

7600018 - Mecânica Clássica (2023)

Dinâmica Hamiltoniana

Texto baseado no Cap. 7 do Marion [1] (Seções 7.8 a 7.13) e partes do Cap. 12 do Kibble [2]. Nossa intenção é introduzir a base da dinâmica hamiltoniana, a qual representa uma continuação natural dos conceitos que vimos em nosso estudo do formalismo lagrangiano. A formulação hamiltoniana, que substitui as grandezas \dot{q}_j pelos momentos generalizados p_j , é bastante semelhante à lagrangiana, sendo obtida de maneira simples a partir dela. Ambas apresentam a mesma generalidade e elegância mas, como veremos, a formulação hamiltoniana adequa-se melhor ao aprofundamento do estudo de sistemas dinâmicos, por ser mais simétrica—ao considerar as variáveis q_j e p_j em pé de igualdade, diferentemente de q_j e \dot{q}_j no caso lagrangiano— e também por facilitar a descrição em termos de grandezas conservadas. Na Seção 1 apresentamos o formalismo hamiltoniano, fazendo a conexão com a formulação lagrangiana e deduzindo as Equações de Hamilton. Em seguida, discutimos as principais propriedades associadas à dinâmica hamiltoniana e apresentamos alguns exemplos de sua aplicação. Os tópicos nas Seções 2, 3 e 4 abaixo são complementares e visam a preparação para aplicações mais avançadas.

1 Equações de Hamilton

Vamos relembrar a definição de *momento generalizado* p_j associado à coordenada generalizada q_j

$$p_j \equiv \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad (1)$$

onde K é a energia cinética, V a energia potencial, e $L = K - V$ é a lagrangiana do sistema. Na última passagem acima, supusemos que a energia potencial não depende de \dot{q}_j .¹ Portanto,

¹Isso é geralmente verdade para as coordenadas cartesianas, já que tomamos $V = V(\mathbf{x})$, e vale também para as coordenadas generalizadas, pois consideramos relações $x_i(q_j, t)$ entre os dois tipos de coordenadas.

podemos escrever a Eq. de Lagrange para a coordenada q_j simplesmente como

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad (2)$$

certo?

A seguir, vamos “eliminar” as ocorrências de \dot{q}_j em favor de p_j e vamos substituir, em nossa descrição do movimento do sistema, o funcional L por

$$H(q_j, p_j, t) \equiv \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j, t), \quad (3)$$

a *hamiltoniana*. Naturalmente, vamos precisar de $\dot{q}_j(q_j, p_j, t)$ no lado direito da expressão acima, para que a eliminação realmente aconteça. Vamos também querer entender melhor a forma escolhida para a hamiltoniana, né! Nesse sentido, dependendo de sua preferência, a motivação para a escolha da forma de H acima pode ser de dois tipos: A) Física ou B) Matemática. Vamos discutir esses dois aspectos mais abaixo. Antes, porém, vamos ver como ficam as equações de movimento determinadas a partir de H .

Podemos escrever a diferencial total de H de duas maneiras, de forma genérica (em termos de suas variáveis “naturais” q_j , p_j e t), ou a partir de (3). Temos então

$$dH = \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

e também

$$dH = \sum_j \left(\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_j (\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

onde usamos, na última passagem, as Eqs. (1) e (2). Igualando os termos de derivadas parciais correspondentes a dq_j , dp_j ² temos as **Equações de Hamilton**

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \text{e} \quad -\dot{p}_j = \frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad (4)$$

que constituem as equações de movimento para q_j e p_j . Ou seja, a partir da hamiltoniana $H(q_j, p_j, t)$, são obtidas —para cada grau de liberdade j — duas equações, respectivamente

²Pois a decomposição de dH em tais termos é única. A identificação dos termos multiplicando dt também vale, e será mencionada mais abaixo.

para determinação de $q_j(t)$ e de $p_j(t)$. Note que agora, diferentemente das Eqs. de Lagrange ou da segunda lei de Newton, teremos duas equações de movimento para cada grau q_j , em vez de uma só. Porém são equações diferenciais de primeira ordem, não de segunda ordem, como nos casos anteriores.

