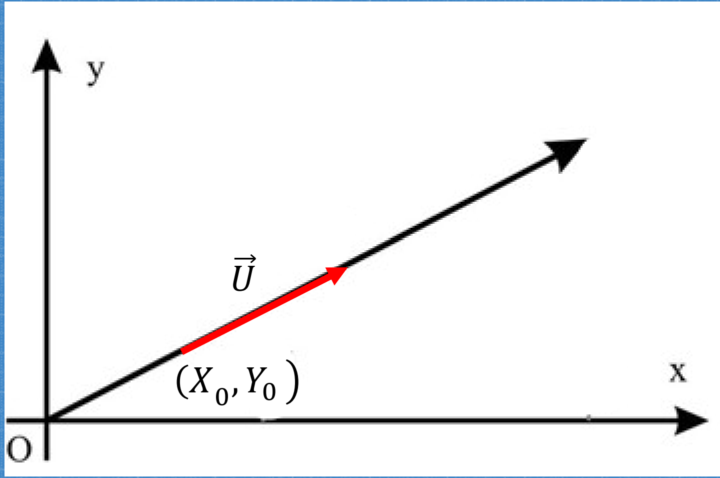
Disciplina de Cálculo II (LOB1004)
Profa. Responsável: Diovana Napoleão
Escola de Engenharia de Lorena EEL-USP
Departamento de Ciências Básicas e Ambientais

DERIVADA DIRECIONAL

DERIVADA DIRECIONAL

Considere a figura,



$\vec{U}$ = (a, b)

$\vec{u} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\vec{u} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Se tomarmos o limite quando $h \to 0$, obteremos a taxa de variação de z na direção de **u**, que é chamada derivada direcional de f na direção de **u**.

DERIVADA DIRECIONAL

Definição: A derivada direcional de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\vec{u} = < a, b >$ é

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Se esse limite existir.

DERIVADA DIRECIONAL

TEOREMA

Se f é uma função diferenciável de x e y, então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor unitário $\vec{u} = < a, b >$ e

$$D_u f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)b = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$

DERIVADA DIRECIONAL

VETOR GRADIENTE

Definição: Se f é uma função diferenciável de x e y, então o gradiente de f é uma **função vetorial** ∇f definida por

$$\nabla f(x,y) =< f_x(x,y), f_y(x,y) > = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial y}}\vec{j}$$

DERIVADA DIRECIONAL

VETOR GRADIENTE

Da derivada direcional podemos escrever:

$$D_u f(x,y) = \frac{\partial y}{\partial x}(x,y)a + \frac{\partial y}{\partial y}(x,y)b = < \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x} > . < a, b >$$

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y).\vec{u}$$

DERIVADA DIRECIONAL

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

- Usando o produto escalar podemos escrever que

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y)\,.\vec{u} = \|\nabla f(x,y)\|.\,\|u\|\cos\theta = \|\nabla f(x,y)\|\cos\theta$$

$$\therefore D_u f(x,y) = \|\nabla f(x,y)\|\cos\theta$$

DERIVADA DIRECIONAL

- Usando o produto escalar podemos escrever que

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y)\,\vec{u} = \|\nabla f(x,y)\|.\,\|u\|\cos\theta = \|\nabla f(x,y)\|\cos\theta$$

$$\therefore D_u\ f(x,y) = \|\nabla f(x,y)\|\cos\ \theta$$

$$-1 \leq\ \cos\theta \leq 1$$

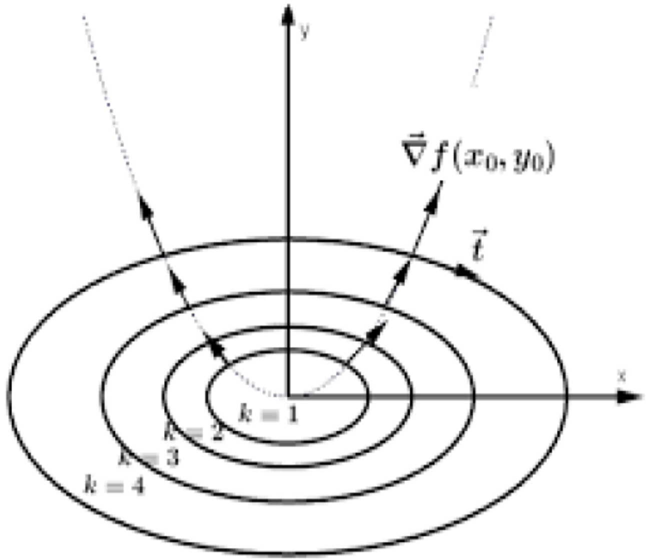
$\therefore$ Taxa Máxima $= \|\nabla f(x,y)\|$
$\therefore$ Taxa Mínima= -$\|\nabla f(x,y)\|$

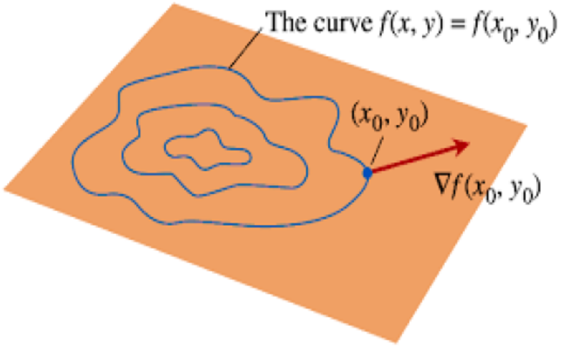
DERIVADA DIRECIONAL

MAXIMIZANDO A DERIVADA DIRECIONAL

TEOREMA: Suponha que f seja uma função diferenciável de n variáveis. O valor máximo da derivada direcional $D_u f(x, y)$ é $\|\nabla f(x)\|$ e ocorre quando $\vec{u}$ tem a mesma direção e sentido do vetor gradiente $\nabla f(x)$

DERIVADA DIRECIONAL





DERIVADA DIRECIONAL