramos um P. Traçamos segmentos $A_1P, A_2P, \cdots, A_nP$. Cada dois vértices consecutivos de $A_1A_2 \cdots A_n$ determinam com P um triângulo. Estes triângulos, juntamente com o polígono $A_1A_2 \cdots A_n$, delimitam o a figura chamada de **pirâmide** de base $A_1A_2 \cdots A_n$ e vértice P. A altura dessa pirâmide é $d(\alpha, \beta) = d(P, \alpha)$.

Pirâmide



Tetraedro

Um tetraedro é uma pirâmide cuja base é um triângulo.



Tetraedro

Qualquer secção em um tetraedro, paralela à base, produz um triângulo semelhante à base, com razão de semelhança $\frac{h}{H}$.

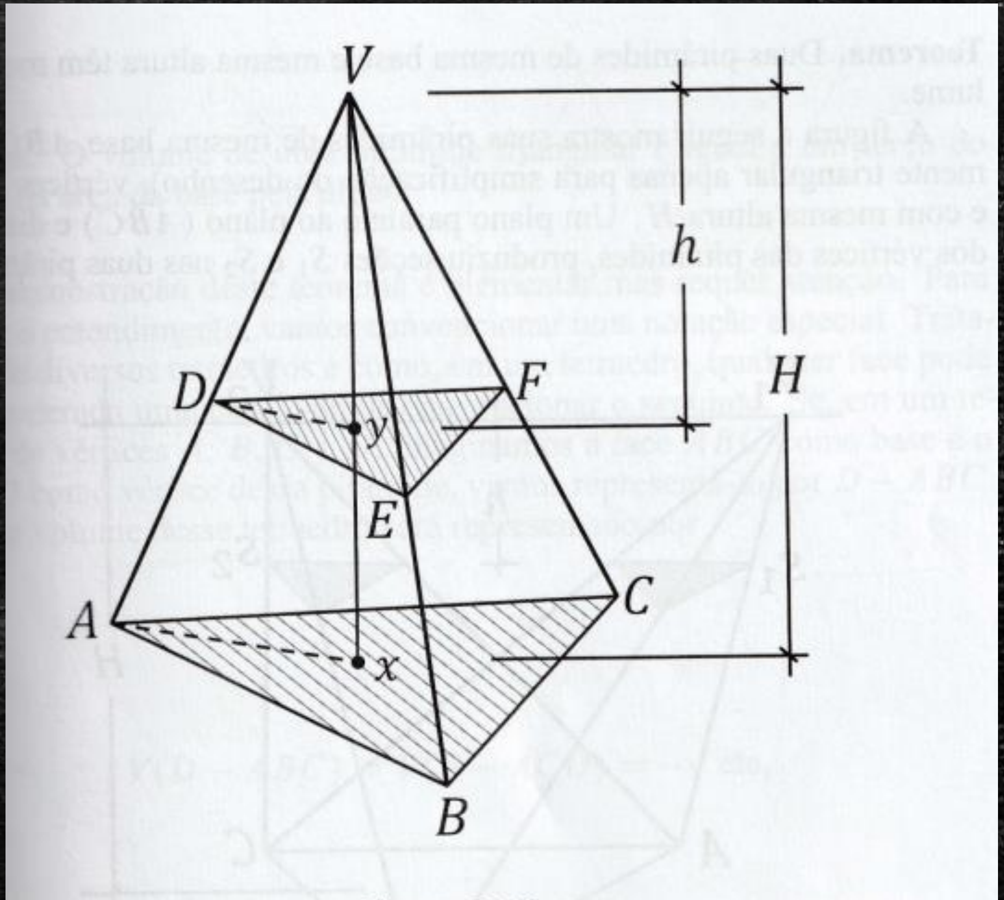
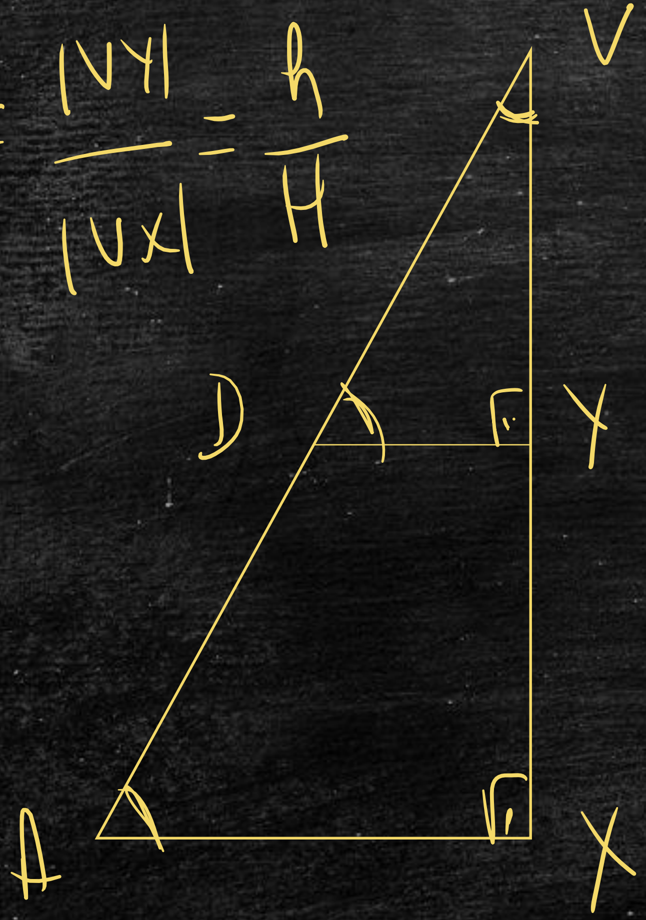