A “receita” para solução de um problema pelo formalismo hamiltoniano, portanto, é dada pelos seguintes passos.

1. Escrever a lagrangiana do sistema, como vínhamos fazendo.
2. Obter $\dot{q}_j(q_j, p_j, t)$ usando a Eq. (1). (Ou seja, inverter a definição de p_j , resolvendo para \dot{q}_j em termos de q_j, p_j, t .)
3. Escrever $H(q_j, p_j, t)$ a partir de $L(q_j, \dot{q}_j, t)$, usando (3) e a expressão obtida acima para \dot{q}_j , para ter a hamiltoniana já em termos das variáveis q_j e p_j .
4. Tendo agora o funcional H em termos das grandezas adequadas, basta resolver as Eqs. (4) para descrição do movimento, i.e. para encontrar $q_j(t)$.

Qual a vantagem? bom, como dá para ver pelas equações em (4), também chamadas de *equações canônicas*, a descrição em termos de q_j e p_j é bem mais simétrica. Isso possibilita estudos mais gerais do espaço de possíveis trajetórias, ao tomarmos o chamado *espaço de fase*, em que a dinâmica do problema é representada em um diagrama com dois eixos para cada grau de liberdade, q_j e p_j . Como veremos mais adiante, essa representação das trajetórias é mais adequada, do ponto de vista da dinâmica do sistema, do que considerar apenas as componentes $q_j(t)$, ou o chamado *espaço de configurações*, como fizemos no formalismo lagrangiano. As grandezas q_j e p_j são chamadas de *variáveis canonicamente conjugadas*.

Ok sobre a representação das coordenadas e simetria entre elas, mas teremos o dobro das equações de movimento,³ isso não é ruim? Não necessariamente, pois as coordenadas p_j são frequentemente grandezas com maior significado físico do que as velocidades generalizadas \dot{q}_j —como o momento angular (visto anteriormente)— e frequentemente teremos o caso de equação de movimento $\dot{p}_j = 0$, o que simplifica a descrição do problema. Nesse caso, os

³Como já dito, as equações serão todas de primeira ordem, envolvendo uma constante de integração cada, enquanto no caso lagrangiano tínhamos duas constantes para determinação de $q_j(t)$. Vemos portanto que o número de constantes de integração a serem determinadas pelas condições iniciais se mantém.

p_j serão então grandezas conservadas, o que implica que sua coordenada associada q_j pode ser *ignorada* para descrição do movimento. De fato, se a coordenada q_j não participa da hamiltoniana, é como se o sistema tivesse uma dimensão a menos, as outras coordenadas serão determinadas por suas equações de movimento, cujas soluções tipicamente vão conter a constante p_j , mas q_j não aparece. Dizemos então que q_j é uma coordenada *cíclica*, e o momento p_j associado a ela é uma *constante do movimento*. Foi isso, essencialmente, o que fizemos em nosso estudo de forças centrais!⁴

1.1 Discussão

Note que, da mesma forma com que obtivemos as Eqs. de Hamilton acima, vale a relação

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dH}{dt}, \quad (5)$$

onde igualamos os termos de dH correspondentes a derivadas parciais em t , como fizemos para q_j e p_j . O último passo vem de dividir por dt a segunda expressão para dH mais acima. Como, tipicamente, a lagrangiana L não depende explicitamente do tempo t , vemos que H também não o será. Além disso, a hamiltoniana será “conservada”, i.e. teremos $dH/dt = 0$. Mas o que é a hamiltoniana, fisicamente? Bem, se pensarmos na forma geral que a energia cinética K pode assumir para coordenadas generalizadas q_j relacionadas às coordenadas cartesianas por $x_i(q_j, t)$, teremos uma expressão bastante complexa, envolvendo o tempo além das coordenadas q_j e das velocidades generalizadas \dot{q}_j . **Você consegue** escrever essa expressão? **Dica:** comece substituindo \dot{x}_i , obtida pela regra da cadeia, na expressão usual para K e identificando os coeficientes dos termos em \dot{q}_j , como abaixo. Em particular, em termos das velocidades \dot{q}_j temos

$$K = \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_j b_j \dot{q}_j + c,$$

onde os “coeficientes” a , b , c dependem do tempo e das coordenadas q_j , mas não de \dot{q}_j . Caso $x_i(q_j, t)$ não dependa explicitamente do tempo, teremos $b_j = c = 0$ (**verifique!**) e portanto vale

