Lista 3 - MAT2352

Cálculo para Funções de Várias Variáveis II

Problema 1.

(b) *Temos curva*

$$\gamma(t) = (2t, 3\sin t, 3\cos t)$$

com $t \in [0, \pi/2]$.

Desta forma

$$\gamma'(t) = (2, 3\cos t, -3\sin t)$$

e

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2^2 + (3\cos t)^2 + (-3\sin t)^2} = \sqrt{13}$$

Uma vez que $f(x, y, z) = xyz$, *temos*

$$f(\gamma(t)) = 2t(3\cos t)(3\sin t) = 18t\cos t\sin t = 9t\sin 2t$$

donde

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f\ ds &= \int_\gamma f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\ dt \\
&= \int_0^{\pi/2} 9t\sin 2t \cdot \sqrt{13}\ dt \\
&= 9\sqrt{13}\int_0^{\pi/2} t \cdot \frac{1}{2}(-\cos 2t)'\ dt \\
&= \frac{9\sqrt{13}}{2}\Big[-t\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos 2t\ dt\Big] \\
&= \frac{9\sqrt{13}}{2}\Big[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}\Big] = \frac{9\sqrt{13}\pi}{4}
\end{aligned}$$

Problema 2. *Temos curva*

$$\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$$

com $t \in [0, \sqrt{2}]$.

Assim

$$\gamma'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)$$

donde

$$\begin{aligned}
\|\gamma'(t)\|^2 &= (\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1 \\
&= \cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t + 1 \\
&= 1 + t^2 + 1 = 2 + t^2
\end{aligned}$$

portanto, o comprimento da curva será dado por

$$\begin{aligned}
\int_\gamma 1\ ds &= \int_0^{\sqrt{2}} \|\gamma'(t)\|\ dt \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2+t^2}\ dt
\end{aligned}$$

e utilizando a integral 52 *da lista* 0

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2+t^2}\ dt = \left[t\sqrt{2+t^2} + \ln\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2+t^2}}{\sqrt{2}}\right)\right]\Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$$

Finalmente

$$\textit{comprimento de } \gamma = 2\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$$

Problema 3.

(a) O segmento que liga $(-2,0)$ *a* $(2,0)$ *pelo arco circunferência* $\gamma(t) = (t, \sqrt{4-t^2})$ *pode ser reparametrizado por*

$$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$$

com t *de* π *até* 0.

Logo,

$$\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$$

e, finalmente

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_\pi^0 \left\langle \overrightarrow{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle \, dt \\
&= \int_\pi^0 \langle (2\sin t, 2), (-2\sin t, 2\cos t) \rangle \, dt \\
&= \int_\pi^0 -4\sin^2 t + 4\cos t \, dt \\
&= -4\int_\pi^0 \sin^2 t + 4\int_\pi^0 \cos t \, dt \\
&= -4\Big(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\Big)\Big|_\pi^0 + 4\sin t\Big|_\pi^0 \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

(b) A elipse pode ser parametrizada por

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$$

com $t \in [0, 2\pi]$, *uma vez que é percorrida uma vez no sentido anti-horário.*

Assim,

$$\gamma'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$$

donde

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_0^{2\pi} \langle (2a\cos t + 2b\sin t, a\cos t - b\sin t), (-a\sin t, b\cos t) \rangle \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (2a\cos t + 2b\sin t)(-a\sin t) + (a\cos t - b\sin t)b\cos t \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} -2a^2\cos t\sin t - 2ab\sin^2 t + ab\cos^2 t - b^2\cos t\sin t \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} -a^2\sin 2t - ab\sin^2 t + ab\cos 2t - \frac{b^2}{2}\sin 2t \, dt \\
&= \Big(\frac{a^2}{2}\cos 2t - \frac{ab}{2}t + \frac{ab}{4}\sin 2t + \frac{ab}{2}\sin t + \frac{b^2}{4}\cos 2t\Big)\Big|_0^{2\pi} \\
&= -ab\pi
\end{aligned}$$

Problema 4.

(a) *Como γ é a intersecção das superfícies*

$$x+y=2\ ,\ x^2+y^2+z^2=2(x+y)$$

temos na segunda equação

$$\begin{aligned} & x^2-2x+y^2-2y+z^2=0 \\ \Rightarrow\quad & (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=2 \end{aligned}$$

