Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3554 – Introdução às Estruturas Aeronáuticas

Aula #22

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

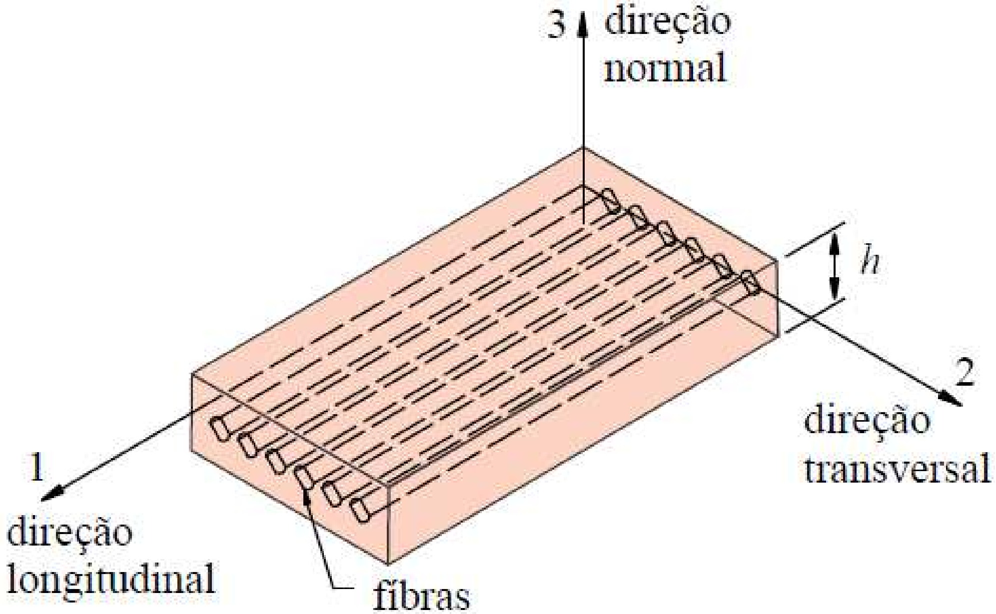
01/12/2023

Introdução à Análise Estrutural de Materiais Compósitos – Parte II

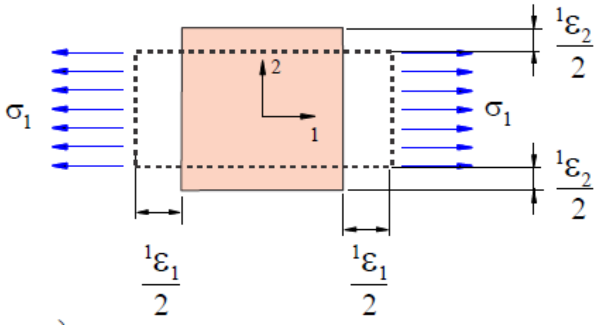
1. Macromecânica de uma lâmina;
2. Simplificações para lâminas sob estado plano de tensões;
3. Relações tensão-deformação no sistema cartesiano *Oxy*.

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1. Macromecânica de uma lâmina



Consideremos um elemento infinitesimal retirado de uma lâmina direcional, submetida unicamente a tensões normais de intensidade σ_1 aplicadas na direção 1, como ilustra a figura abaixo:



Observamos que a tensão σ_1 causa deformações tanto na direção 1 (a qual denotaremos ${}^1\varepsilon_1$), quanto deformações na direção 2 (a qual denotaremos ${}^1\varepsilon_2$). Note que o subscrito à direita do símbolo indica a direção em que a deformação está sendo medida, ao passo que o sobrescrito à esquerda do símbolo indica a direção em que a tensão foi aplicada (no caso, na direção 1 apenas). Definimos o módulo de elasticidade longitudinal (E_1) e o coeficiente de Poisson maior da lâmina (ν_{12}) pelas relações:

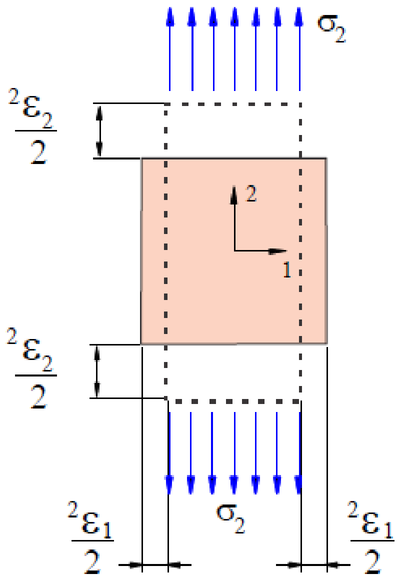
$$E_1 = \frac{\sigma_1}{{}^1\varepsilon_1} \qquad \text{e} \qquad \nu_{12} = -\frac{{}^1\varepsilon_2}{{}^1\varepsilon_1}$$