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = 2 \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = 2K,$$

⁴Vimos que a grandeza p_θ , que é o momento angular, era constante, e assim a variável θ foi ignorada, já que “traduzimos” o problema como um movimento unidimensional, na coordenada r .

como pode ser verificado de maneira simples, notando que ao derivar K em relação a um dado \dot{q}_j serão obtidas duas contribuições equivalentes, fornecendo o fator 2 acima. Agora supondo —como já feito acima— que a energia potencial V dependa apenas das coordenadas q_j e não de \dot{q}_j , podemos substituir K pela lagrangiana L na derivada parcial em relação a \dot{q}_j acima, de forma que ela corresponda à coordenada $p_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$, o momento generalizado.⁵ A partir da Eq. (3), temos, então

$$H = \sum p_j \dot{q}_j - L = 2K - K + V = K + V = E,$$

ou seja: a hamiltoniana H é a energia! Além disso, dado que supusemos $x_i(q_j)$ sem dependência explícita de t , sabemos que K não depende explicitamente do tempo. Dessa forma, considerando a Eq. (5), teremos que a energia será constante se V também não depender de t explicitamente, certo?

Resumindo, a hamiltoniana H representa a energia, se supusermos: i) uma relação da forma $x_i(q_j)$ entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas generalizadas q_j e ii) que a energia potencial V não dependa das velocidades generalizadas \dot{q}_j . Se, além dessas duas suposições, tivermos que V não depende explicitamente do tempo, a energia do sistema será conservada. Essa pode ser vista como a principal motivação *física* para preferir a descrição em termos da hamiltoniana em vez da lagrangiana. Naturalmente, se valerem as suposições i) e ii) mas V depender do tempo, H será a energia mas ela não será conservada e, se V depender de \dot{q}_j e/ou x_i depender de t , a hamiltoniana (conservada ou não!) não corresponderá à energia.

Outra motivação física, já mencionada acima, é a vantagem de trabalhar explicitamente com os momentos generalizados p_j , os quais vão frequentemente corresponder a grandezas conservadas no movimento. Vejamos a verificação dessa afirmação, utilizando o formalismo lagrangiano, em dois casos. Primeiramente, vamos argumentar que, para um sistema isolado (em que não agem forças externas), o momento linear será conservado. Isso você já sabe, pela mecânica newtoniana, mas agora vamos obter esse resultado diretamente da exigência de que a física não deva se alterar quando fazemos uma translação global do sistema, ou

⁵Na verdade, essa suposição nem seria necessária considerando nossa definição original de p_j em (1), mas ela será válida para nós em geral, pois vamos trabalhar com potenciais independentes das velocidades generalizadas.

seja, quando consideramos uma variação $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}^*$ da trajetória física, para $\delta\mathbf{x}^*$ fixo qualquer.⁶ Considere a variação de L —que, como sabemos,⁷ deve ser nula— para a variação de cada coordenada cartesiana por um δx_i fixo, i.e. uma variação *constante*, independente de t . Teremos agora que levar em conta apenas as variações δx_i para a variação δL do funcional $L(x_i, \dot{x}_i, t)$, já que $\delta \dot{x}_i = d(\delta x_i)/dt$ será nula para variação $\delta x_i = \delta x_i^*$ constante. Temos, assim

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i^* = 0,$$

o que só pode ser satisfeito para δx_i^* qualquer se tivermos $\partial L/\partial x_i$ nulo para todo i . Mas isso equivale, pela Eq. (2), à conservação do momento linear p_i associado a cada coordenada x_i . Obtivemos, então, o resultado esperado, como consequência da invariância translacional das leis do movimento, sem precisar considerar grandezas vetoriais como no caso newtoniano.