Figura 11.6

Imagem: A Matemática do Ensino Médio, Vol. 2, SBM

Tetraedro

$$\frac{|VD|}{|VA|} = \frac{|VY|}{|VX|} = \frac{h}{H}$$



$$\Rightarrow \frac{|VD|}{|VA|} = \frac{h}{H}$$

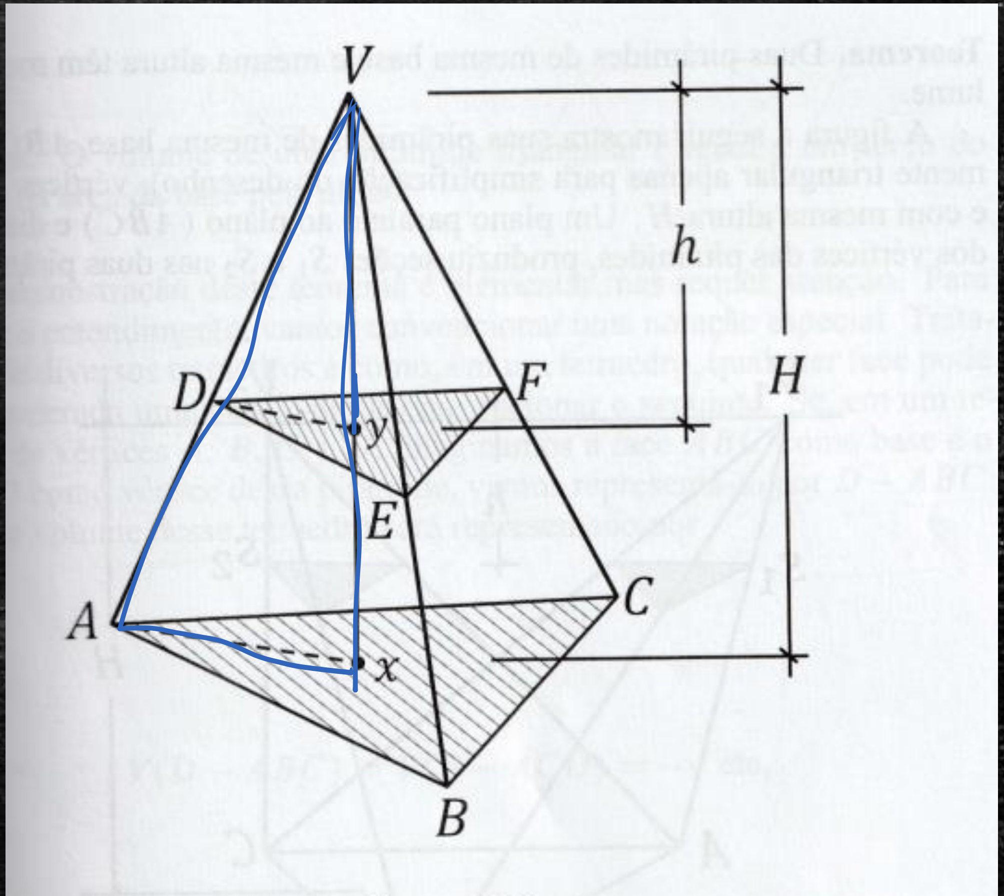


Figura 11.6

Imagem: A Matemática do Ensino Médio, Vol. 2, SBM

Tetraedro

$$\frac{|VD|}{|VA|} = \frac{|DE|}{|AB|} = \frac{h}{H}$$

aplicando o mesmo raciocínio para os triângulos VEF e VAB, concluímos que

$$\frac{|EF|}{|BC|} = \frac{h}{H}$$

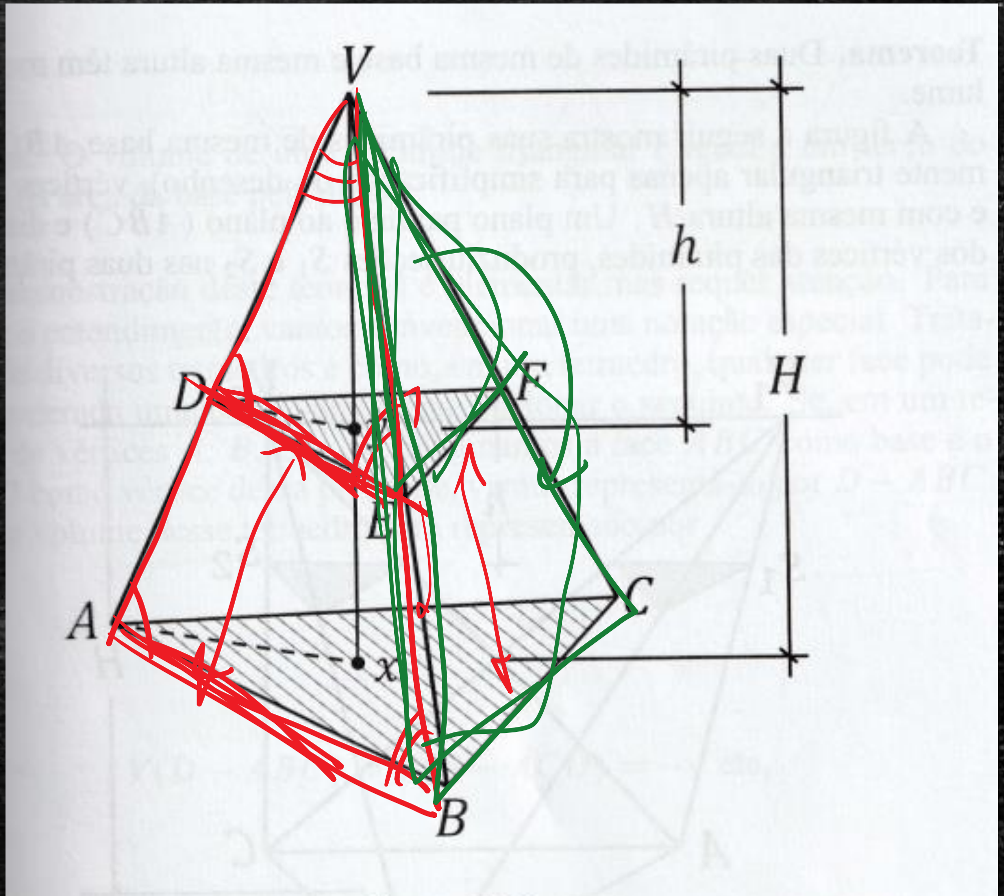


Figura 11.6

Imagem: A Matemática do Ensino Médio, Vol. 2, SBM

