Simulado 5 - SMA304

Questão 1. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformação linear tal que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

em que B é a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Então

a ( ) $V(1) = [(1,1,1)]$ e $V(-2) = [(1,1,0),(0,1,1)]$ e T é diagonalizável.

b ( ) $V(-2) = [(1,-1,0)], V(0) = [(1,-1,0)]$ e $V(1) = [(-1,1,-1)]$ e T é diagonalizável.

c ( ) $V(1) = [(-1,1,-1)]$ e $V(-2) = [(1,-1,0)]$ e T não é diagonalizável.

d ( ) $V(1) = [(-1,1,-1)]$ e $V(-2) = [(1,-1,0),(0,-1,1)]$ e T é diagonalizável.

e ( ) $V(1) = [(-1,1,-1)]$ e $V(-2) = [(0,-1,1)]$ e T não é diagonalizável.

Questão 2. **Observação:** Esta questão é uma aplicação da teoria de autovalor/autovetor e diagonalização. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Então A^{2021} é igual a

a () $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2^{2021} & 2^{4042} \end{pmatrix}$.

b ( ) $\begin{pmatrix} -2^{2021} + 3^{2022} & 2^{2021} - 3^{2021} \\ -2^{2021} + 2\cdot 3^{2022} & 2^{2021} - 2\cdot 3^{2022} \end{pmatrix}$.

c ( ) $\begin{pmatrix} 2^{2021} & 0 \\ 0 & 3^{2021} \end{pmatrix}$.

d ( ) $\begin{pmatrix} -2^{2021} - 3^{2021} & -2^{2021} + 3^{2021} \\ 2^{2021} - 2\cdot 3^{2021} & 2^{2021} - 2\cdot 3^{2021} \end{pmatrix}$.

e ( ) $\begin{pmatrix} 2^{2022} - 3^{2021} & -2^{2021} + 3^{2021} \\ 2^{2022} - 2\cdot 3^{2021} & -2^{2021} + 2\cdot 3^{2021} \end{pmatrix}$.

Questão 3. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Considere, também, as seguintes afirmações:

(I) A é diagonalizável.

(II) B é diagonalizável.

(III) C não é diagonalizável.

(IV) D é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta. Na sua resolução, justifique claramente sua escolha.

a ( ) Somente uma afirmação é verdadeira

b ( ) Todas são verdadeiras.

c ( ) Todas são falsas.

d ( ) Somente duas afirmações são verdadeiras.

e ( ) Somente três afirmações são verdadeiras.

Questão 4. Sejam $u = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ e $v = (a, 1/\sqrt{2}, -b)$ vetores em $\mathbb{R}^3$ e consideremos nesse espaço vetorial o produto interno usual. Então é incorreto afirmar que:

a ( ) u e v são ortogonais para $a = 1$ e $b = 1$.

b ( ) v é um vetor com norma igual a 1 se, e somente se, $a^2 + b^2 = 1/2$.

c ( ) Existe uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ contendo u e v sempre que $a = b$.

d ( ) $\{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (1/2, 1/\sqrt{2}, -1/2), (-1, \sqrt{2}, 1)\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

e ( ) $\{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (1/2, 1/\sqrt{2}, -1/2), (-1, \sqrt{2}, 1)\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Questão 5. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $||\cdot||$ a norma associada a esse produto interno. Sobre V, fazemos as seguintes afirmações:

1. Se $u, v \in V$ são vetores ortogonais, então $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.
2. Se $||u|| = 1$, $||v|| = 2$ e $||u + v|| = 1$, então $||u - v|| = 3$.

Então, é verdade que:

a ( ) As duas afirmações são verdadeiras.

b ( ) As duas afirmações são falsas.

c ( ) Apenas a primeira afirmação é verdadeira.

d ( ) Apenas a segunda afirmação é verdadeira.

Questão 6. Considere o espaço vetorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ munido do produto interno usual:

$$\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22},$$

para $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Seja W o subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dado por:

$$W = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right].$$

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Se a projeção ortogonal de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sobre W for igual a $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, poderemos afirmar que:

a ( ) $a - d - 1 = 0$ e $b - c - 1 = 0$.

b ( ) $a + d - 1 = 0$ e $b + c - 1 = 0$.

c ( ) $a + d - 1 = 0$ e $b - c + 1 = 0$.

d ( ) $a + d + 1 = 0$ e $b + c - 1 = 0$.

e ( ) $a + d + 1 = 0$ e $b - c + 1 = 0$.

