1

Considere o problema a seguir:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s. a.:} & a_i \le x_i \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m. \end{array}$$

Seja $\boldsymbol{x}$ um ponto factível e denotemos $\boldsymbol{g} = \nabla f(\boldsymbol{x})$. Considere então a direção $\boldsymbol{d}$ cujas componentes são dadas por:

$$d_i = \begin{cases} 0 & \text{se } x_i = a_i \text{ e } g_i \ge 0 \\ 0 & \text{se } x_i = b_i \text{ e } g_i \le 0 \\ -g_i & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Mostre que se $\nabla f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ então $\boldsymbol{d}$ é uma direção factível de descida. Ou seja, existe $\Lambda > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \Lambda]$ temos que $\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{d}$ é viável e $f(\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{d}) < f(\boldsymbol{x})$.
(b) Mostre que $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ se e somente se $\boldsymbol{x}$ satisfaz as condições de otimalidade necessárias de primeira ordem para o problema.

2

Considere o problema

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \\ \text{s. a.:} & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \ge 0, \ i = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Prove que se $\boldsymbol{x}^*$ é solução, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f_i'(x_i^*) = \alpha$ se $x_i^* > 0$ e $f_i'(x_i^*) \ge \alpha$ se $x_i^* = 0$. Interprete geometricamente.

3

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com derivada contínua. Seja $\boldsymbol{d}^*$ a solução do seguinte problema, onde $\boldsymbol{x}$ é fixo e $\boldsymbol{d}$ é a variável:

$$\begin{array}{ll} \min & \nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{d} \\ \text{s. a.:} & A\boldsymbol{d} \le 0, \quad \|\boldsymbol{d}\|_2^2 \le 1. \end{array}$$

(a) Escreva as condições necessárias de primeira ordem e utilize o resultado para provar que $\nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{d}^* \le 0$, onde $\boldsymbol{d}^*$ é a solução do problema.
(b) Mostre que se $\nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{d}^* < 0$, então $\|\boldsymbol{d}^*\| = 1$.

4

Mostre que

$$\max_{p^2+q^2\leq 1} px + qy = \sqrt{x^2+y^2}.$$

5

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e considere um problema da forma

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s. a.:} \quad & x_i \geq 0, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Prove que em um ponto ótimo $\boldsymbol{x}^*$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*) \geq 0$$

se $x_i^* = 0$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*) = 0$$

se $x_i^* > 0$.