Analogamente, vamos obter a conservação do momento angular para um sistema sem torque externo, impondo invariância por uma rotação global da trajetória. Mais especificamente, tomemos um deslocamento $\delta\theta$ (fixo) da trajetória $\mathbf{r}(t)$ ao redor de um certo eixo $\hat{\mathbf{n}}$. Podemos representar (ver Fig. 7-8 do Marion) a variação correspondente como $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \delta\theta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}$, onde supusemos uma rotação infinitesimal, por conveniência. (Naturalmente, o resultado valerá para também para uma rotação qualquer ao redor de $\hat{\mathbf{n}}$, que sempre pode ser pensada como uma sequência de rotações infinitesimais.) Em termos das coordenadas cartesianas, temos

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = \sum_i \dot{p}_i \delta x_i + \sum_i p_i \delta \dot{x}_i = 0,$$

onde utilizamos as Eqs. (1) e (2) na última passagem. Relacionando agora o resultado acima (na forma vetorial) à variação $\delta\mathbf{r} = \delta\theta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}$ para a rotação constante ao redor de $\hat{\mathbf{n}}$, vamos obter

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{p} \cdot \delta\dot{\mathbf{r}} = \delta\theta [\dot{\mathbf{p}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}) + \mathbf{p} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \dot{\mathbf{r}})] = \delta\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}) = 0,$$

⁶Aqui devemos tomar a variação também para as condições iniciais e finais, por consistência, então a discussão da variação na lagrangiana é ligeiramente diferente do caso com extremidades fixas, mas será ainda mais simples, pois tomamos $\delta\mathbf{x}^*$ como uma variação constante.

⁷Note que a condição $\delta L = 0$ segue da condição $\delta(\int L dt) = 0$, que tínhamos originalmente. No caso geral, é conveniente considerar a condição original, para podermos agrupar os termos em δq_j do integrando, através da integral por partes.

onde usamos a propriedade cíclica do produto misto e o fato de que $\delta\theta$ e $\hat{\mathbf{n}}$ são constantes. Finalmente, como $\delta\theta$ é qualquer (mesmo sendo infinitesimal), temos que o produto escalar acima deve ser nulo. Além disso, vemos que a soma entre parênteses é a derivada temporal de $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$, ou seja, do momento angular \mathbf{L} . Concluimos, então, que $d\mathbf{L}/dt$ deve ser nulo ou, se não, deve ser nula a componente de sua derivada paralela ao eixo de simetria \mathbf{n} . (Ou seja, a respectiva componente de \mathbf{L} será constante.) Para um sistema sem torque externo, não há a priori um eixo privilegiado, portanto a condição deve valer para qualquer eixo $\hat{\mathbf{n}}$, implicando a conservação do momento angular. Como vimos anteriormente, a componente do momento angular associada a uma coordenada angular θ é dada pelo momento generalizado p_θ . Se não houver torque externo (e.g. para sistema isolado), teremos portanto a conservação das três componentes do momento angular \mathbf{L} . Do contrário, na presença de um campo de força que determine um eixo de simetria, teremos conservação da componente do momento angular associada à rotação ao redor desse eixo.

Em nossa discussão acima, apesar de termos usado a linguagem lagrangiana, demonstramos a importância física da consideração dos momentos generalizados p_j , que fazem parte do formalismo hamiltoniano. Além disso, observamos que a invariância temporal —ou seja, o fato de que a lagrangiana (e, por consequência, também a hamiltoniana) não dependa explicitamente do tempo— implica a conservação da hamiltoniana, segundo a Eq. (5). Como vimos, isso significa, em condições gerais, que a energia será conservada. Esses argumentos são casos específicos do Teorema de Noether, que associa simetrias a leis de conservação. Na Seção 4 vamos discutir um pouco mais sobre esse tópico, mas como “resumo”, temos as seguintes associações entre invariâncias sob alteração de uma coordenada (por uma constante) e grandezas conservadas.

$$t \rightarrow E, \quad \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{p}, \quad \theta \rightarrow p_\theta.$$

No último caso, para um sistema isolado, teremos invariância por rotação em relação a três eixos independentes, portanto serão três componentes conservadas do momento angular. Ao todo, então, um sistema isolado possui sete constantes do movimento.

