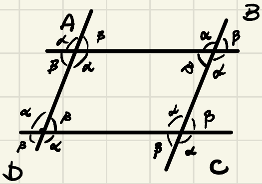
1) Um quadrilátero $ABCD$ é um **paralelogramo** se seus pares de lados opostos são paralelos. Prove que:
(a) $ABCD$ é um paralelogramo se, se somente se, seus pares de ângulos opostos tiverem mesma medida.
(b) $ABCD$ é um paralelogramo se, se somente se, seus pares de lados opostos tiverem mesma medida.
(c) $ABCD$ é um paralelogramo se, se somente se, suas diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios.

ABCD paralelogramo se seus pares de lados opostos são paralelos.

a) ABCD paralelogramo $\Leftrightarrow$ pares de ângulos opostos com mesma medida.

($\Rightarrow$) pares de lados opostos paralelos $\Rightarrow$ pares de angulos opostos iguais

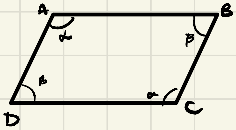
Seja ABCD o paralelogramo abaixo. Logo, temos AD e BC, $AD \parallel BC$ cortados pelas retas transversais AB e DC, com $AB \parallel DC$.
Assim, sai diretamente do Teorema dos ângulos alternos internos que $D\hat{A}B \equiv D\hat{C}B$ e $A\hat{D}C \equiv A\hat{B}C$, pois $\alpha + \beta = 180°$, logo podemos usar o teorema.



($\Leftarrow$) Pares de angulos opostos com a mesma medida $\Rightarrow$ pares de lados opostos paralelos

Seja ABCD um quadrilátero tal que seus pares de ângulos opostos possuem mesma medida, ou seja, $\angle A \equiv \angle C$ e $\angle B \equiv \angle D$
Se somamos $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$. Como $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D}$, então posso subistituir a equação por $2\hat{A} + 2\hat{D} = 360° \Rightarrow 2(\hat{A} + \hat{D}) = 360° \Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = 180°$

Assim, temos dois ângulos colaterais internos que são suplementares determinados pela reta inclinada AD em relação às retas AB e DC. Logo, AB e DC são paralelas.

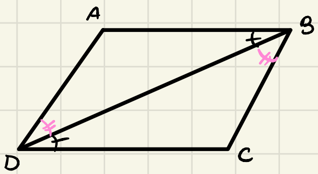


Analogamente para $\hat{A}$ e $\hat{B}$, descobre-se que AD e BC são paralelos. Logo, ABCD é paralelogramo.

b) ABCD é um paralelogramo $\Leftrightarrow$ seus pares de lados opostos têm mesma medida.

($\Rightarrow$) Pares de lados opostos paralelos $\Rightarrow$ pares de lados opostos de mesma medida

Seja ABCD um paralelogramo. Logo $AB \parallel CD$ e $AD \parallel BC$.



Traçando a diagonal BD (ou seja, uma transversal cortando as paralelas AB e DC).

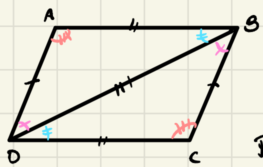
Assim, pelo teorema dos ângulos alternos internos temos que $A\hat{B}D \equiv B\hat{D}C$.

Além disso, BD é uma transversal às retas paralelas AD e BC, logo, pelo mesmo teorema, $A\hat{D}B \equiv C\hat{B}D$.

Além disso, pelo caso de congruência de triângulos LAL, temos $\Delta ABD \equiv DBC$ o que implica que seus lados correspondentes são congruentes e então $AB \equiv CD$ e $AD \equiv BC$.

Portanto, os pares de lados opostos têm a mesma medida.

($\Leftarrow$) Pares de lados opostos de mesma medida $\Rightarrow$ pares de lados opostos paralelos



Temos o quadrilatero ABCD tal que $AB \equiv CD$ e $AD \equiv BC$. Traçando a diagonal BD, dividimos o quadrilátero em 2 triangulos (ΔABD e ΔBCD)

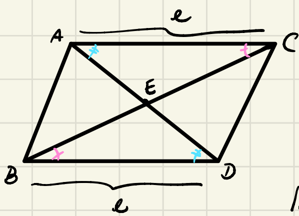
Pelo caso LLL, temos que os triângulos são congruentes $\Rightarrow$ os ângulos correspondentes dos triângulos são congruentes.

Como os ângulos $A\hat{B}D$ e $B\hat{D}C$ são alternos internos congruentes, temos que $AB \parallel DC$. Analogamente, $A\hat{D}B \equiv D\hat{B}C$ e alternos internos $\Rightarrow AD \parallel BC$.

Portanto, os pares de lados opostos são paralelos $\Rightarrow$ ABCD é paralelogramo.

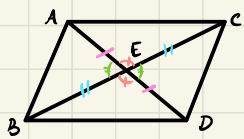
c) $ABCD$ é paralelogramo $\Leftrightarrow$ suas diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios.

($\Rightarrow$) Seja $ABCD$ um paralelogramo e suas diagonais AC e BD.



Quero provar que E é o ponto médio das diagonais.
Sei que $AC \equiv BD$, pois $ABCD$ é paralelogramo.
Seja l a medida desses lados.
Temos também que BC é uma transversal cortando os lados paralelos AC e BD $\Rightarrow$ $A\hat{C}B \equiv C\hat{B}D$ (pelo teorema dos ângulos alternos internos. Analogamente, AD é uma transversal cortando as retas paralelas AC e BD e como $C\hat{A}D$ e $B\hat{D}A$ são alternos internos $\Rightarrow$ $C\hat{A}D \equiv B\hat{D}A$.
Dado os triângulos AEC e BED, temos pelo caso ALA que $\Delta AEC \equiv \Delta BED$
Logo, $ED \equiv AE$ e $BE \equiv CE$ (pois são lados correspondentes)
Portanto, as diagonais são cortadas em seus respectivos pontos médios (ponto E).

($\Leftarrow$) Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que as diagonais BC e AD se cortam em seus respectivos pontos médios (E).



Se as diagonais se cortam no ponto médio, temos $AE \equiv ED$ e $BE \equiv EC$.
Sei também que $A\hat{E}C \equiv B\hat{E}D$ e $A\hat{E}B \equiv D\hat{E}C$ (pois são opostos pelo vértice) Logo, por LAL, temos que $\Delta BED \equiv \Delta AEC$ e $\Delta AEB \equiv \Delta CED$. Portanto, $AC \equiv BD$ e $AB \equiv CD$ e pelo item (b) temos que $ABCD$ é um paralelogramo.