é uma esfera de raio $\sqrt{2}$ centrada em $(1,1,0)$.
Fazendo uma translação da esfera para ter centro em $(0,0,0)$ e raio $\sqrt{2}$, o plano de corte torna-se $x+y=0$, induzindo uma angulação $\theta=-\pi/4$ em coordenadas polares, desta forma, ficamos com parametrização

$$\gamma(t)=\Big(\sqrt{2}\cos\frac{-\pi}{4}\sin t{+}1, \sqrt{2}\sin\frac{-\pi}{4}\sin t{+}1, \sqrt{2}\cos t\Big)=\Big(\sin t{+}1, -\sin t{+}1, \sqrt{2}\cos t\Big)$$

com $t\in[0,2\pi]$.
Desta forma

$$\gamma'(t)=\Big(\cos t, -\cos t, -\sqrt{2}\sin t\Big)$$

donde

$$\begin{aligned} \int_\gamma y\ dx+z\ dy+x\ dz &= \int_0^{2\pi}\Big(1-\sin t\Big)\cos t+\sqrt{2}\cos t\Big(-\cos t\Big)+\Big(\sin t+1\Big)(-\sqrt{2}\sin t)\ dt \\ &= \int_0^{2\pi}\cos t-\sin t\cos t-\sqrt{2}\cos^2 t-\sqrt{2}\sin^2 t-\sqrt{2}\sin t\ dt \\ &= \int_0^{2\pi}\cos t-\frac{1}{2}\sin 2t-\sqrt{2}-\sqrt{2}\sin t\ dt \\ &= \Big(\sin t+\frac{1}{4}\cos 2t-\sqrt{2}t+\sqrt{2}\cos t\Big)\Big|_0^{2\pi} \\ &= -2\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

(b) *A intersecção no plano xy é dada pela elipse*

$$\frac{x^2}{9}=1-\frac{y^2}{4}\Rightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

donde, uma parametrização da curva será

$$\gamma(t)=(3\cos t, 2\sin t, \cos^2 t)$$

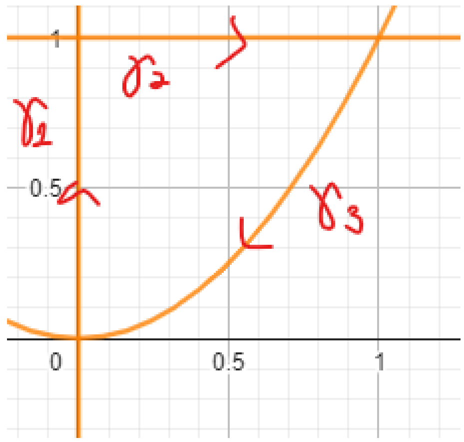
com $t\in[0,2\pi]$.
Assim,

$$\gamma'(t)=(-3\sin t, 2\cos t, 2\cos t\sin t)=(-3\sin t, 2\cos t, \sin 2t)$$

donde

$$\begin{aligned}
\int_\gamma x^2\ dx + x\ dy + z\ dz &= \int_0^{2\pi} -27\cos^2 t\sin t + 6\cos^2 t + \cos^2 t\sin 2t\ dt \\
&= \left(9\cos^3 t + 3t + \frac{3}{2}\sin 2t - \frac{1}{2}\cos^4 t\right)\Big|_0^{2\pi} \\
&= 6\pi
\end{aligned}$$

Problema 5. *Dividamos a curva em três partes donde temos parametrizações*



$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (0,t) \ \textit{com}\ t \in [0,1] \\
\gamma_2(t) &= (t,1) \ \textit{com}\ t \in [0,1] \\
\gamma_3(t) &= (t,t^2) \ \textit{com}\ t \ \textit{de}\ 1 \ \textit{até}\ 0
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\gamma_1'(t) &= (0,1) \\
\gamma_2'(t) &= (1,0) \\
\gamma_3'(t) &= (1,2t)
\end{aligned}$$

donde

$$\int_\gamma \sqrt{y}\ dx + \sqrt{x}\ dy = \int_{\gamma_1} \sqrt{y}\ dx + \sqrt{x}\ dy + \int_{\gamma_2} \sqrt{y}\ dx + \sqrt{x}\ dy + \int_{\gamma_3} \sqrt{y}\ dx + \sqrt{x}\ dy$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \sqrt{y}\ dx + \sqrt{x}\ dy &= \int_0^1 \sqrt{t}\cdot 0 + 0\ dt = 0 \\
\int_{\gamma_2} \sqrt{y}\ dx + \sqrt{x}\ dy &= \int_0^1 \sqrt{1}\cdot 1 + 0 = \int_0^1 1\ dt = 1
\end{aligned}$$

também

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_3} \sqrt{y}\ dx + \sqrt{x}\ dy &= \int_1^0 t\cdot 1 + \sqrt{t}\cdot 2t\ dt \\
&= \int_1^0 t + 2t^{3/2}\ dt = \frac{t^2}{2} + \frac{4}{5}t^{5/2}\Big|_1^0 = -\frac{13}{10}
\end{aligned}$$

donde

$$\int_\gamma \sqrt{y}\ dx + \sqrt{x}\ dy = 1 - \frac{13}{10} = -\frac{3}{10}$$

Problema 6.