E também: $\nu_{13} = -\dfrac{{}^1\varepsilon_3}{{}^1\varepsilon_1}$

De forma análoga, considerando que atue agora, sobre o elemento infinitesimal, apenas a tensão σ_2, definimos as constantes elásticas E_2 (módulo de elasticidade na direção 2) e ν_{21} (coeficiente de Poisson menor) por:

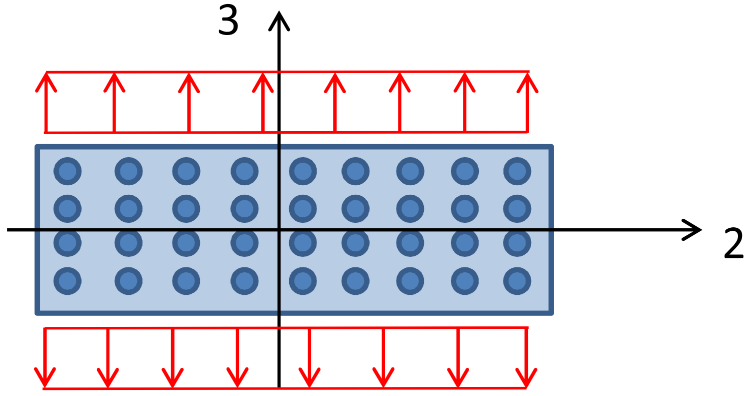
$$E_2 = \frac{\sigma_2}{{}^2\varepsilon_2} \qquad \text{e} \qquad \nu_{21} = -\frac{{}^2\varepsilon_1}{{}^2\varepsilon_2}$$

E também: $\nu_{23} = -\frac{{}^2\varepsilon_3}{{}^2\varepsilon_2}$



Por último, e para completar a análise, consideremos que sobre a lâmina atue agora apenas uma tensão normal ao plano da mesma (ou seja, uma tensão σ_3), definimos as constantes elásticas E_3 (módulo de elasticidade na direção 3) e os coeficientes de Poisson ν_{31} e ν_{32} por:

$$E_3 = \frac{\sigma_3}{{}^3\varepsilon_3} \qquad \nu_{31} = -\frac{{}^3\varepsilon_1}{{}^3\varepsilon_3} \qquad \nu_{32} = -\frac{{}^3\varepsilon_2}{{}^3\varepsilon_3}$$



Considerando que atuem simultaneamente as três tensões (segundo as direções principais de elasticidade 1, 2 e 3 da lâmina), teremos as seguintes deformações finais (obtidas pela superposição dos efeitos):

- Na direção 1: $\varepsilon_1 = {}^1\varepsilon_1 + {}^2\varepsilon_1 + {}^3\varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{21}({}^2\varepsilon_2) - \nu_{31}({}^3\varepsilon_3)$

$$\boxed{\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{21}\left(\frac{\sigma_2}{E_2}\right) - \nu_{31}\left(\frac{\sigma_3}{E_3}\right)}$$

- Na direção 2: $\varepsilon_2 = {}^1\varepsilon_2 + {}^2\varepsilon_2 + {}^3\varepsilon_2 = -\nu_{12}({}^1\varepsilon_1) + \dfrac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{32}({}^3\varepsilon_3)$

$$\boxed{\varepsilon_2 = -\nu_{12}\left(\frac{\sigma_1}{E_1}\right) + \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{32}\left(\frac{\sigma_3}{E_3}\right)}$$

- Na direção 3: $\varepsilon_3 = {}^1\varepsilon_3 + {}^2\varepsilon_3 + {}^3\varepsilon_3 = -\nu_{13}({}^1\varepsilon_1) - \nu_{23}({}^2\varepsilon_2) + \dfrac{\sigma_3}{E_3}$

$$\boxed{\varepsilon_3 = -\nu_{13}\left(\frac{\sigma_1}{E_1}\right) - \nu_{23}\left(\frac{\sigma_2}{E_2}\right) + \frac{\sigma_3}{E_3}}$$

Neste caso (em que o material possui três planos de simetria elástica, ou seja, o material é ortotrópico), a lei de Hooke fica dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ sim. & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

Ou, alternativamente:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ sim. & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Ou seja, temos apenas 9 constantes elásticas a serem determinadas.

