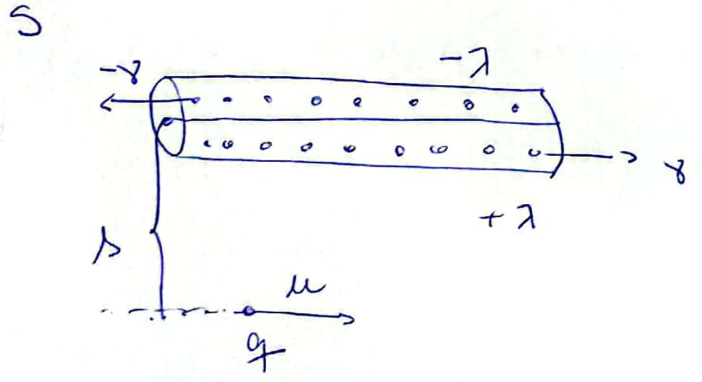
29/11/2023

Transformação do campo eletromagnético

Após a correção da mecânica newtoniana, podemos reformular a eletrodinâmica para o caso mais geral: o relativístico.

Supondo que temos um fio e nele caminham cargas positivas de velocidade v. As cargas estão tão próximas que podem ser consideradas uma linha de carga λ. Superposta a ela temos uma "corrente" negativa, $-\lambda$, se movendo ~~pe~~ no sentido contrário com velocidade $-v$.

A corrente da parte positiva pode ser escrita como: $I = 2\lambda v$.

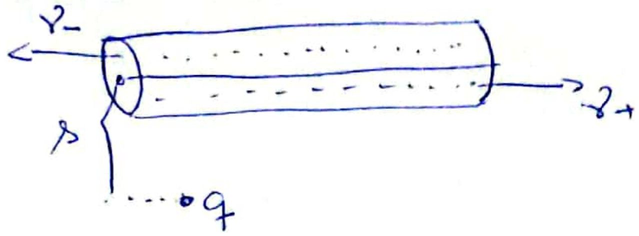


A uma certa distância s há uma carga q se movendo para a direita com velocidade $u < v$. Não há força elétrica agindo sobre q pois $-\lambda$ e $+\lambda$ se cancelam.

Agora vamos analisar a mesma situação de um sistema $\bar{S}$ que se move p/ a direita com velocidade u. Neste referencial a carga q está em repouso.

Pela lei de adição de velocidades:

$$v_\pm = \frac{v \mp u}{1 \mp vu/c^2}$$



Neste caso $v_- > v_+$ pois a contração do espaço entre as cargas negativas é maior do que nas cargas positivas. Então o fio carrega uma carga geral negativa.

$$\lambda_\pm = \pm(\gamma_\pm)\lambda_0 \quad , \quad \gamma_\pm = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_\pm^2}{c^2}}}$$

λ_0 é a densidade de cargas no próprio sistema inercial $(+\lambda)$

Como em S elas se movem com velocidade v: $\lambda = \gamma\lambda_0$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Substituindo $v_\pm$ em $\gamma_\pm$:

$$\gamma_\pm = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(v \mp u)^2\left(1 \mp \frac{vu}{c^2}\right)^{-2}}} = \frac{c^2 \mp uv}{\sqrt{(c^2 \mp uv)^2 - c^2(v \mp u)^2}}$$

$$= \frac{c^2 \mp uv}{\sqrt{(c^2 - v^2)(c^2 - u^2)}} = \gamma \cdot \frac{1 \mp uv/c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Então a densidade de cargas em $\bar{S}$ é:

$$\lambda_{tot} = \lambda_+ + \lambda_- = \lambda_0(\gamma_+ - \gamma_-) = \frac{-2\lambda u v}{c^2\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Conclusão: como resultado da contração diferente entre as linhas positivas e negativas, o fio que é eletricamente neutro no sistema inercial, será carregado no referencial que se move.

Então λ_{tot} causa um campo elétrico: $E = \dfrac{\lambda_{tot}}{2\pi \varepsilon_0 s}$

Então há uma força agindo em q no referencial $\bar{S}$:

$$\bar{F} = qE = \frac{-\lambda v}{\pi \varepsilon_0 c^2 s} \cdot \frac{qu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Se há uma força em $\bar{S}$ que age sobre q, então deve haver uma força em S por T.L para forças. Como q está em repouso em $\bar{S}$ e $\bar{F}$ é perpendicular a ~~u~~, a força em S será:

$$\vec{F}_\perp = \frac{1}{\gamma} \vec{\bar{F}}_\perp \Rightarrow F = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\, \bar{F} = \frac{-\lambda v}{\pi \varepsilon_0 c^2} \frac{qu}{s}$$

A carga é atraída para o fio por uma força puramente elétrica em $\bar{S}$, mas em S ela é de natureza magnética.