Quanto à motivação matemática, como já mencionamos, a análise usando a hamiltoniana será mais simples, pois suas variáveis “conjugadas” q_j e p_j serão tratadas como independentes, ao contrário do que tínhamos para q_j e \dot{q}_j para a lagrangiana. Em particular, reescrevendo

o princípio de Hamilton para a lagrangiana em termos da hamiltoniana, temos

$$\delta \int L dt = \delta \int \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - H \right) dt = 0.$$

Tomando variações das funções $q_j(t)$, $\dot{q}_j(t)$ e $p_j(t)$, a variação acima pode ser escrita como

$$\int \sum_j \left(p_j \delta \dot{q}_j + \dot{q}_j \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right) dt = 0.$$

Lembrando que $\delta \dot{q}_j = d(\delta q_j)/dt$, podemos fazer uma integral por partes para o primeiro termo entre parênteses acima e obter (**verifique!**)

$$\int \sum_j \left[\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j - \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right] dt = 0.$$

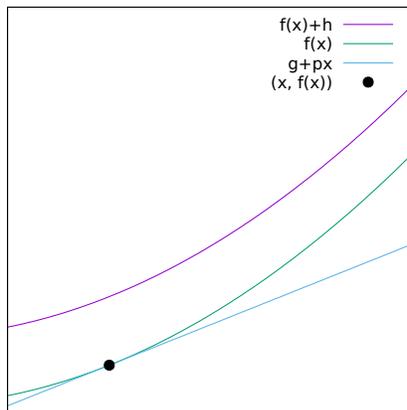
Vemos, então, que a obtenção das Equações de Hamilton (4) corresponde a tratar as variáveis q_j e p_j como se fossem independentes. De fato, ao igualar a zero ambas as expressões entre parênteses acima, estamos supondo variações δq_j e δp_j independentes, e assim os fatores pelos quais elas estão multiplicadas devem se anular separadamente para que a integral seja nula. É claro que q_j e p_j não são de fato independentes, já que, pelas Eqs. (4), podemos derivar H em relação a q_j para obter \dot{p}_j , que pode ser integrada fornecendo p_j , e analogamente para \dot{q}_j . O que temos é uma independência para fins práticos, que será conveniente para análise do problema, e que será removida mais adiante, quando serão usadas as equações de movimento, as Eqs. (4).⁸

Como motivação matemática adicional, veja que o procedimento que seguimos para eliminar a variável \dot{q}_j , presente na lagrangiana L , em favor do momento generalizado $p_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$, pode ser visualizado geometricamente, como descrito a seguir.

Suponha que tenhamos uma dada função $f(x)$ e queiramos substituir a variável x por $p = df(x)/dx$, i.e. a inclinação da reta tangente à função f no ponto x . Em princípio, basta especificar p (associado a um ponto x) e podemos reconstruir a curva $f(x)$, mas surge um problema: a “função” $f(p)$ —i.e. a associação de um valor f à inclinação p no ponto x — não contém a mesma informação que $f(x)$, já que a mesma inclinação p (associada a x) poderia

⁸Note que já tivemos uma situação análoga, na formulação lagrangiana, quando introduzimos os multiplicadores de Lagrange para consideração de vínculos entre as variáveis do sistema.

corresponder tanto ao valor da função $f(x)$ quanto a qualquer outra função $f(x) + \text{const.}$ que possua a mesma derivada no ponto x . Como podemos então substituir x por p e ainda manter a correspondência com a função f ?



Pelo gráfico, podemos ver que para cada inclinação p (correspondente a um x) será possível especificar $f(x)$ se tivermos acesso ao valor g da intersecção da reta tangente à curva f no ponto x com o eixo vertical. Como a equação dessa reta é $f(x) = g + px$, basta considerar a função $g(p)$ para “reconstruir” $f(x)$ a partir da variável p . Mas, veja só: esse é o mesmo procedimento que usamos para converter $L(\dot{q})$ em $H(p)$, já que $p = \partial L / \partial \dot{q}$, e a nova função tem o mesmo papel da intersecção g com a vertical! De fato, temos $g(p) = f(x) - px$, enquanto $H(p) = p\dot{q} - L$. Basta identificar x com \dot{q} , f com L e g com $-H$.