Utilizando as relações e constantes de Engenharia apresentadas nos slides #4 a #7, teremos:

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{E_1}\right)\sigma_1 - \left(\frac{\nu_{21}}{E_2}\right)\sigma_2 - \left(\frac{\nu_{31}}{E_3}\right)\sigma_3$$

$$\varepsilon_2 = -\left(\frac{\nu_{12}}{E_1}\right)\sigma_1 + \left(\frac{1}{E_2}\right)\sigma_2 - \left(\frac{\nu_{32}}{E_3}\right)\sigma_3$$

$$\varepsilon_3 = -\left(\frac{\nu_{13}}{E_1}\right)\sigma_1 - \left(\frac{\nu_{23}}{E_2}\right)\sigma_2 + \left(\frac{1}{E_3}\right)\sigma_3$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ sim. & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Observem que:

1. Tensões normais aplicadas nas direções principais de elasticidade (1, 2 e 3) provocam apenas alongamentos nestas direções (sem provocar distorções entre as direções 1-2, 2-3 ou 3-1. Daí: $\gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0$);

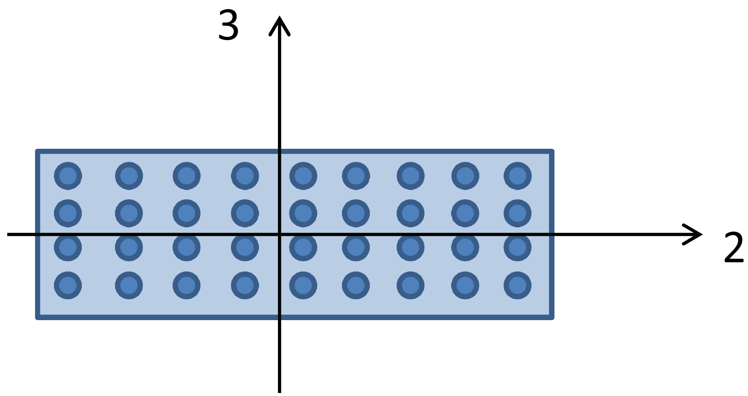
2. Tensões cisalhantes puras aplicadas nos planos 1-2 (ou seja, τ_{12}), 2-3 (ou seja, τ_{23}) ou 3-1 (ou seja, τ_{31}), provocam apenas distorções segundo as direções correlatas. Os módulos de cisalhamento G_{12}, G_{23} e G_{31} ficam definidos pelas relações:

$$G_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}}$$

3. Como a matriz de elasticidade é simétrica, temos que:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}$$

4. Se o plano 2-3 for considerado um plano de isotropia (material transversalmente isótropo), então:



$$\left.\begin{aligned} E_2 &= E_3 \quad \text{Eq.(1)} \\ \frac{\nu_{23}}{E_2} &= \frac{\nu_{32}}{E_3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nu_{23} = \nu_{32} \quad \therefore \quad G_{23} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})} \quad \text{Eq.(2)}$$

$$\nu_{21} = \nu_{31} \quad \text{Eq.(3)}$$

$$G_{31} = G_{12} \quad \text{Eq.(4)}$$

Deste modo, das 9 constantes elásticas independentes, restam apenas 5:
$E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$ e ν_{23} (por exemplo).

2. Simplificações para lâminas sob estado plano de tensões

Se uma lâmina estiver sob estado plano de tensões (ou seja, sob a ação das tensões planas σ_1, σ_2 e $\tau_{12} = \tau_{21}$, então podemos expressar as relações tensão-deformação na seguinte forma simplificada :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{E_1} & -\dfrac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\dfrac{\nu_{12}}{E_1} & \dfrac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Ou, de forma equivalente:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

onde as constantes $Q_{11}, Q_{22}, Q_{12} = Q_{21}$, e Q_{66} são dadas por (verifique!):

$$Q_{11} = \frac{(E_1)^2}{E_1 - (\nu_{12})^2 E_2} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