Tetraedro

analogamente: $\dfrac{|DF|}{|AC|} = \dfrac{h}{H}$

Portanto

$ABC \sim DEF$ com razão de semelhança $\alpha = \dfrac{h}{H}$

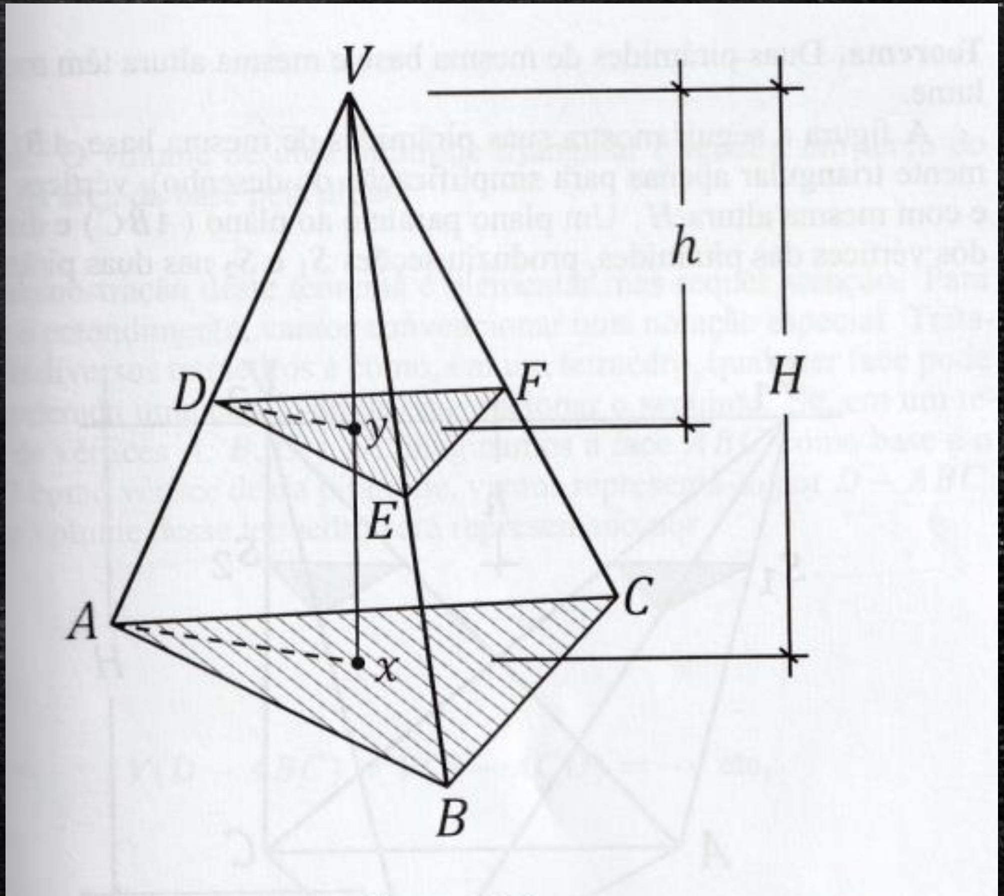


Figura 11.6

Imagem: A Matemática do Ensino Médio, Vol. 2, SBM

Tetraedro

$$\text{área}(DEF) = \alpha^2 \cdot \text{área}(ABC)$$

$$\alpha = \frac{h}{H}$$

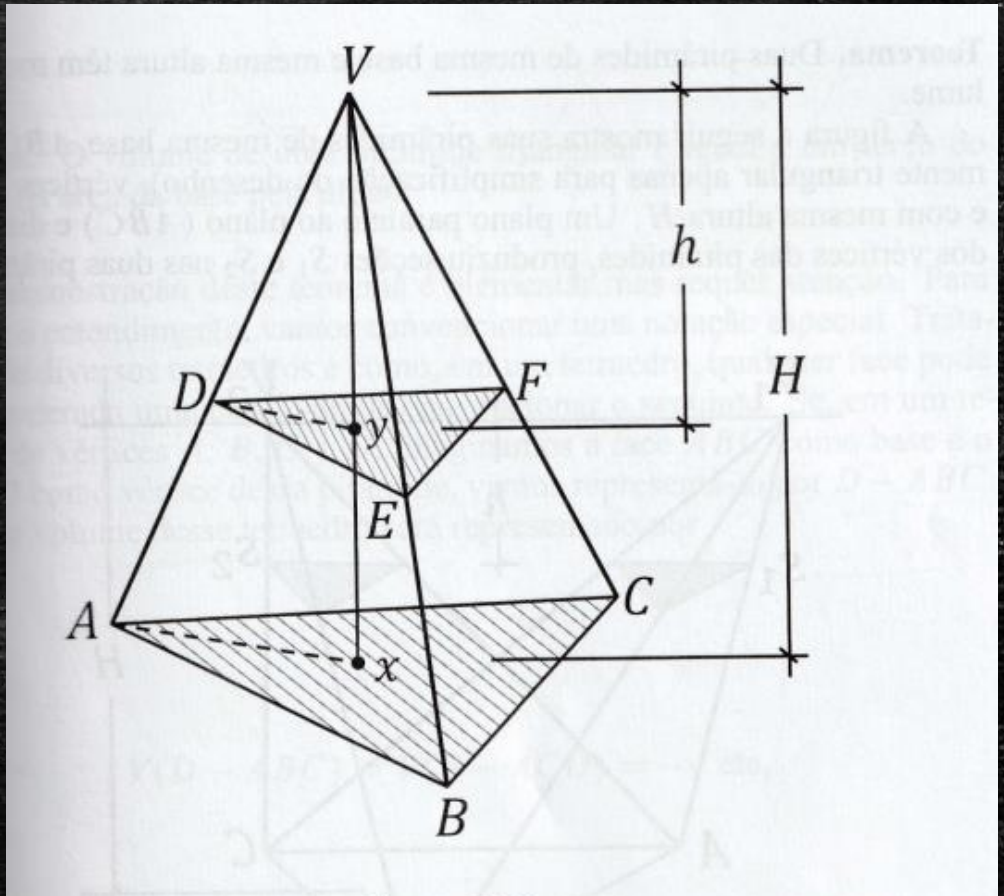


Figura 11.6

Imagem: A Matemática do Ensino Médio, Vol. 2, SBM

Tetraedro

Dois tetraedros, com bases de mesma área e mesma altura, possuem o mesmo volume.