Podemos expressar F de forma mais familiar usando $c^2 = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1}$ e expressando λv em termos de corrente:

$$F = -qu \underbrace{\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s} \right)}$$

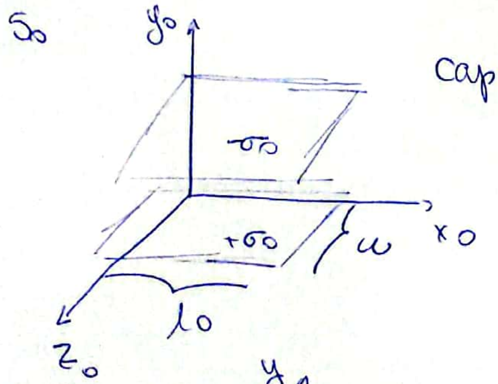
$\Rightarrow$ campo magnético gerado por um fio muito longo.

O resultado é semelhante usando a lei de força de Lorentz no sistema S.

Agora veremos como o campo se transforma. Temos que ter em mente duas coisas:

- A carga é invariante!!!
- As leis de transformação são as mesmas, não importa como os campos são gerados.

Num capacitor de placas paralelas:

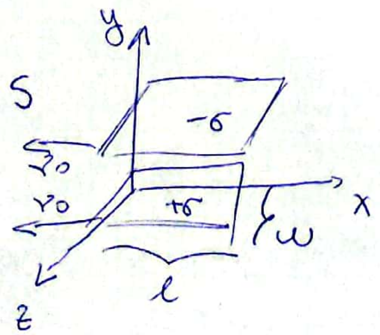


Capacitor em repouso.

Na região entre as placas:

$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\hat{y}.$$

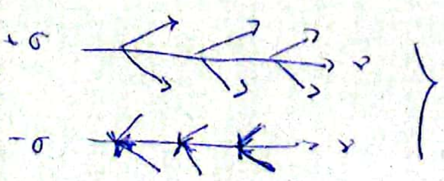
E se:



S se move p/ a direita e o capacitor "se move" p/ a esquerda.

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{y}.$$

Mesmo em movimento, o campo entre as placas continua sendo perpendicular. O campo na placa é tal que:



componentes paralelas se anulam, mantendo $\vec{E}$ sempre perpendicular.

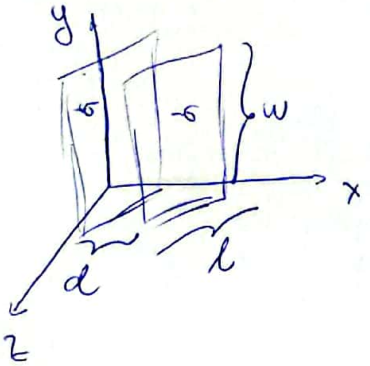
A carga de cada placa é invariante e w não se modifica ($\perp$ a v), mas l é contraído pelo fator: $\frac{1}{\gamma_0} = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}$

Então a carga por unidade de área vai ser aumentada por γ_0:

$$\sigma = \gamma_0 \sigma_0 \quad e \quad \vec{E}_\perp = \gamma_0 \vec{E}_{0\perp}.$$

E para as componentes paralelas?

S



nesse caso l e w permanecem inalterados, d irá contrair de acordo com Lorentz.

O campo não depende de d, então:

$$E^{\parallel} = E_0^{\parallel}$$

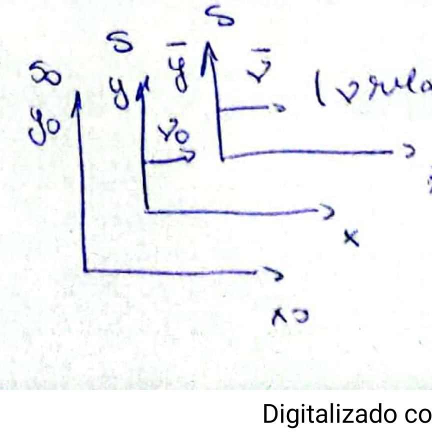
$E^\perp$ e $E^\parallel$ não são as expressões mais gerais de transformação.

Precisamos começar num sistema com campos elétricos e magnéticos.