Vemos, então, que se quisermos “trocar” uma variável em uma dada função pela variável que corresponde à derivada da função em relação a ela, devemos redefinir a função, i.e. é preciso “trocar” também de função, como fizemos acima, para não perder parte da informação original contida na função. Essa transformação tem aplicações gerais (por exemplo, em termodinâmica) e se chama *Transformada de Legendre*.

1.2 Exemplos

Partícula na superfície de cilindro. Considere uma partícula de massa m restrita a se mover na superfície de um cilindro de raio R orientado ao longo do eixo z e sujeita a uma força $-kr$ (ver Fig. 7-9 do Marion). Obtenha as equações de movimento no formalismo hamiltoniano, seguindo a “receita” dada anteriormente.

Vamos utilizar coordenadas cilíndricas ρ , θ e z . Assim, a energia potencial é dada por $V = kr^2/2 = k(\rho^2 + z^2)/2$, e a cinética por $K = m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)/2$. Notando agora que ρ será constante e igual a R , temos a lagrangiana

$$L = \frac{m}{2} (R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{k}{2} (R^2 + z^2) .$$

De acordo com a Eq. (1), os momentos relativos às coordenadas θ e z são $p_\theta = mR^2\dot{\theta}$ e $p_z = m\dot{z}$, resultando na hamiltoniana

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{kz^2}{2} ,$$

onde escrevemos $\dot{\theta}$ e \dot{z} em termos dos momentos nas expressões para K e V , e descartamos a constante $kR^2/2$. (Aqui podemos usar diretamente que $H = K + V$.) Vamos agora escrever as Eqs. de Hamilton (4). Note que não necessitamos das equações para $\dot{\theta}$ e \dot{z} , pois elas serão equivalentes às expressões para p_θ e p_z acima. Temos, então

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 ,$$

ou seja, p_θ constante, o que já era esperado, pois $p_\theta = mR^2\dot{\theta}$ é a componente do momento angular ao redor de z , que é o eixo de simetria do problema. A evolução de θ é, portanto, trivial, rotação com velocidade angular $\dot{\theta} = p_\theta/mR^2$ constante, determinada pelas condições iniciais. Para z , temos

$$\dot{p}_z = m\ddot{z} = -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz .$$

A evolução para a coordenada z é, então, um movimento harmônico simples, com frequência angular $\sqrt{k/m}$.

Pêndulo esférico. Considere um pêndulo dado por um corpo de massa m suspenso por um fio de comprimento b , sendo θ o ângulo com a vertical e ϕ o ângulo associado à rotação ao redor do eixo z . Vamos tomar as coordenadas generalizadas θ e ϕ , de forma que podemos escrever (ver Fig. 7-10 do Marion) $z = b \cos \theta$ e $v^2 = (b\dot{\theta})^2 + (b \sin \theta \dot{\phi})^2$, supondo que o fio permaneça estendido. A lagrangiana será, então

$$L = \frac{mb^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + mgb \cos \theta .$$

Os momentos generalizados são

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mb^2\dot{\theta} \quad \text{e} \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mb^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} , \quad (6)$$

correspondendo, respectivamente, à componente do momento angular ao redor do eixo perpendicular à página e ao eixo z . Substituindo as velocidades generalizadas $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$ pelos momentos acima, temos a hamiltoniana

$$H = \frac{p_{\theta}^2}{2mb^2} + \frac{p_{\phi}^2}{2mb^2 \sin^2 \theta} - mgb \cos \theta.$$

Vamos escrever as Eqs. de Hamilton, notando que as equações para $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$ são equivalentes a (6), e que a variável ϕ é cíclica, ou seja, não aparece na hamiltoniana. Temos então $\dot{p}_{\phi} = -\partial H/\partial \phi = 0$, o que implica que o momento p_{ϕ} é conservado,⁹ e portanto a evolução da coordenada ϕ será dada trivialmente pela Eq. (6) em termos de θ e das condições iniciais do problema. (Tipicamente, portanto, essa coordenada pode ser ignorada.) Quanto à coordenada θ , temos

$$\dot{p}_{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_{\phi}^2}{mb^2} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} - mgb \sin \theta.$$