Imagem: A Matemática do Ensino Médio, Vol. 2, SBM

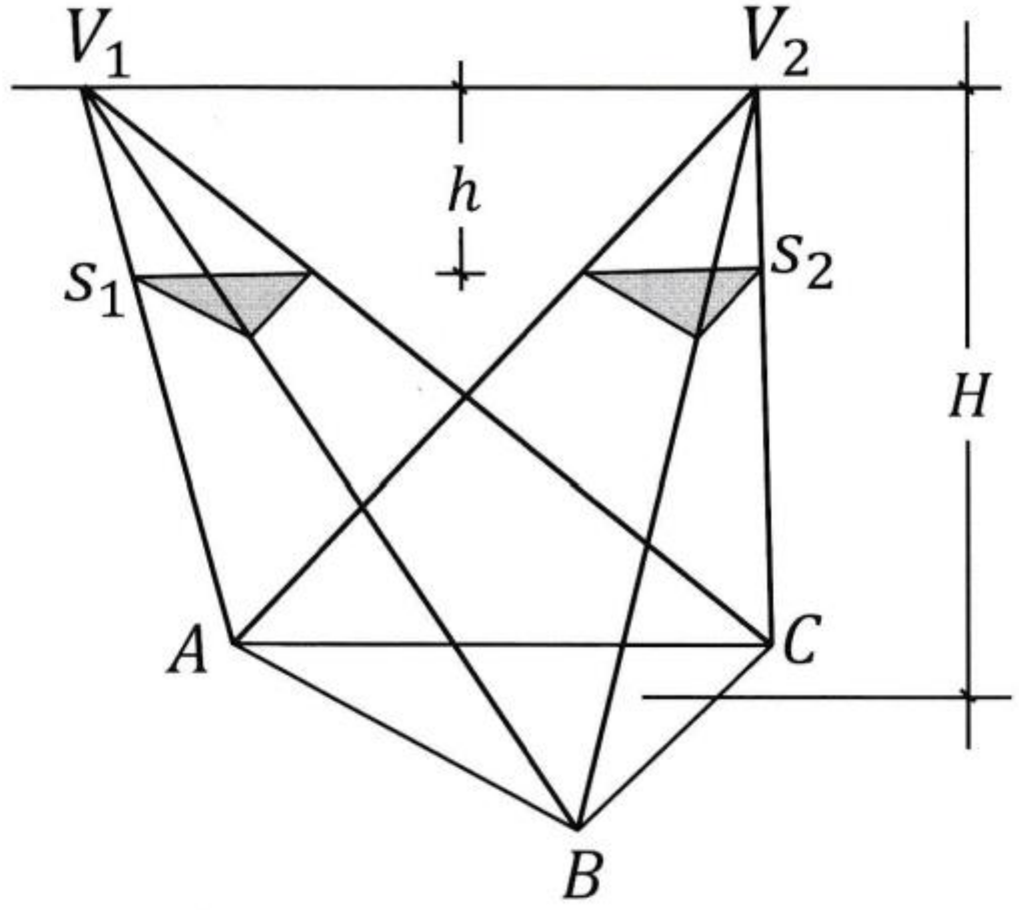
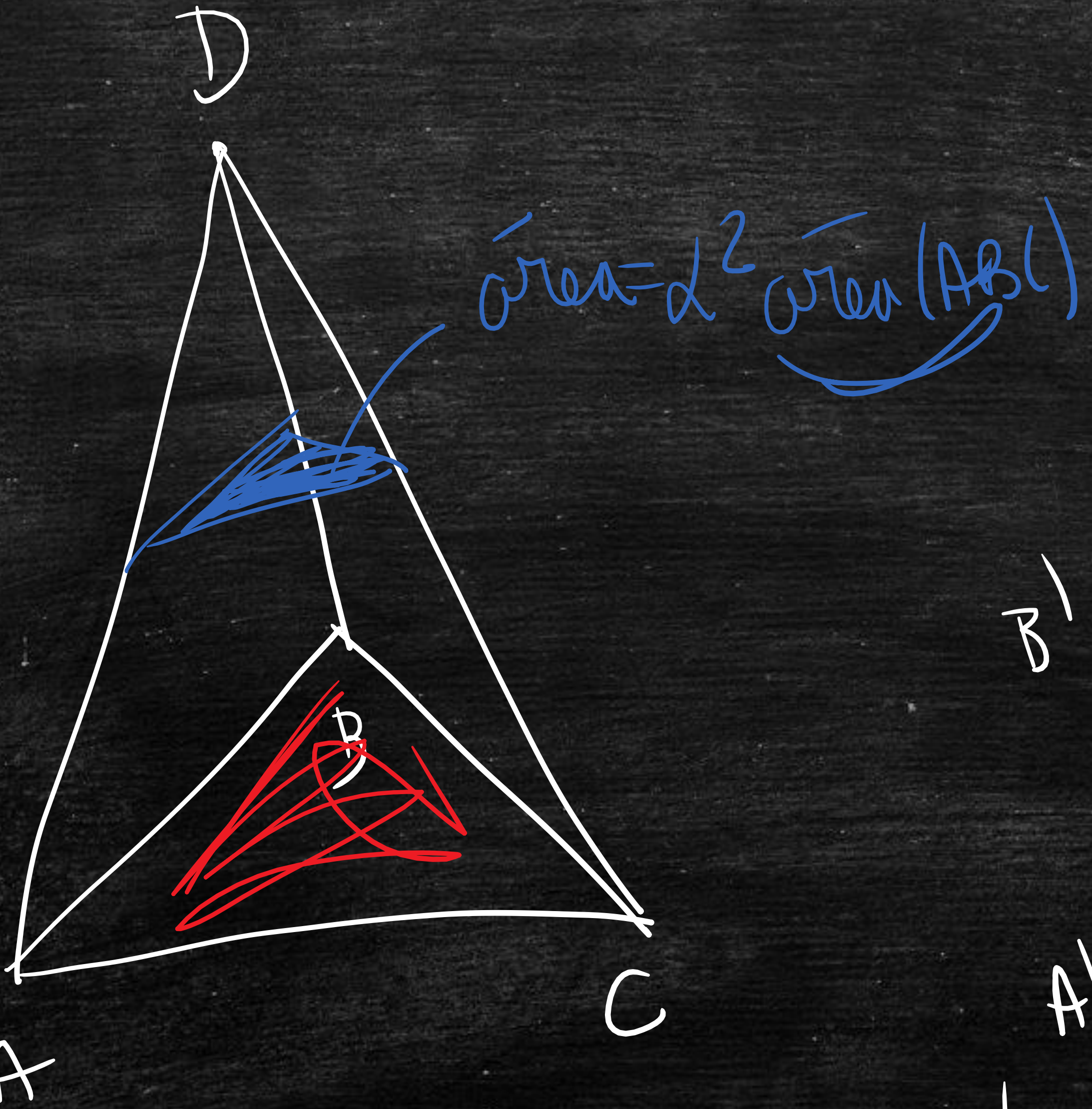
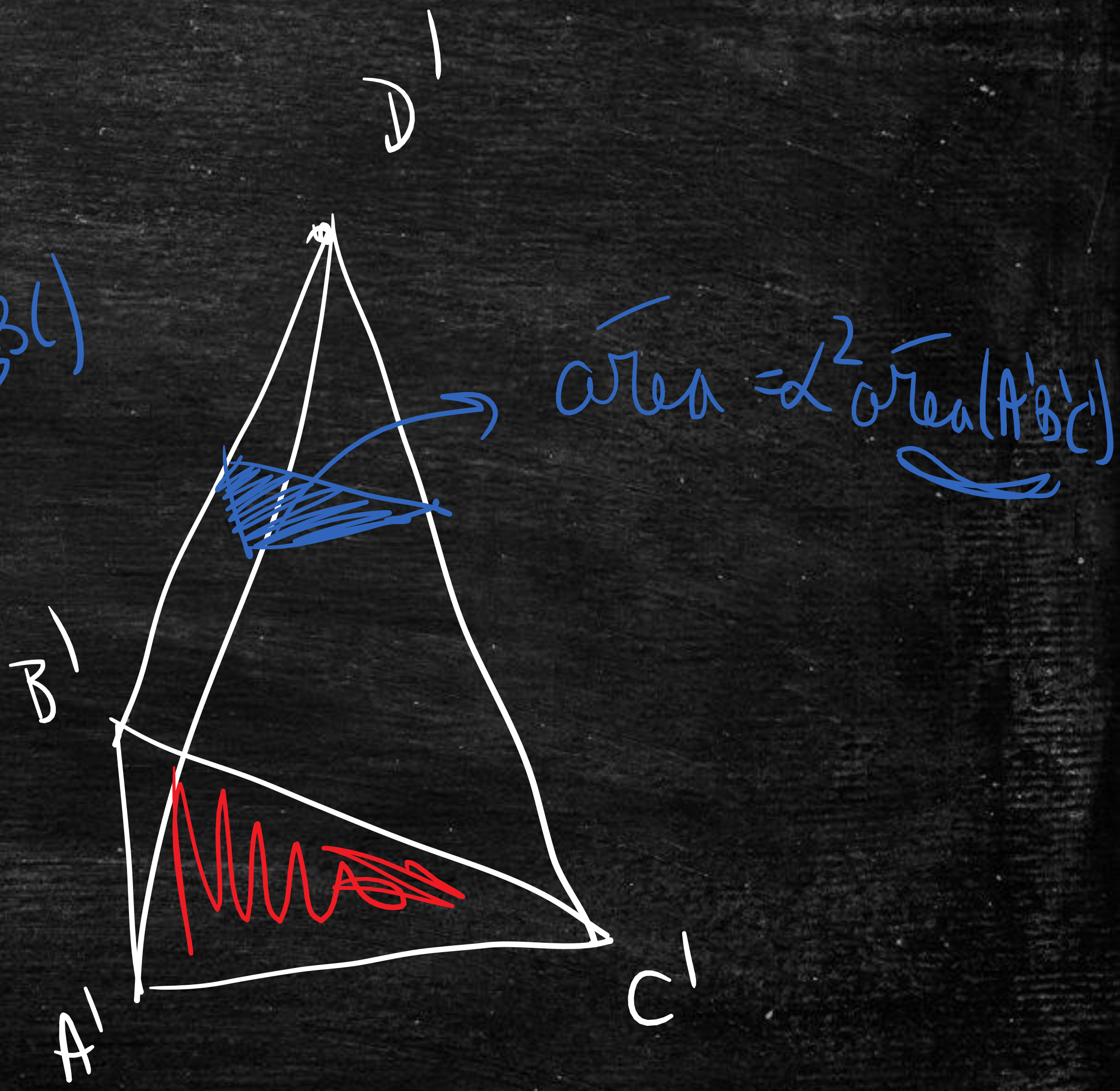