(a) *Temos campo*

$$\overrightarrow{F} = (y, x)$$

e procuramos campo escalar ϕ tal que

$$\nabla\phi = \overrightarrow{F}$$

donde

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x}\phi, \frac{\partial}{\partial y}\phi) = (y, x)$$

e temos sistema

$$\left| \begin{array}{ll} \frac{\partial}{x}\phi & = y \\ \frac{\partial}{\partial y}\phi & = x \end{array} \right.$$

Da primeira equação, integrando com respeito a x obtemos

$$\int \frac{\partial}{\partial x}\phi \ dx = \int y \ dx$$

donde

$$\phi(x, y) = xy + C(y)$$

Utilizando a forma de ϕ acima encontrada

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi = x + \frac{d}{dy}C(y)$$

e pela segunda equação devemos ter

$$\frac{d}{dy}C(y) = 0 \Rightarrow C(y) = const$$

Finalmente, temos função potencial

$$\phi(x, y) = xy + k$$

donde o campo é conservativo.

Calculando a integral obtemos portanto

$$\int_{(1,1)}^{(2,2)} y \ dx + x = \phi(2, 2) - \phi(1, 1) = 3$$

(b) *Com campo vetorial*

$$\overrightarrow{F} = \Big(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\Big)$$

e ϕ campo escalar com $\nabla\phi = \overrightarrow{F}$ devemos ter

$$\left| \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial x}\phi & = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial}{\partial y}\phi & = \frac{y}{x^2+y^2} \end{array} \right.$$

donde, da primeira equação

$$\int \frac{\partial}{\partial x}\phi \ dx = \int \frac{x}{x^2+y^2} \ dx$$

e temos

$$\phi(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2} \ dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C(y)$$

Agora,

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi = \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{d}{dy}C(y)$$

e como antes, comparando com a segunda equação do sistema, $C(y) = const$, chegando a forma

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + k$$

Considerando como domínio $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, no qual os pontos estão definidos, temos que ϕ é de classe $\mathscr{C}^1$ donde $\overrightarrow{F}$ é campo conservativo.

Assim,

$$\int_{(-1,0)}^{(1,0)} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{r} = \phi(1,0) - \phi(-1,0) = 0$$

(c) *Temos campo vetorial*

$$\overrightarrow{F} = (yz, xz, xy)$$

donde são equações de $\nabla\phi = \overrightarrow{F}$

$$\left| \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial x}\phi & = yz \\ \frac{\partial}{\partial y}\phi & = xz \\ \frac{\partial}{\partial z}\phi & = xy \end{array} \right.$$

Da primeira equação

$$\int \frac{\partial}{\partial x}\phi \ dx = \int yz \ dx$$

donde

$$\phi(x,y,z) = xyz + C(y,z)$$

Temos então

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi = xz + \frac{d}{dy}C(y,z)$$

e comparando com a segunda equação, necessariamente

$$\frac{d}{dy}C(y,z) = 0 \Rightarrow C(y,z) = D(z)$$

i.e., é uma função apenas de z.

Logo

$$\phi(x,y,z) = xyz + D(z)$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial z}\phi = xy + \frac{d}{dz}D(z)$$

e comparando com a terceira equação, obtemos

$$\frac{d}{dz}D(z) = 0 \Rightarrow D(z) = const$$

Finalmente, temos potencial

$$\phi(x,y,z) = xyz + k$$

Assim, a integral de campo é dada por

$$\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \phi(3,5,0) - \phi(1,1,2) = -2$$

Problema 7.

(a) *Temos campo vetorial*

$$\overrightarrow{F} = (P(x,y), Q(x,y)) = (x, x)$$

Vejamos o rotacional do campo

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \ , \ \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

então

$$rot\overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 1$$

*e o campo **NÃO** é conservativo.*

(b) *Com o campo*

$$\overrightarrow{F} = (2xe^y + y, x^2e^y + x - 2y)$$

temos que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xe^y + 1$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xe^y + 1$$

donde

$$rot\overrightarrow{F} = 0$$

*e como $D = \mathbb{R}^2$ é domínio simplesmente conexo, temos que o campo **É** conservativo.*