Questão 7. Consideremos os operadores lineares $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$S(x, y) = (-y, x),$$

e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z).$$

Então, podemos afirmar que:

a ( ) S e T são isometrias.

b ( ) S e T não são isometrias.

c (x) Apenas S é uma isometria.

d ( ) Apenas T é uma isometria.

Questão 8. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ com produto interno e seja $T\colon V \to V$ um operador linear autoadjunto. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se λ e μ são autovalores distintos de T e u, v, w são vetores de V tais que $V(\lambda) = [u, v]$ e $V(\mu) = [w]$, então $\langle w, u \rangle = \langle w, v \rangle = 0$.

(II) Quaisquer dois autovetores de T distintos são ortogonais.

(III) Se $\langle T(u), u \rangle > 0$, para todo vetor não nulo $u \in V$, então os autovalores de T são todos positivos.

Assinale a alternativa correta. Na sua resolução, justifique claramente sua escolha.

a ( ) (I) é verdadeira e (II) e (III) são falsas.

b ( ) (II) é verdadeira e (I) e (III) são falsas.

c ( ) (III) é verdadeira e (I) e (II) são falsas.

d ( ) (I) e (II) são verdadeiras e (III) é falsa.

e ( ) (I) e (III) são verdadeiras e (II) é falsa.

f ( ) (II) e (III) são verdadeiras e (I) é falsa.

g ( ) (I), (II) e (III) são verdadeiras.

h ( ) (I), (II) e (III) são falsas.

Questão 9. Uma matriz B é equivalente a uma matriz A, se B puder ser obtida de A por uma sequência de operações de linha e coluna. Alternativamente, B é equivalente a A, se houver matrizes não singulares P e Q tais que $B = PAQ$. Dito isso, considere as seguintes matrizes de Jordan (nas entradas em que não há nada, considera-se o valor 0):

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & & & \\ 0 & 4 & & & & & & \\ & & 4 & 1 & & & & \\ & & 0 & 4 & & & & \\ & & & & 4 & & & \\ & & & & & 2 & 1 & \\ & & & & & 0 & 2 & \\ & & & & & & & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 4 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 4 & & & & & \\ & & & 4 & 1 & & & \\ & & & 0 & 4 & & & \\ & & & & & 2 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 2 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Considere, também, as seguintes afirmações:

(I) As matrizes A e B são equivalentes.

(II) As matrizes A e B têm os mesmos polinômios característicos.

(III) A multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda = 2$ é 2 para a matriz A.

(IV) A multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda = 4$ é 3 para a matriz B.

Assinale a alternativa correta. Na sua resolução, justifique claramente sua escolha.

a ( ) Somente (I) é falsa.

b ( ) (I) e (II) são falsas.

c ( ) Todas são verdadeiras.

d ( ) Todas são falsas.

e ( ) Somente (III) e (IV) são verdadeiras.

Questão 10. Considere as seguintes matrizes de Jordan (nas entradas em que não há nada, considera-se o valor 0):

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & \\ 0 & 5 & & & \\ & & 5 & & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & & \\ 0 & 5 & 1 & & \\ 0 & 0 & 5 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & & \\ 0 & 5 & 1 & & \\ 0 & 0 & 5 & & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & & & & \\ & 5 & & & \\ & & 5 & & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & \\ 0 & 5 & & & \\ & & 5 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 5 & & & & \\ & 5 & & & \\ & & 5 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}$$

Considere, também, as seguintes afirmações:

(I) Todas as matrizes acima têm o mesmo polinômio característico que é $p(t) = (t-5)^3(t+1)^2$.

(II) As multiplicidades algébricas e geométricas de cada um dos autovalores da matriz F são iguais.

(III) As multiplicidades algébricas e geométricas de cada um dos autovalores das matrizes B, D e E são iguais.

(IV) As multiplicidades geométricas de cada um dos autovalores das matrizes A e C são estritamente menores do que suas respectivas multiplicidades algébricas.

Assinale a alternativa correta. Na sua resolução, justifique claramente sua escolha.

a ( ) (I) e (III) são verdadeiras.

b ( ) Todas são verdadeiras.

c ( ) Todas são falsas.

d ( ) Somente (II) e (IV) são verdadeiras.

e ( ) Somente (I), (II) e (IV) são verdadeiras.