Figura 11.7





área (ABC) = área (A'B'C') e altura (ABCD) = altura (A'B'C'D')

Tetraedro

as seções transversais possuem mesma área, pois são semelhantes à base, com mesma razão de semelhança. Pelo Princípio de Cavalieri, os dois tetraedros possuem o mesmo volume

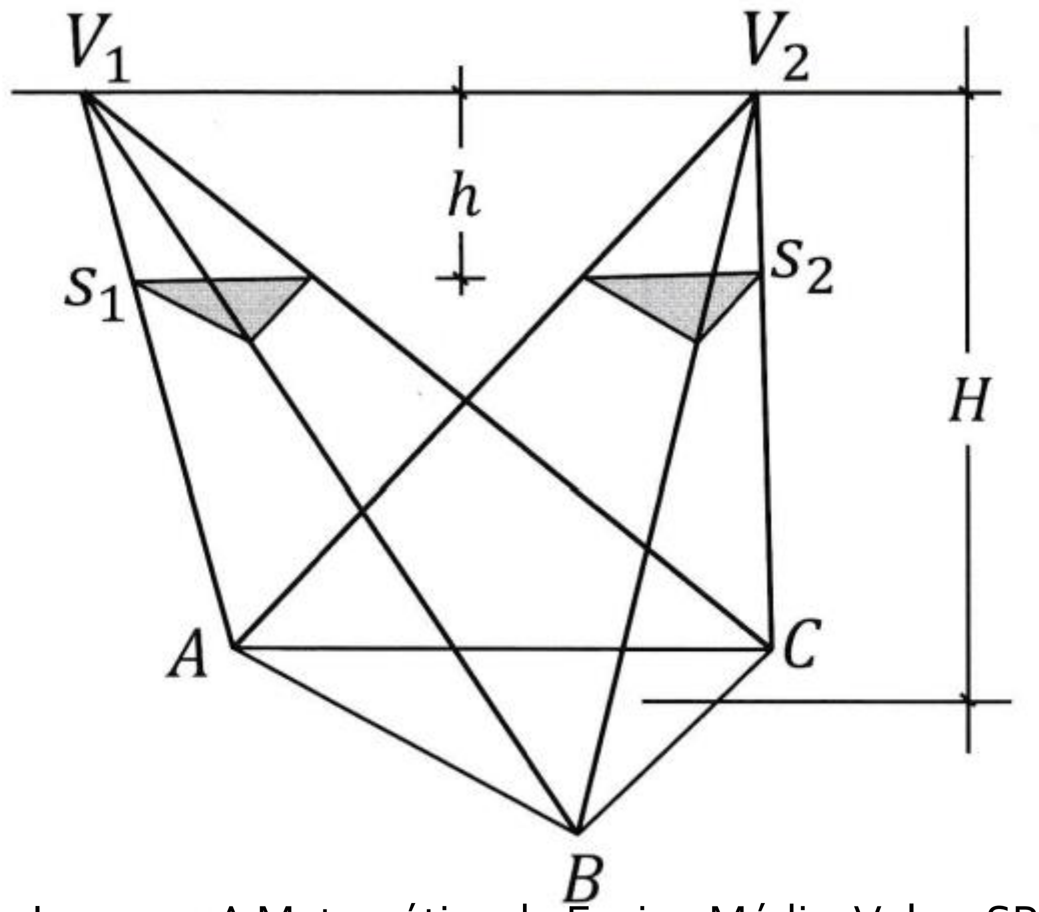


Imagem: A Matemática do Ensino Médio, Vol. 2, SBM

Figura 11.7

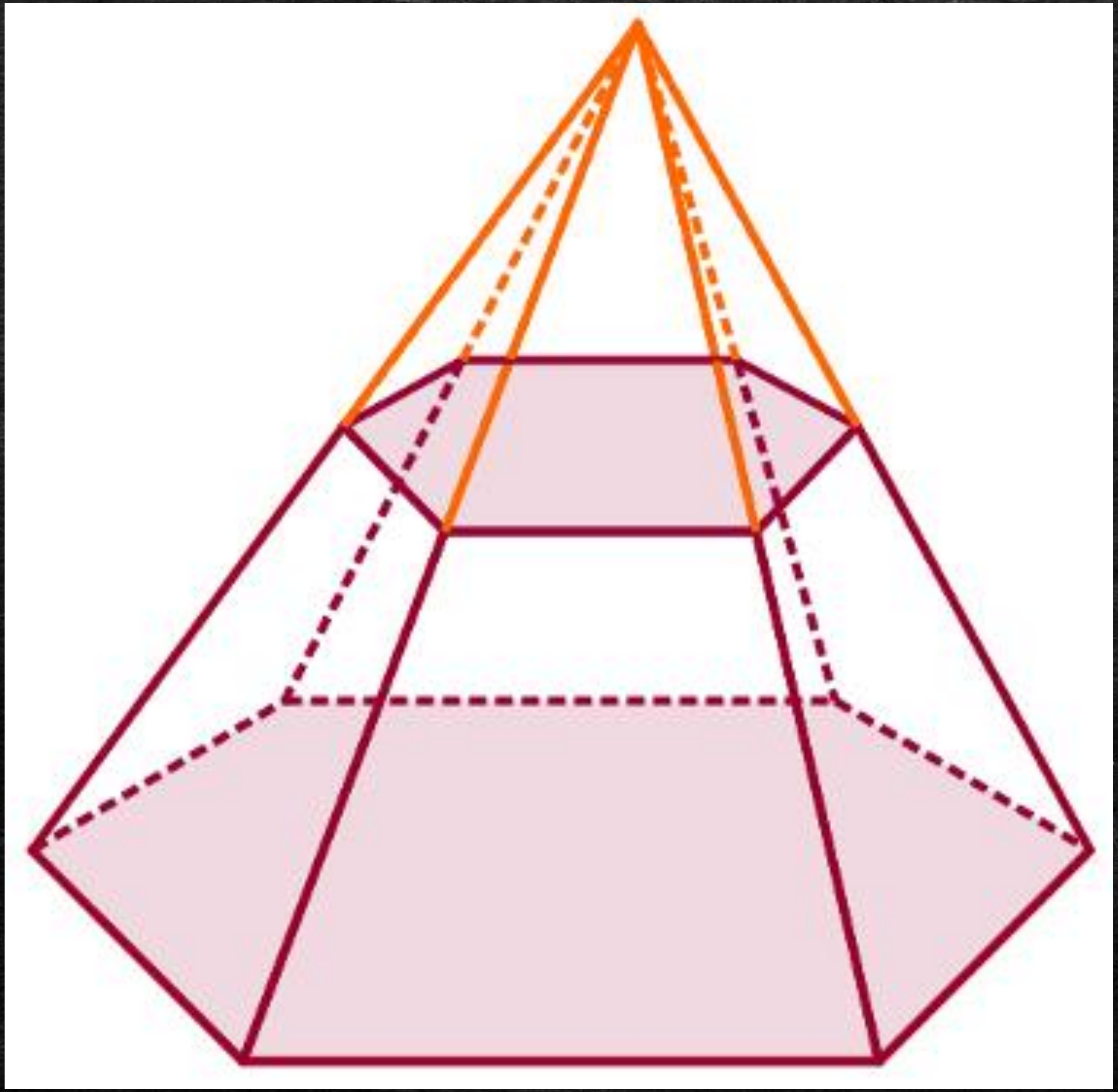


Imagem: https://mundoeducacao.uol.com.br

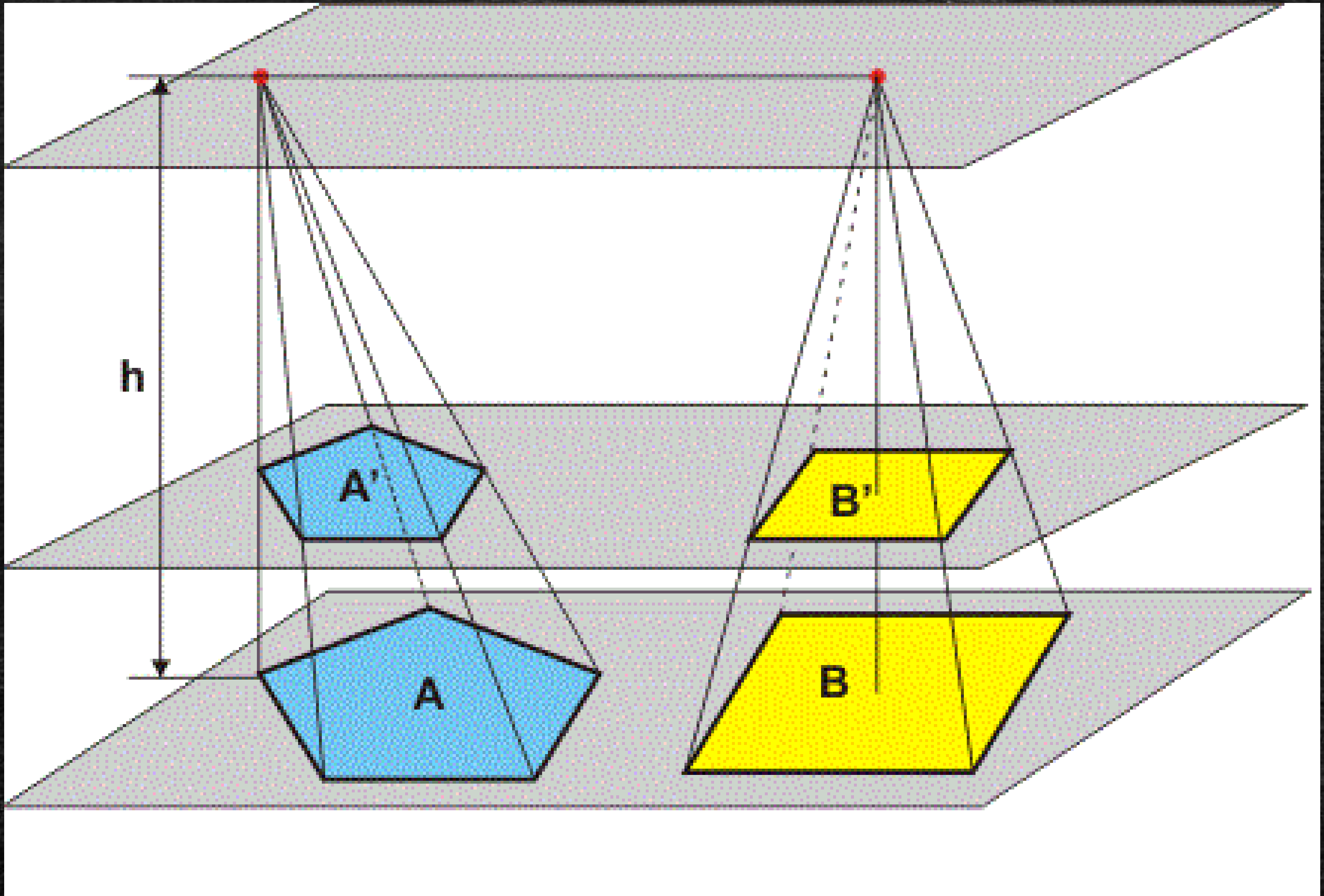


Imagem: https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/geometria/principio-de-cavalieri/calculo-de-volumes/

Volume do Tetraedro

Consideremos um tetraedro $ABCD$.

Note que, em um tetraedro, cada face pode ser considerada uma base.

Quando escrevermos $D - ABC$, queremos dizer que estamos considerando o tetraedro com base ABC, e vértice D.

Denotaremos por $V(D - ABC)$ ao volume deste tetraedro.

Note que $V(D - ABC) = V(B - ACD) = V(C - ABD) = V(A - BCD)$.

Volume do Tetraedro

Considerando então o tetraedro $D - ABC$, construímos um prisma com base ABC e mesma altura que o tetraedro.