Usando (6), vemos que o lado esquerdo acima é igual a $mb^2\ddot{\theta}$, e portanto a equação para $\theta(t)$ não é trivial. No caso $p_{\phi} = 0$ (i.e., para condição inicial sem movimento ao redor do eixo z) teremos a equação usual para o pêndulo: $\ddot{\theta} = -gb \sin \theta$.

2 Teorema de Liouville

Quando tratamos as coordenadas q e p como “independentes”, como fizemos aqui no formalismo hamiltoniano, será conveniente representar a evolução do sistema em um gráfico com dois eixos para cada grau de liberdade, o diagrama no espaço de fase, já mencionado acima. Por exemplo, para o oscilador harmônico unidimensional, com $q = x$ e $p = m\dot{x}$, o movimento será representado por uma elipse, pois $E = K + V = p^2/2m + kx^2/2$. Cada valor para a energia (fixa) total E determina uma elipse mais externa ou mais interna, mas são “órbitas” fechadas, e elas não se cruzam. Para casos mais gerais como o pêndulo, que apresenta um regime de movimento harmônico simples apenas para pequenos, o diagrama corresponde a figuras bem mais complicadas (e interessantes!) devido ao comportamento não linear entre \dot{p} e q .

⁹Como já esperávamos, pois o eixo z é um eixo de simetria do problema. Porém, é interessante que pelo formalismo hamiltoniano essa conclusão apareça de forma “automática”.

O estudo da dinâmica de sistemas a partir da evolução de suas órbitas no espaço de fase —envolvendo análise de estabilidade, presença de turbulência ou caos, seja para a dinâmica hamiltoniana que para mapeamentos do tipo $x_{n+1} = f(x_n)$ (em que o eixo vertical representa x_{n+1} , em vez de p) com aplicações bastante amplas— é uma área fascinante da mecânica clássica. Tipicamente, tais sistemas não admitem solução de forma fechada, e são tratados computacionalmente, ou estudados por outros aspectos qualitativos além da evolução $x(t)$. Você pode encontrar material nesse tema no Cap. 4 do Marion, ou nos Caps. 13 e 14 do Kibble. Aqui vamos apenas tratar de um resultado relacionado, o Teorema de Liouville (ver, e.g., a Seção 7.12 do Marion).

Considere o diagrama no espaço de fase para o exemplo da partícula na superfície de um cilindro, tratado acima. Teremos quatro eixos θ, p_θ, z, p_z , o que torna difícil a visualização, mas podemos ignorar o eixo p_θ , que corresponde a uma constante do movimento. Podemos também notar que o diagrama no plano z - p_z será uma elipse, já que a coordenada $z(t)$ exhibe movimento harmônico simples. Representando o diagrama com o eixo θ na horizontal teremos, então, uma hélice elipsoidal, já que o movimento no eixo θ é uniforme¹⁰ enquanto a projeção no plano perpendicular à horizontal será uma elipse (ver Fig. 7-11 do Marion). Dependendo das condições iniciais $q_j(0), p_j(0)$ esse sistema, ou outro idêntico a ele, irá descrever uma hélice nesse espaço de fase, o que corresponde a infinitas hélices possíveis, sem que elas se interceptem!¹¹ Em geral, podemos considerar que há uma *densidade* ρ de pontos no espaço de fase de um sistema, correspondendo a um grande número de representantes do sistema que estejam evoluindo em paralelo, com dinâmica determinada por suas condições iniciais.

Esse conceito de conjunto ou *ensemble* de sistemas é particularmente útil quando o sistema que queremos descrever é formado por muitas partículas (e.g. um gás) e não seria factível especificar sua condição inicial, apenas seus possíveis estados no espaço de fase. Consideramos, então, o número de pontos $N = \rho dV$ em um elemento de volume do espaço de fase, tomando tal elemento grande o suficiente para conter muitos pontos, mas pequeno o suficiente para permitir uma descrição contínua para a densidade. Usando as Equações de

¹⁰Pois $\dot{\theta} = mR^2/p_\theta$ é constante, i.e. a diferença $\theta(t) - \theta(0)$ é proporcional a t .

