Física IV (IF 2023)
Aula 35

- Objetivos de aprendizagem

  - Definir a “velocidade própria” e a “quadrivelocidade”

  - Obter a velocidade a partir da velocidade própria

  - Obter a transformação da quadrivelocidade por mudança de referencial

  - Aplicar os conceitos de velocidade própria e quadrivelocidade em problemas simples.

  - Determinar o valor invariante da norma (ao quadrado) da quadrivelocidade

Tempo próprio e velocidade própria

Tempo próprio (invariante) $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$

Velocidade $\vec{u} = \frac{d\vec{l}}{dt}$

Velocidade própria $\vec{\eta} = \frac{d\vec{l}}{d\tau}$ $\vec{\eta} = \gamma \vec{u}$

Griffiths

- Problema 12.24:

  (a) Dada a velocidade própria, achar a velocidade

  (Obs.: dada a velocidade $\vec{u}$ Eq. 12.40): $\vec{\eta}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\vec{u}=\gamma(u)\vec{u}$

  (b) Obter a rapidez (eq. 12.34): $\theta=\text{arctanh}(v/c)$

  a partir da velocidade própria

Resultados

$$u^2 = \frac{\eta^2}{1 + \eta^2 / c^2}$$

$$\gamma(u) = \sqrt{1 + \eta^2 / c^2}$$

$$u^i = \frac{\eta^i}{\sqrt{1 + \eta^2 / c^2}} \quad (i = 1,2,3)$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{\eta}}{\sqrt{1 + \eta^2 / c^2}}$$

Quadrivelocidade

$$\eta^{\mu} \equiv \frac{d\,x^{\mu}}{d\,\tau} \quad (\mu = 0,1,2,3)$$

$$\eta^{0} = \frac{cdt}{d\,\tau} = \gamma(u)\,c$$

$$\eta^{i} = \frac{dx^{i}}{d\,\tau} \quad (i = 1,2,3)$$

$$\begin{bmatrix} \eta^{0} \\ \eta^{1} \\ \eta^{2} \\ \eta^{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{d\,\tau} \begin{bmatrix} dx^{0} \\ dx^{1} \\ dx^{2} \\ dx^{3} \end{bmatrix} = \gamma(u) \begin{bmatrix} c \\ u^{1} \\ u^{2} \\ u^{3} \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} c \\ \vec{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma c \\ \vec{\eta} \end{bmatrix}$$

Transformam-se como as componentes contravariantes de um quadrivetor: $\bar{\eta}^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\,\eta^{\nu}$

T. Lorentz: $\bar{x}^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu}$ $\quad d\,\bar{x}^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} d\,x^{\nu}$

Griffiths

Problema 12.25 Um carro está viajando ao longo da linha de 45° em $\mathcal{S}$ (Figura 12.25), à velocidade (ordinária) $(2/\sqrt{5})c$.

(a) Encontre os componentes u_x e u_y da velocidade (ordinária).

(b) Encontre os componentes η_x e η_y da velocidade própria.

(c) Encontre o componente de índice 0 do quadrivetor velocidade, η^0.

O sistema $\bar{\mathcal{S}}$ está se movendo na direção x com velocidade (ordinária) $\sqrt{2/5}\,c$, relativa a $\mathcal{S}$. Usando as leis de transformação adequadas:

(d) Encontre os componentes de velocidade (ordinária) $\bar{u}_x$ e $\bar{u}_y$ em $\bar{\mathcal{S}}$.

(e) Encontre os componentes de velocidade própria $\bar{\eta}_x$ e $\bar{\eta}_y$ em $\bar{\mathcal{S}}$.

(f) Como verificação de coerência, verifique se

$$\bar{\eta} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{1 - \bar{u}^2/c^2}}.$$

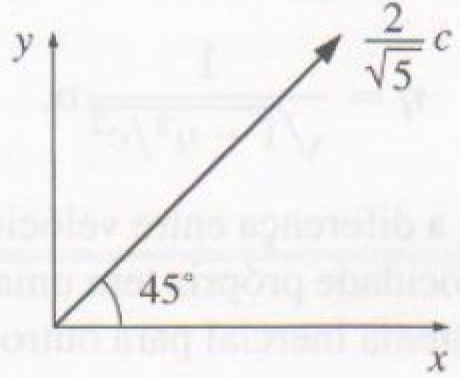

Figura 12.25

Griffiths

Problema 12.26 Encontre o produto invariante do quadrivetor velocidade com ele mesmo, $\eta^\mu \eta_\mu$.

Problema 12.27 Considere a partícula em movimento hiperbólico,

$$x(t) = \sqrt{b^2 + (ct)^2}\ , \quad y = z = 0.$$

(a) Encontre o tempo próprio τ como função de t, assumindo que os relógios estão ajustados de forma que $\tau = 0$ quando $t = 0$. [*Dica:* integre a Equação 12.37.] $d\tau = \sqrt{1 - u^2/c^2}\, dt$

(b) Encontre x e v (velocidade ordinária) como funções de τ.

(c) Encontre η^μ (velocidade própria) como função de t.