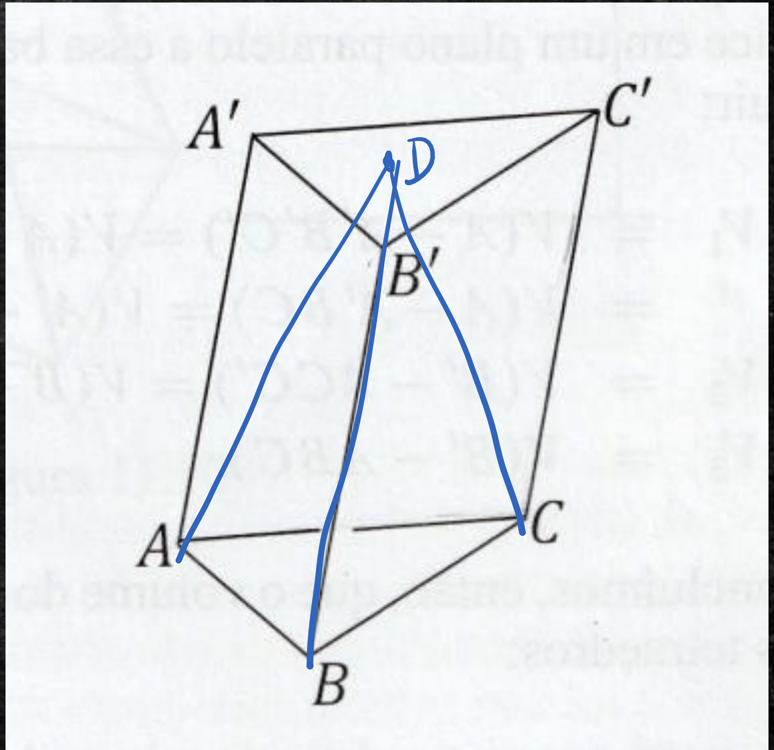


Figura 11.8

Imagem: A Matemática do Ensino Médio, Vol. 2, SBM

Volume do Tetraedro

Vamos agora dividir o prisma em três tetraedros:

$$A - A'B'C'$$
$$B' - ACC'$$
$$B' - ABC$$

$A - A'B'C'$

$B' - ACC'$

$B' - ABC$

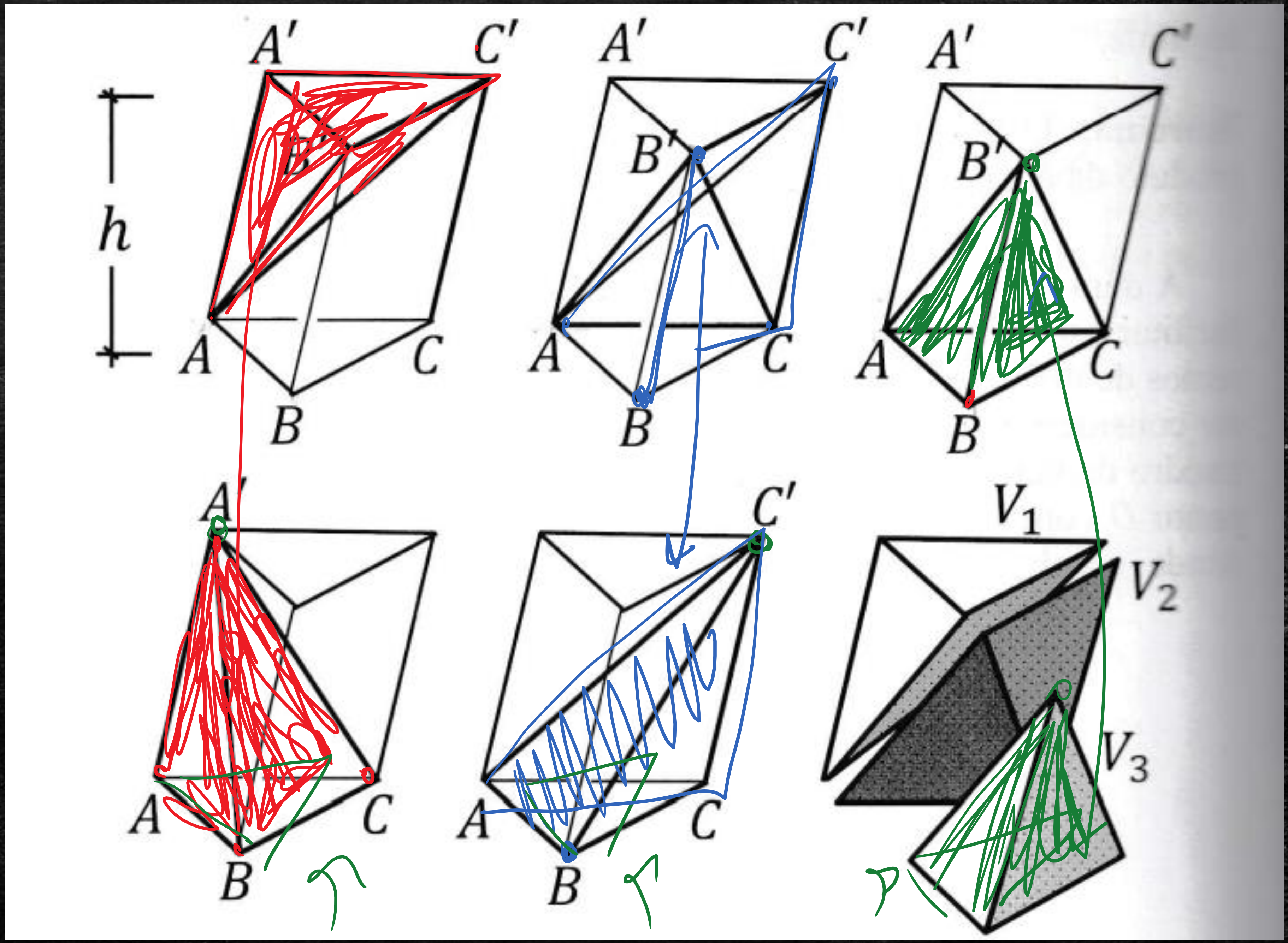


Imagem: A Matemática do Ensino Médio, Vol. 2, SBM

Volume do Tetraedro

Vamos denotar os volumes dos três tetraedros

$$V_1 = V(A - A'B'C') = V(A - A'BC') = V(A - A'BC) = V(A' - ABC).$$

$$V_2 = V(B' - ACC') = V(B - ACC') = V(C' - ABC)$$

$$V_3 = V(B' - ABC)$$

Volume do Tetraedro

O volume do prisma é a soma dos volumes do três tetraedros $A' - ABC$, $B' - ABC$ e $C' - ABC$.

Porém, os tetraedros $A' - ABC$, $B' - ABC$ e $C' - ABC$, possuem todos o mesmo volume, pois possuem mesma base e mesma altura, e possuem inclusive a mesma base do prisma construído.

Volume do Tetraedro

Portanto podemos concluir o seguinte resultado:

O volume de um tetraedro (ou pirâmide de base triangular) é dado pela expressão

$$\frac{área\ da\ base \cdot altura}{3}$$

Volume da Pirâmide

Seja P uma pirâmide qualquer, cuja base tem área A e altura h.

Temos que o volume de P é dado por $\frac{A \cdot h}{3}$.

