MAT0121 - Cálculo Diferencial e Integral II - 2023
Lista 7

1. Classificação de Pontos Críticos em Abertos de $\mathbb{R}^2$

1. Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os como pontos de máximo local, pontos de mínimo local ou pontos de sela.

a) $f(x,y) = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$

b) $f(x,y) = \ln\left(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7\right)$

c) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$

d) $f(x,y) = x^4 - x^2 + (x-1)y^2$

e) $f(x,y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$

f) $f(x,y) = (x^2-1)^2 + y^2 + 2x^2y - y$

g) $f(x,y) = (x^2-1)^2 + y^2$

h) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2 - 8xy - 4y^2$

i) $f(x,y) = (x^2-1)^2 + 2(x^2-1)y + x^2y^2$

j) $f(x,y) = x^3y^3$

k) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2y^2+1} + \sin y$

l) $f(x,y) = x^3y + xy^2$

(*Sugestão:* nos últimos 4 itens, é mais fácil não usar o Critério da Hessiana.)

2. Considere a função $f(x,y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$, onde a é uma constante. Para quais valores de a a função f tem:

a) Exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo locais?

b) Exatamente dois pontos de sela e um ponto de mínimo local?

c) Ao menos um ponto de máximo local?

d) Mais de três pontos críticos?

3. Considere a função $f(x,y) = x^2y + bxy - by^2$, onde b é uma constante. Verifique as afirmações a seguir.

a) Se $b \neq 0$, então f tem exatamente três pontos críticos, dos quais apenas dois são pontos de sela.

b) Se $b > 0$, então f tem um único ponto de máximo local e não tem nenhum ponto de mínimo local.

c) Se $b = 0$, então f tem infinitos pontos críticos, dos quais apenas um é ponto de sela.

4. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções de classe $\mathscr{C}^2$. Suponha que as equações $f(x) = 0$ e $f'(x) = 0$ não possuam soluções em comum. Mostre que todos os pontos críticos de $F(x,y) = yf(x) + g(x)$ são pontos de sela.

5. Uma função contínua $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tem dois pontos de mínimo locais necessariamente também tem um ponto de máximo local (por quê?). O mesmo não ocorre com uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Verifique que a função $f(x,y) = (x^2-1)^2 + (x^2y - x - 1)^2$ tem exatamente dois pontos críticos, ambos pontos de mínimo locais. Faça um esboço de uma superfície com tais características e tente compreender como isso ocorre.

6. Todo polinômio em uma variável que é uma soma de quadrados tem um ponto de mínimo global (por quê?). O mesmo não ocorre com polinômios em duas variáveis. Verifique que o polinômio $f(x,y) = x^2 + (xy-1)^2$ tem um único ponto crítico, que é ponto de sela. Mostre também que f é estritamente positiva e esboce a imagem da curva $\gamma : (0,+\infty) \to \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = \left(t.\frac{1}{t}, f\left(1, \frac{1}{t}\right)\right)$.

7. Se uma função derivável $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tem um único ponto crítico p, e se p é ponto de mínimo local de f, então p é ponto de mínimo global de f (por quê?). O mesmo não ocorre com uma função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Verifique que a função $f(x,y)=x^2+y^2(x+1)^3$ tem um único ponto crítico, que este ponto crítico é ponto de mínimo local de f, e que f não tem nenhum ponto de mínimo global.

8. Considere a função $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$. O objetivo deste exercício é mostrar que $(0,0)$ é ponto de mínimo local de f em cada direção do plano, mas *não* é ponto de mínimo local de f.

a) Fixe um vetor unitário $\vec{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ e defina $g(t)=f(tv_1,tv_2)$. Mostre que $t=0$ é ponto de mínimo local de g.

b) Estude f ao longo da curva $\gamma(t)=\left(t,\frac{3t^2}{2}\right)$. Conclua que $(0,0)$ é um ponto de sela de f.

9. Considere a função $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+k$, onde a,b,c,d,e,k são constantes, e suponha que $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ seja um ponto crítico de f.

a) Use o Polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno de (x_0,y_0) para mostrar que

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+a(x-x_0)^2+b(x-x_0)(y-y_0)+c(y-y_0)^2$$

para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

b) Fixe um vetor unitário $\vec{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ e defina $g(t)=f(x_0+tv_1,y_0+tv_2)$. Use o item anterior para mostrar que $g(t)=\left(av_1^2+bv_1v_2+cv_2^2\right)t^2+f(x_0,y_0)$. Conclua que o gráfico de g é uma parábola com vértice em $t=0$ ou uma reta horizontal.

c) Mostre que se (x_0,y_0) é ponto de mínimo local de f, então (x_0,y_0) é ponto de mínimo global.

10. **(Método dos Mínimos Quadrados)** Considere $n\geq 2$ pontos $P_i=(x_i,y_i)\in\mathbb{R}^2$, onde $x_i\neq x_j$ se $i\neq j$. Suponha que esses pontos representem os resultados de alguma observação ou de algum experimento e queiramos encontrar uma função afim $f(x)=\alpha x+\beta$ cujo gráfico contém os pontos $P_1,\ldots,P_n$. Nem sempre existe uma tal função; em geral, o sistema linear nas variáveis α e β

$$x_i\alpha+\beta=y_i,\ 1\leq i\leq n,$$

é impossível se $n\geq 3$. O objetivo deste exercício é mostrar que é possível encontrar uma função afim f que *minimiza* a soma dos quadrados

$$(f(x_1)-y_1)^2+\cdots+(f(x_n)-y_n)^2.$$

Para fazer isso, mostre que a função

$$E(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}(x_i\alpha+\beta-y_i)^2$$

tem um único ponto crítico, que é ponto de mínimo global de E, e encontre-o. (*Sugestão:* use o Critério da Hessiana para classificar o ponto crítico encontrado. Para mostrar que se trata de um ponto de mínimo global, use o exercício anterior.)

11. Em cada item abaixo, determine, usando o Método dos Mínimos Quadrados, a reta que melhor se ajusta aos dados fornecidos. Esboce, em cada caso, os pontos e a reta encontrada.

a) $(1,3)$, $(2,7)$ e $(3,8)$

b) $(1,\frac{17}{10})$, $(2,\frac{9}{5})$, $(3,\frac{23}{10})$ e $(4,\frac{16}{5})$

c) $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,3)$ e $(3,4)$

2. Máximos e Mínimos em Subconjuntos Compactos de $\mathbb{R}^n$

1. Esboce a região D e determine os valores máximo e mínimo de f em D, onde:

a) $f(x,y) = 5-3x+4y$ e D é o triângulo (incluindo interior e lados) de vértices $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$

b) $f(x,y) = x^3 y$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+2y^2 = 1\}$

c) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2, x \leq 0 \text{ e } y \geq 0\}$

d) $f(x,y) = xy$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-y^2 = 1 \text{ e } 1 \leq x \leq 2\}$

e) $f(x,y) = 2x^3+y^4$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1, 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \text{ e } y \geq 0\}$

f) $f(x,y) = 2x^3+6xy^2-3x^2+3y^2$ e $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4}+y^2 \leq 1 \text{ e } 0 \leq x \leq 2\right\}$

g) $f(x,y,z) = x-z$ e $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z \text{ e } z = 2y\}$