Para encontrar o campo potencial, resolvemos

$$\nabla\phi = \overrightarrow{F}$$

donde

$$\left| \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial x}\phi & = 2xe^y + y \\ \frac{\partial}{\partial y}\phi & = x^2e^y + x - 2y \end{array} \right.$$

logo,

$$\int \frac{\partial}{\partial x}\phi \ dx = \int 2xe^y + y \ dx$$

donde

$$\phi(x,y) = x^2e^y + xy + C(y)$$

Derivando com respeito à y

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi = x^2e^y + x + \frac{d}{dy}C(y)$$

e comparando com a segunda equação do sistema, devemos ter

$$\frac{d}{dy}C(y) = -2y$$

donde

$$C(y) = -y^2 + const$$

e finalmente, temos potencial

$$\phi(x,y) = x^2e^y + xy - y^2 + k$$

(c) *Temos campo*

$$\overrightarrow{F} = (y^2\cos x + z^3, 2y\sin x - 4, 3xz^2 + 2)$$

Agora

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y\cos x \ , \ \frac{\partial P}{\partial z} = 3z^2$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y\cos x \ , \ \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial R}{\partial x} = 3z^2 \ , \ \frac{\partial R}{\partial y} = 0$$

Portanto

$$rot\overrightarrow{F} = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0\Big)\overrightarrow{i} + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\overrightarrow{j} + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\overrightarrow{k} = 0$$

e como $D = \mathbb{R}^3$ é domínio simplesmente conexo, temos que $\overrightarrow{F}$ ***É*** *campo conservativo.*

Para encontrar o seu potencial resolvemos

$$\left| \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial x}\phi & = y^2\cos x + z^3 \\ \frac{\partial}{\partial y}\phi & = 2y\sin x - 4 \\ \frac{\partial}{\partial z}\phi & = 3xz^2 + 2 \end{array} \right.$$

donde

$$\int \frac{\partial}{\partial x}\phi \ dx = \int y^2\cos x + z^3 \ dx$$
$$\Rightarrow \quad \phi(x,y,z) = y^2\sin x + xz^3 \ C(y,z)$$

Derivando com respeito a y

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi = 2y\sin x + \frac{\partial}{\partial y}C(y,z)$$

e comparando com a segunda equação, devemos ter

$$\frac{\partial}{\partial y} C(y,z) = -4$$

donde

$$C(y,z) = -4y + D(z)$$

obtendo

$$\phi(x,y,z) = y^2 \sin x + xz^3 - 4y + D(z)$$

Derivando com respeito a z

$$\frac{\partial}{\partial z}\phi = 3xz^2 + \frac{d}{dz}D(z)$$

e comparando com a terceira equação

$$\frac{d}{dz}D(z) = 2$$

donde

$$D(z) = 2z + const$$

Finalmente, temos potencial

$$\phi(x,y,z) = y^2 \sin x + xz^3 - 4y + 2z + k$$

(d) *Note que* $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *não é simplesmente conexo, logo não vale o Teorema do Rotacional (recíproca).*

Ademais, considere ***curva fechada*** $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$*, um círculo em torno da origem, então*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_0^{2\pi} \left\langle \left(-\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right), (-\sin t, \cos t) \right\rangle \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \langle (-\sin t, \cos t), (-\sin t, \cos t) \rangle \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} \, dt = 2\pi \neq 0
\end{aligned}$$

donde o campo ***NÃO*** *é conservativo.*

(e) *Neste caso o domínio é simplesmente conexo, ademais* $rot\overrightarrow{F} = 0$ *donde o campo* ***É*** *conservativo.*

Para encontrar o potencial, temos

$$\nabla \phi = \overrightarrow{F}$$

i.e.,

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x}\phi, \frac{\partial}{\partial y}\phi\Big) = \Big(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Big)$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

donde

$$\int \frac{\partial}{\partial x}\phi \; dx = \int -\frac{y}{x^2+y^2} \; dx$$

e

$$\phi(x,y) = -\arctan\frac{x}{y} + C(y)$$

Da segunda equação obtemos $C(y) = const.$

Assim, a forma geral do potencial é

$$\phi(x,y) = -\arctan\frac{x}{y} + k$$

A princípio, $-\arctan\frac{x}{y}$ não é de classe $\mathscr{C}^1$ em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$ uma vez que não está bem definida em $y = 0$.

Porém, justamente pela constante k, as descontinuidades podem ser concertadas.

Note que, para $y > 0$ e x fixado

$$\lim_{y\to 0} -\arctan\frac{x}{y} = -\frac{\pi}{2}$$

e, para $y < 0$

$$\lim_{y\to 0} -\arctan\frac{x}{y} = \frac{\pi}{2}$$

Assim, definindo

$$\phi(x,y) = \begin{cases} -\arctan\frac{x}{y} + \frac{\pi}{2} & ,y > 0 \\ 0 & y = 0 \\ -\arctan\frac{x}{y} - \frac{\pi}{2} & y < 0 \end{cases}$$

temos que ϕ é de classe $\mathscr{C}^1$ e é a função potencial desejada.

*(f) Como no Problema 6 (b), o campo **É** conservativo e temos campo potencial*

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + k$$