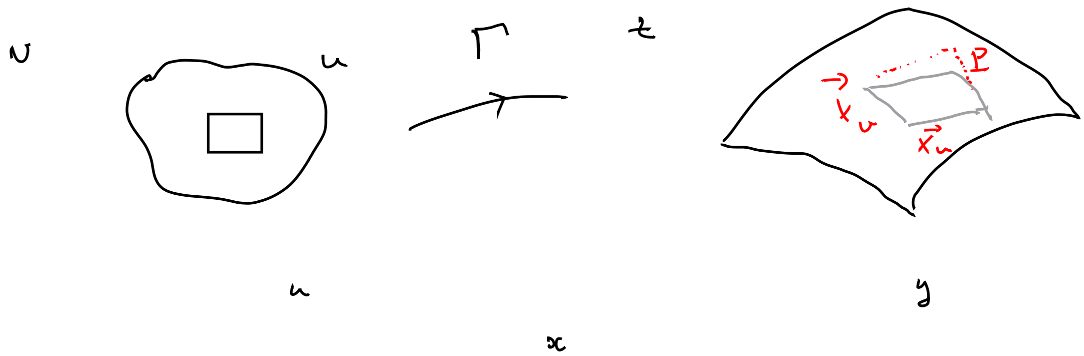
SUPERFÍCIES PARAMETRIZADAS

1. Integral de campos escalares

Seja $\Gamma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada lisa. Para cada pequeno retângulo contido em $R = [u, u+\Delta u] \times [v, v+\Delta v] \subset U$, pode-se mostrar que a área de $\Gamma(R)$ é aproximada pela área do paralelogramo P definido pelos vetores $\vec{X}_u \cdot \Delta u$, $\vec{X}_v \cdot \Delta v$. A área deste paralelogramo é dada pela norma do produto vetorial desses vetores:

$$A(P) = \|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\| \Delta u \Delta v.$$



Isto sugere a seguinte definição:

Definição 1.1. *Seja $\Gamma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada lisa definida em um domínio limitado $U \subset \mathbb{R}^2$. Definimos a área de Γ por*

$$\iint_\Gamma d\,S = \iint_U \|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\|\, d\,u\, d\,v.$$

Observação 1.2. *A definição de área acima foi dada para* ***superfícies parametrizadas****. Entretanto, pode-se mostar que o valor da integral independe de parametrização. Mais exatamente,*

Date: December 4, 2023.

se a imagem de duas superfícies parametrizadas Γ_1 e Γ_2 for a mesma e ambas forem injetoras, então

$$\iint_{\Gamma_1} d\,S = \iint_{\Gamma_1} d\,S.$$

Exemplo 1.3. *Calcular a área da parte do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, entre os planos $z = 0$ e $z = 2$.*

Uma vez definida a noção de área para superfícies parametrizadas é natural definir a integral de superfície de funções (ou campos escalares) de maneira análoga ao que fizemos para integrais de linha.

Definição 1.4. *Seja $\Gamma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada lisa definida em um domínio limitado $U \subset \mathbb{R}^2$ e f função contínua e limitada a valores reais definida em em domínio contendo a imagem de Γ Definimos a integral de f sobre Γ por*

$$\iint_{\Gamma} f\,d\,S = \iint_{U} f(\Gamma(u,v))\,\|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\|\,d\,u\,d\,v.$$

Observação 1.5. *Novamente, pode-se mostrar que o valor da integral independe da parametrização, no sentido descrito acima para área de superfície.*

Exemplo 1.6. *Calcule $\iint_{\Gamma} f\,d\,S$, sendo S a parte da esfera de centro na origem e raio 2, com $z \geq \sqrt{3(x^2+y^2)}$*