¹¹Pois para cada conjunto de valores $q_j(0), p_j(0)$ a evolução irá produzir uma trajetória única: no instante t , só haverá um ponto no diagrama correspondendo a essa trajetória, e dado esse ponto podemos reconstruir suas condições iniciais, o que significa que a trajetória é única, excluindo a possibilidade de cruzamentos.

Hamilton, podemos “seguir” esses pontos no diagrama, i.e. tendo os N pontos no elemento de volume

$$dV = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$$

(para n graus de liberdade), podemos descobrir para onde eles terão se movido no instante de tempo $t + dt$. Para a coordenada q_k , pensando na projeção no plano $q_k - p_k$, podemos determinar a variação do número de pontos no quadradinho de área $dq_k dp_k$ que contém o ponto $(q_k(t), p_k(t))$ como vértice inferior esquerdo (ver Fig. 7-12 do Marion). Note que, no intervalo dt , um número de pontos proporcional a $\rho dp_k (\dot{q}_k dt)$ vai entrar no quadradinho pela esquerda, já que são esses os que possuem “velocidade” compatível com deslocamento $dq_k = \dot{q}_k dt$. Da mesma forma, vão entrar $\rho dq_k (\dot{p}_k dt)$ por baixo. Somando, a variação positiva de ρ por dt será

$$\rho \dot{q}_k dp_k + \rho \dot{p}_k dq_k.$$

E quantos vão sair? os mesmos que vão entrar no quadradinho da direita e no de cima, ou seja, devemos repetir as contas respectivamente para a função $\rho \dot{q}_k$ em $q_k + dq_k$ e para $\rho \dot{p}_k$ em $p_k + dp_k$. Temos, então (usando expansão de Taylor em primeira ordem), a variação negativa de ρ pelo mesmo intervalo de tempo

$$\left[\rho \dot{q}_k + \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \rho \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} \right) dq_k \right] dp_k + \left[\rho \dot{p}_k + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k + \rho \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} \right) dp_k \right] dq_k$$

Subtraindo a última expressão da anterior, dividindo por $dq_k dp_k$ e somando sobre todos os graus de liberdade, temos a variação de ρ pelo intervalo de tempo¹²

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \sum_k \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \rho \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k + \rho \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} \right) = - \sum_k \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k \right),$$

onde, na última passagem, usamos as Eqs. de Hamilton. **Você consegue** verificar essa passagem? **Dica:** tome as derivadas cruzadas nas Eqs. (4).

Demonstramos, portanto, que a densidade de pontos no espaço de fase é uma constante, ou seja, que

$$\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

¹²Note que nosso cálculo corresponde à derivada *parcial* de ρ por t , já que consideramos valores fixos de q_k e p_k em nossa discussão.

Esse importante resultado é o **Teorema de Liouville**, que diz que a densidade de pontos representativos de um sistema dinâmico no espaço de fase permanece constante durante o movimento, como para um fluido incompressível: os pontos podem se distanciar em uma direção apenas se ficarem mais próximos em outra. Em outras palavras, o volume ocupado por um grupo de pontos no espaço de fase não muda, embora sua *forma* possa mudar bastante. Esse teorema tem aplicações importantes em mecânica estatística e várias outras áreas da física.

3 Teorema do Virial

4 Transformações de Simetria

Referências

- [1] “Classical Dynamics of Particles and Systems”, Stephen T. Thornton & Jerry B. Marion (Thomson Learning, quinta edição, 2004).
- [2] “Classical Mechanics”, Tom W.B. Kibble & Frank H. Berkshire (Imperial College Press, quinta edição, 2004).
- [3] “Mecânica Analítica”, Nivaldo Lemos (Livraria da Física, segunda edição, 2023).
- [4] “Classical Mechanics”, Herbert Goldstein (Addison-Wesley, segunda edição, 1994).