1

Mostre que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa e diferenciável então

$$f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}).$$

Dica: Note que $\nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) = g'(0)$, onde $g(\alpha) = f\big(\boldsymbol{x} + \alpha(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\big)$, escreva o limite que define esta derivada e aplique a definição de convexidade no termo $f\big(\boldsymbol{x} + \alpha(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\big) = f\big(\alpha\boldsymbol{y} + (1-\alpha)\boldsymbol{x}\big)$.

2

Mostre que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável e vale

$$f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}),$$

então f é convexa.

Dica: Faça $\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}$ e utilize $f(\boldsymbol{v}) \geq f(\boldsymbol{z}) + \nabla f(\boldsymbol{z})^T (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{z})$ com $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}$ e depois com $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y}$. Multiplique o primeiro resultado por α, o segundo por $1 - \alpha$ e depois some as desigualdades.

3

Considere o algoritmo definido por $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k - \lambda_k \nabla f(\boldsymbol{x}^k)$, onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa e diferenciável. Mostre que vale

$$\|\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{y}\|^2 \leq \|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{y}\|^2 - 2\lambda_k\big(f(\boldsymbol{x}^k) - f(\boldsymbol{y})\big) + \lambda_k^2 \|\nabla f(\boldsymbol{x}^k)\|^2.$$

4

Prove que todo minimizador local de uma função convexa é também um minimizador global.

5

Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita *estritamente convexa* quando satisfaz:

$$f\big(\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}\big) < \alpha f(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{y})$$

para todo $\alpha \in (0, 1)$.

Prove que uma função estritamente convexa não pode possuir mais de um minimizador.

6

Mostre que a intersecção de dois conjuntos convexos é um conjunto convexo.

7

Suponha que $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções convexas. Mostre que $f(\boldsymbol{x}) = \max\{f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})\}$ é convexa. Qual é a relação deste resultado com o da questão anterior?

8

Seja $\|\cdot\|$ uma norma qualquer em $\mathbb{R}^n$, mostre que $f(\boldsymbol{x}) := \|\boldsymbol{x}\|$ é convexa.

9

Definimos o *subdiferencial* de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa no ponto $\boldsymbol{x}$ como

$$\partial f(\boldsymbol{x}) := \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v}^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\}.$$

O subdiferencial de uma função convexa nunca é vazio no interior de seu domínio e seus elementos, chamados de *subgradientes*, apesar de não resultem direções de descida, podem substituir o gradiente em algoritmos de otimização. Nos pontos $\boldsymbol{x}$ onde f é diferenciável, seu subdiferencial possui um único elemento: $\nabla f(\boldsymbol{x})$

Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. Encontre $\partial f(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

10

Dizemos que um conjunto C é convexo quando, para quaisquer $\boldsymbol{x} \in C$, $\boldsymbol{y} \in C$ e $\alpha \in [0, 1]$, temos $\alpha\boldsymbol{x} + (1 - \alpha)\boldsymbol{y} \in C$. Quais dos seguintes conjuntos são convexos e quais não são? Prove.

1. $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \geq 3\}$;
2. $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 \leq 1,\ x_1 - 2x_3 \geq 2\}$;
3. $\{(x_1, x_2) : x_2 - 3x_1^2 = 0\}$;
4. $\{(x_1, x_2, x_3) : x_2 \geq x_1^2,\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4\}$;
5. $\{(x_1, x_2) : x_1 = 3,\ |x_2| \leq 4\}$;
6. $\{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = |x_2|,\ x_1 \geq 3\}$.

11

Resolva os seguintes exercícios do livro da Ana Friedlander: 6.8, 6.9, 6.12 e 6.13.