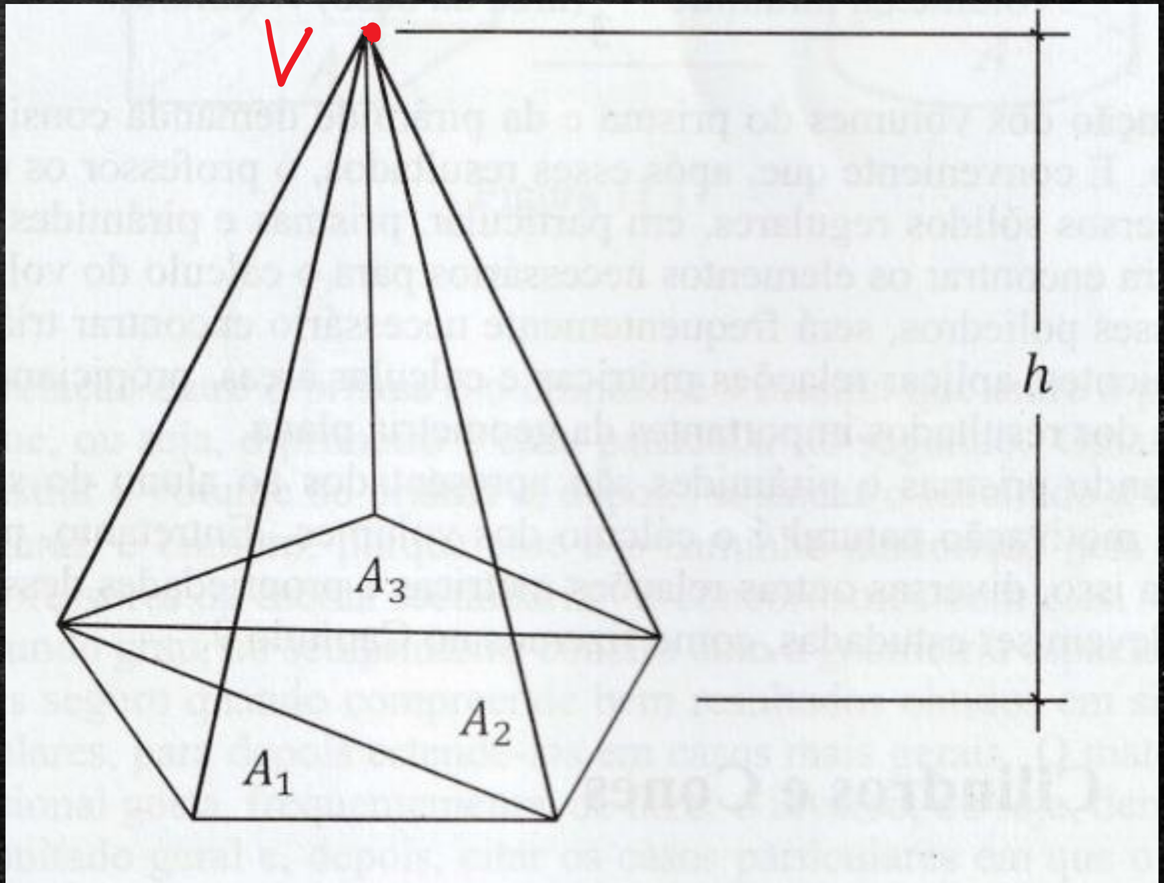


Figura 11.10

Imagem: A Matemática do Ensino Médio, Vol. 2, SBM

Volume da Pirâmide

A área A do polígono é

$A = A_1 + A_2 + A_3$.

O volume da pirâmide é a soma do volume dos três tetraedros:

$$\frac{A_1 \cdot h}{3} + \frac{A_2 \cdot h}{3} + \frac{A_3 \cdot h}{3} =$$

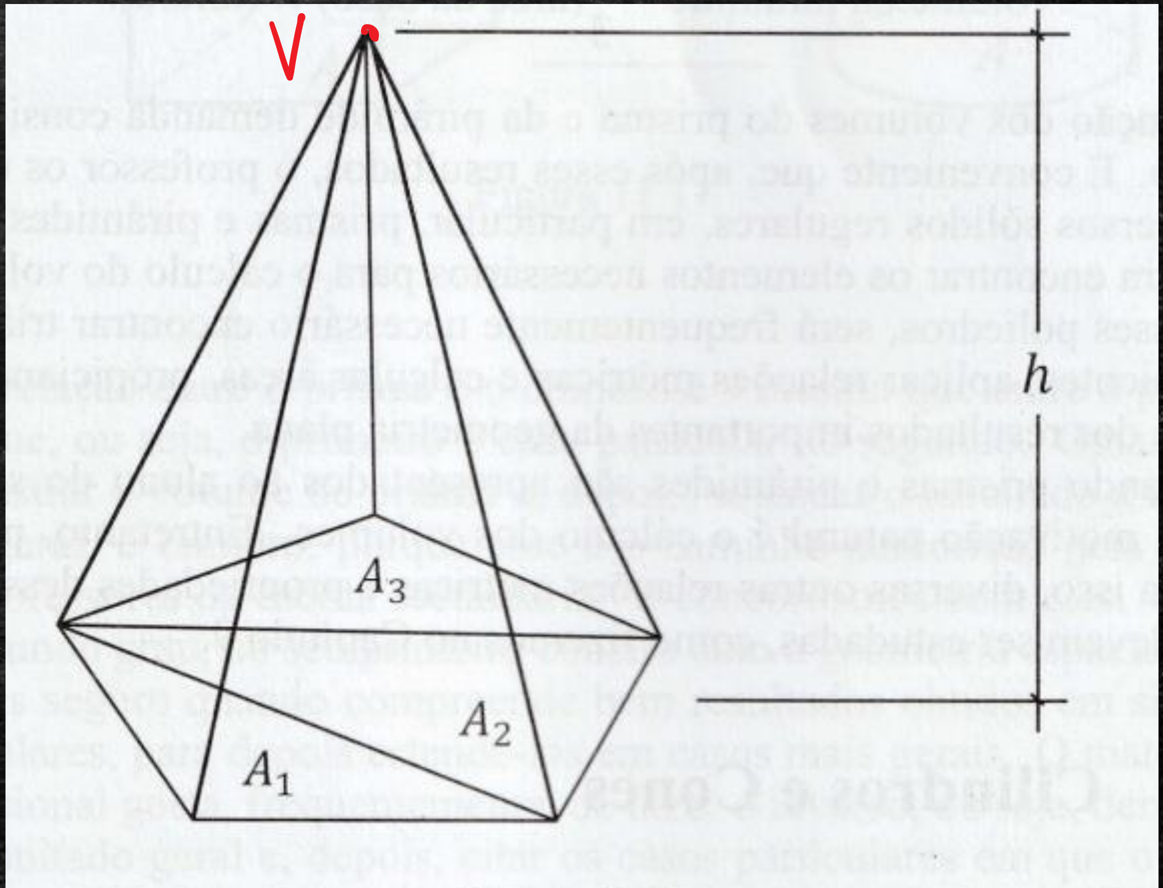


Figura 11.10

Imagem: A Matemática do Ensino Médio, Vol. 2, SBM

$$= \frac{h}{3}(A_1 + A_2 + A_3) = \frac{A \cdot h}{3} = \frac{(\text{área da base}) \cdot (\text{altura})}{3}$$