MAT2352 - Cálculo para funções de várias variáveis II

5a. Lista de Exercícios - 2o. semestre de 2023

1. Determine uma paramétrizaç ão de cada uma das superfícies S abaixo e calcule sua área.

(a) S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interior ao cone $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$;
(b) S é a parte do cilindro $x^2 + z^2 = 1$ compreendida entre os planos $y = -1$ e $y = 3$;
(c) S é a parte do plano $z = 2x + 3y$ que é interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 16$;
(d) S é a parte do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$;
(e) S é a parte do cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que está no interior do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, onde $a > 0$;
(f) S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está no interior do cilindro $x^2 + y^2 = ax$, onde $a > 0$;
(g) S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com $z \geq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}$.
(h). S é a parte do parabolóide $z = 1 - 2x^2 - y^2$ limitada pela superfície $16x^2 + 4y^2 = 1$.

Resp. (a) $4\pi(2 - \sqrt{2})$, (b) 8π, (c) $16\pi\sqrt{14}$, (d) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$, (e) $8a^2$, (f) $2a^2(\pi - 2)$, (g) $4\pi(2 - \frac{2}{\sqrt{10}})$, (h) $\frac{\pi}{12}(2\sqrt{2} - 1)$.

2. Calcule as seguintes integrais de superfícies.

(a) $\iint_S y \, dS$, onde S é a superfície dada por $z = x + y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$;
(b) $\iint_S x^2 \, dS$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
(c) $\iint_S yz \, dS$, onde S é a parte do plano $z = y + 3$ limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$;
(d) $\iint_S xy \, dS$, onde S é o bordo da região limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0$ e $x + y = 2$;
(e) $\iint_S z(x^2 + y^2) \, dS$, onde S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$;

(f) $\displaystyle\iint_S xyz\,dS$, onde S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=1$ interior ao cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

(g) $\displaystyle\iint_S \sqrt{\frac{2x^2+2y^2-2}{2x^2+2y^2-1}}\,dS$, onde S é a parte de $x^2+y^2-z^2=1$ com $1\le z\le 3$;

(h) $\displaystyle\iint_S (x+1)dS$, onde S é a parte de $z=\sqrt{x^2+y^2}$ limitada por $x^2+y^2=2y$.

Resp: (a) $13\sqrt{2}/3$, (b) $4\pi/3$, , (c) $\pi\sqrt{2}/4$, (d) $\frac{-\pi}{4}(8+\sqrt{2})$, (e) 16π, (f) 0, (g) $8\pi\sqrt{2}$, (h) $\pi\sqrt{2}$.

3. Calcule a massa das superfícies sendo $\delta(x, y, z)$ a densidade pontual de massa para:

(a) S é a parte do plano $3x+2y+z=6$ contida no primeiro octante e $\delta(x, y, z) = y$.
(b) S é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ e $(0, 0, 2)$ e $\delta(x, y, z) = xz$.
(c) S é a parte de $z = \ln(x^2+y^2)$ limitada pelos cilindros $x^2+y^2 = 1$ e $x^2+y^2 = e^2$, e $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Resp: (a) $3\sqrt{14}$, (b) $7\sqrt{6}/24$, (c) $\frac{\pi}{2}(e^4 + 4e^2 - 5)$.

4. Calcule a integral de superfície $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ para cada um dos campos de vetores $\vec{F}$ e superfícies orientadas S indicadas abaixo. Em outras palavras, calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S. Quando S é uma superfície fechada, admita que S está orientada pela normal *exterior*.

(a) $\vec{F}(x, y, z) = x^2y\,\vec{\imath} - 3xy^2\,\vec{\jmath} + 4y^3\vec{k}$ e S é a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$, com $z \geq 0$, orientada de modo que a normal no ponto $(0, 0, 9)$ é $\vec{k}$;
(b) $\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{\imath} + xy\,\vec{\jmath} + xz\vec{k}$ e S é a parte do plano $3x + 2y + z = 6$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada de modo que seu vetor normal é $\frac{1}{\sqrt{14}}(3\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} + \vec{k})$;
(c) $\vec{F}(x, y, z) = -x\,\vec{\imath} - y\,\vec{\jmath} + z^2\vec{k}$ e S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$, orientada de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaça $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$;
(d) $\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\vec{k}$ e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;
(e) $\vec{F}(x, y, z) = -y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath} + 3z\vec{k}$ e S é o hemisfério $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, orientada de modo que a normal no ponto $(0, 0, 4)$ é $\vec{k}$;
(f) $\vec{F}(x, y, z) = y\,\vec{\imath} - z\vec{k}$ e S consiste do parabolóide $y = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 1$ e do disco $x^2 + z^2 \leq 1$, $y = 1$;
(g) $\vec{F}(x, y, z) = -yz\,\vec{\imath}$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ exterior ao cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, orientada de modo que a normal no ponto $(2, 0, 0)$ é $\vec{\imath}$;
(h) $\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} - 2z\vec{k}$ e S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, orientada de modo que sua normal $\vec{n}$ satisfaça $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$.

Resp. (a) 0, (b) $-3\pi/4$, (c) $-73\pi/6$, (d) 108π, (e) 128π, (f) $-\pi/2$, (g) 0, (h) $32/3$.

5. Calcule

(a) $\displaystyle\iint_S xz\,dy\wedge dz + yz\,dz\wedge dx + x^2\,dx\wedge dy$, onde S é a semi-esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$, $z\geq 0$, orientada segundo a normal exterior; Resp. $3\pi a^4/4$.

(b) $\displaystyle\iint_S x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy$, onde S é a parte do plano $x+y+z=2$ no primeiro octante, orientada de modo que sua normal satisfaça $\vec{n}\cdot\vec{\jmath}>0$; Resp. 4.

(c) $\displaystyle\iint_S x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy$, onde S é a parte do parabolóide $z=4-x^2-y^2$ contida no semiespaço $z\geq 2y+1$, orientada de modo que sua normal satisfaça $\vec{n}\cdot\vec{k}\geq 0$. Resp. 28π.