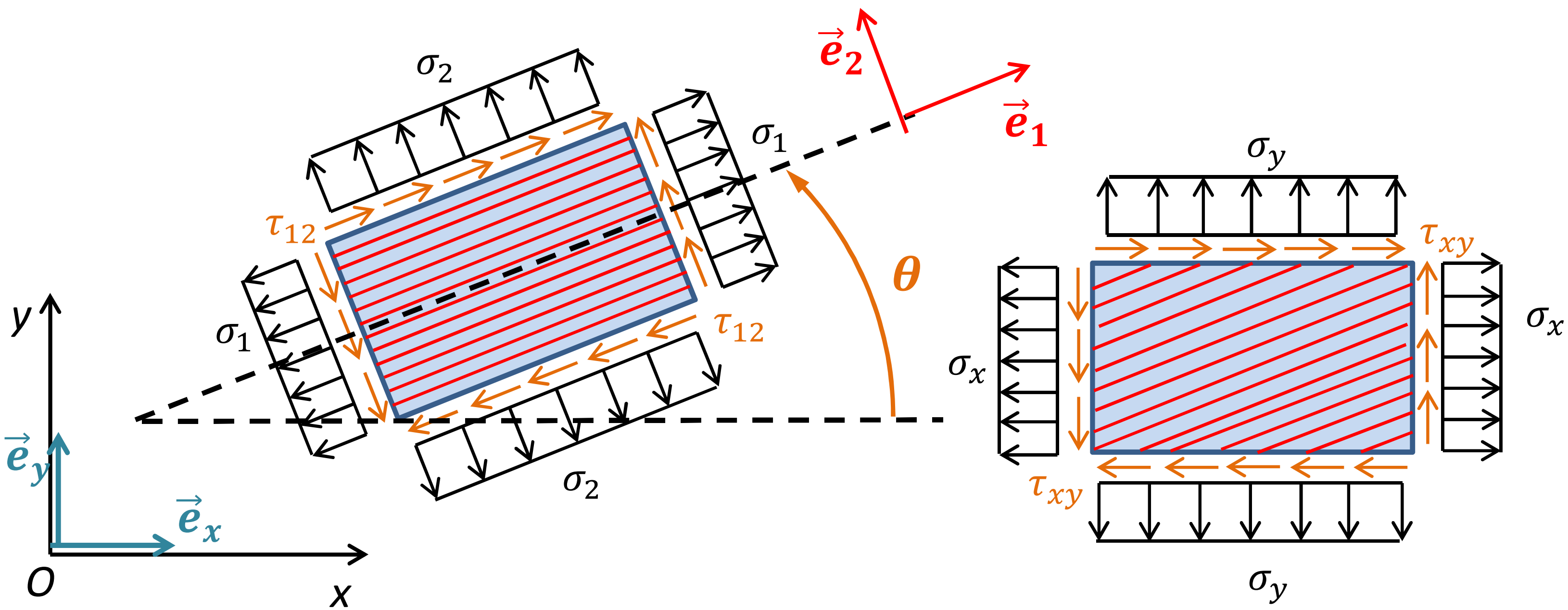
$$Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - (\nu_{12})^2 E_2} = \frac{\nu_{21} E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_1 E_2}{E_1 - (\nu_{12})^2 E_2} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

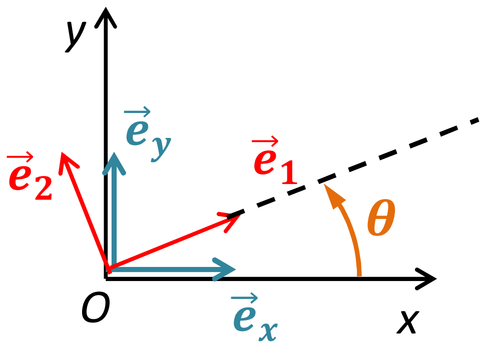
3. Relações tensão-deformação no sistema cartesiano Oxy

Ainda considerando o caso em que a lâmina está sob estado plano de tensões, vamos agora determinar como obter as relações tensão-deformação em um sistema de coordenadas *Oxy*. Em outras palavras: como relacionar as tensões planas σ_x, σ_y e τ_{xy} às deformações $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ e γ_{xy}, às constantes elásticas da lâmina (E_1, E_2, ν_{12} e G_{12}) e ao ângulo de rotação θ entre os dois sistemas.



1º Passo:

Relacionar o estado tensional descrito na nova base $b_{xy} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ ao estado tensional descrito na base anterior $b_{12} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Para tanto, precisamos obter a matriz de mudança de base, escrevendo os versores da nova base em função dos versores da base anterior:



$$\vec{e}_x = (cos\theta)\vec{e}_1 - (sen\theta)\vec{e}_2$$

$$\vec{e}_y = (sen\theta)\vec{e}_1 + (cos\theta)\vec{e}_2$$

$$[M] = \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

$$[T]_{b_{xy}} = [M]^t [T]_{b_{12}} [M]$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sigma_x = (cos^2\theta)\sigma_1 + (sen^2\theta)\sigma_2 - (sen(2\theta))\tau_{12} \\ \sigma_y = (sen^2\theta)\sigma_1 + (cos^2\theta)\sigma_2 + (sen(2\theta))\tau_{12} \\ \tau_{xy} = (sen\theta cos\theta)\sigma_1 - (sen\theta cos\theta)\sigma_2 + (cos(2\theta))\tau_{12} \end{array} \right.$$