Ainda no exemplo do capacitor "se movendo" em relação a S com campo elétrico: $E_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, temos um campo magnético devido à correntes de superfície ($\vec{K}_\pm = \mp \sigma v_0 \hat{x}$)

Pela regra da mão direita, $\vec{B}$ tem sentido $-z$ e a magnitude é dada pela lei de Ampère: $B_z = -\mu_0 \sigma v_0$.

Neste exemplo temos três referenciais:



S_0 inercial

S se move c/ v_0 em rel. a S_0

$\bar{S}$ se move c/ $\bar{v}$ em rel. a S_0 e c/ v em rel a S.

No sistema $\bar{S}$: $\bar{E}_y = \frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon_0}$, $\bar{B}_z = -\mu_0 \bar{\sigma} \bar{v}$

Escrevemos: $\bar{v} = \frac{v + v_0}{1 + v v_0/c^2}$, $\bar{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{v}^2/c^2}}$ e $\bar{\sigma} = \bar{\gamma} \sigma_0$

Usando $\sigma = \gamma_0 \sigma_0$ e $\bar{\sigma} = \bar{\gamma} \sigma_0$:

$$\bar{E}_y = \left(\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0}\right) \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad , \quad \bar{B}_z = -\left(\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0}\right) \mu_0 \sigma \bar{v}$$

Então:

$$\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0} = \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{\sqrt{1 - \bar{v}^2/c^2}} = \frac{1 + v v_0/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right) \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Então: $\bar{E}_y = \gamma \left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right) \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \gamma \left(E_y - \frac{v}{c^2 \varepsilon_0 \mu_0} B_z\right)$

e

$$\bar{B}_z = -\gamma \left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right) \mu_0 \sigma \left(\frac{v + v_0}{1 + v v_0/c^2}\right) = \gamma \left(B_z - \mu_0 \varepsilon_0 v E_y\right)$$

Como $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$:

$$\begin{cases} \bar{E}_y = \gamma (E_y - v B_z) \\ \bar{B}_z = \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y\right) \end{cases}$$

Os campos em S são: $E_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, $B_y = \mu_0 \sigma v_0$

(alinhando o capacitor paralelo a xy).

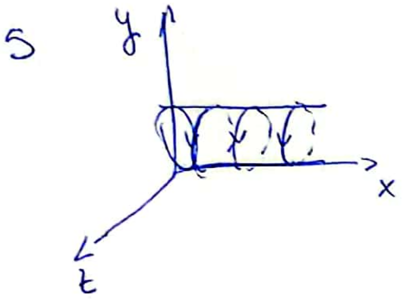
Da mesma forma escrevemos:

$$\begin{cases} \bar{E}_z = \gamma (E_z + v B_y) \\ \bar{B}_y = \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z\right) \end{cases}$$

Orientando o capacitor paralelo ao plano yz : $\bar{E}_x = E_x$

Neste caso, não podemos deduzir a transformação para B_x pois não há campo magnético.

Para descobrir como B_x se transforma, vamos imaginar um solenoide longo em repouso no referencial S:



campo magnético dentro do solenoide:

$$B_x = \mu_0 n I$$

n = espiras por comprimento.

No sistema $\bar{S}$: $\bar{n} = \gamma n$ (contração do espaço)

Dilatação do tempo: $\bar{I} = \frac{1}{\gamma} I$

Então $\bar{B}_x = B_x$

Juntando todas as regras de transformação:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \bar{E}_x = E_x , & \bar{E}_y = \gamma(E_y - vB_z) , & \bar{E}_z = \gamma(E_z + vB_y) \\ \bar{B}_x = B_x , & \bar{B}_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) , & \bar{B}_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \end{array}}$$

Temos dois casos especiais:

1) Se $\vec{B} = 0$ em S: $\vec{\bar{B}} = \gamma \frac{v}{c^2}(E_z \hat{y} - E_y \hat{z}) = \frac{v}{c^2}(\bar{E}_z \hat{y} - \bar{E}_y \hat{z})$

e como $\vec{v} = v\hat{x}$

$$\boxed{\vec{\bar{B}} = -\frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{\bar{E}})}$$

2) Se $\vec{E}=0$ ums:

$$\vec{E} = -\gamma\,\gamma(B_z\hat{y} - B_y\hat{z}) = -\gamma(\bar{B}_z\hat{y} - \bar{B}_y\hat{z})$$

ou $\boxed{\vec{E} = \vec{\gamma}\times\vec{B}}$