Ou ainda, designando $m = cos\theta$ e $n = sen\theta$:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Ou ainda:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Resultando:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

2º Passo:

Relacionar o estado de deformações descrito na nova base $b_{xy} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ ao estado de deformações descrito na base anterior $b_{12} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

De forma análoga ao que foi desenvolvido antes, podemos escrever:

$$[E]_{b_{xy}} = [M]^t [E]_{b_{12}} [M]$$

$$[E]_{b_{xy}} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

$$[E]_{b_{12}} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \gamma_{12}/2 \\ \gamma_{12}/2 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} \epsilon_x &= (cos^2\theta)\epsilon_1 + (sen^2\theta)\epsilon_2 - (sen(2\theta))\epsilon_{12} \\ \epsilon_y &= (sen^2\theta)\epsilon_1 + (cos^2\theta)\epsilon_2 + (sen(2\theta))\epsilon_{12} \\ \epsilon_{xy} &= (sen\theta cos\theta)\epsilon_1 - (sen\theta cos\theta)\epsilon_2 + (cos(2\theta))\epsilon_{12} \end{aligned} \right.$$

Utilizando novamente a notação $m = cos\theta$ e $n = sen\theta$, virá :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

Ou ainda:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

Resultando:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

Definições:

$$\{\sigma\}_{b_{xy}} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \{\sigma\}_{b_{12}} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\}_{b_{xy}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [A]\{\epsilon\}_{b_{xy}} \quad , \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\}_{b_{12}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = [A]\{\epsilon\}_{b_{12}} \quad , \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \qquad [Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

Temos as relações:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\sigma\}_{b_{12}} = [Q]\{\varepsilon\}_{b_{12}}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\sigma\}_{b_{12}} = [R]\{\sigma\}_{b_{xy}}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\epsilon\}_{b_{12}} = [R]\{\epsilon\}_{b_{xy}} = [R][A]^{-1}\{\varepsilon\}_{b_{xy}}$$

Logo: $\{\sigma\}_{b_{12}} = [Q]\{\varepsilon\}_{b_{12}} \Leftrightarrow [R]\{\sigma\}_{b_{xy}} = [Q][A]\{\epsilon\}_{b_{12}}$

$$\Leftrightarrow \{\sigma\}_{b_{xy}} = [R]^{-1}[Q][A][R][A]^{-1}\{\varepsilon\}_{b_{xy}}$$

Porém:

$$[A][R][A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$[A][R][A]^{-1} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}$$

Comparando com:

$$[R] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}$$

Verifica-se que:

$$[A][R][A]^{-1} = [R]^{-t}$$

Logo: $\{\sigma\}_{b_{xy}} = [R]^{-1}[Q][A][R][A]^{-1}\{\varepsilon\}_{b_{xy}}$

$$\{\sigma\}_{b_{xy}} = [R]^{-1}[Q][R]^{-t}\{\varepsilon\}_{b_{xy}}$$

Denominando: $[\overline{Q}] = [R]^{-1}[Q][R]^{-t}$

Resulta: $\{\sigma\}_{b_{xy}} = [\overline{Q}]\{\varepsilon\}_{b_{xy}}$

Na forma estendida:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{61} & \overline{Q}_{62} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Onde:

$$\overline{Q}_{11} = Q_{11}cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})sen^2\theta cos^2\theta + Q_{22}sen^4\theta$$

$$\overline{Q}_{22} = Q_{11}sen^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})sen^2\theta cos^2\theta + Q_{22}cos^4\theta$$

$$\overline{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})sen^2\theta cos^2\theta + Q_{66}\left(cos(2\theta)\right)^2$$

$$\overline{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})sen^2\theta cos^2\theta + Q_{12}(cos^4\theta + sen^4\theta)$$

$$\overline{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sen\theta cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sen^3\theta cos\theta$$

$$\overline{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sen^3\theta cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sen\theta cos^3\theta$$

Referências:

[1] Mendonça, P.T.R., *Materiais Compostos & Estruturas-Sanduíche – Projeto e Análise*, 2ª ed., Ed. Orsa Maggiore, 2019.

[2] Megson, T.H.G. *Aircraft Structures for Engineering Students*. 6th ed., Butterworth-Heinemann, 2016. Cap. 25: Laminated composite structures