

REF 3401 · 14/12/21

Hje: Exercícios

---

Revisão: Solução cinematicamente admissível (C)

" Solução equilibrado e com FP e/ou bases plastificadas em número e posições suficientes p/ configurar mecanismo "

Solução estaticamente admissível (E)

" Solução equilibrado e que respeita os critérios de plastificação "

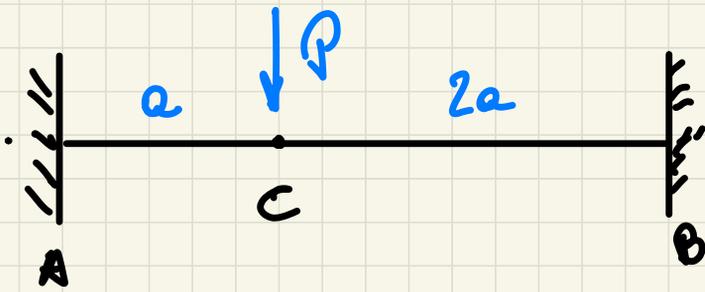
Teorema Cinemático: Todas as soluções

(C) têm fator multiplicativo do carregamento maior ou igual a  $\hat{\sigma}_{II}$

Teorema Estático: Todas as soluções

(E) têm fator multiplicativo do carregamento menor ou igual a  $\hat{\sigma}_{II}$ .

Ex 1



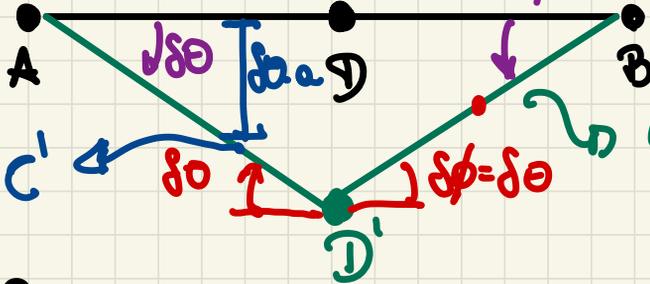
$$T_i = \frac{3Mp}{8}$$

"Último sub"

Um outro mecanismo de colapso



$$\delta f$$



cond. de deformado

$$\delta f = \frac{3}{2} a \delta \theta$$

$$\delta T_i = \underbrace{Mp \delta \theta}_A + \underbrace{Mp \delta \theta}_B + \underbrace{Mp 2 \delta \theta}_D = 4Mp \delta \theta$$

$$\delta T_e = r_c P \cdot \underbrace{\delta \theta a}_{CC'} = r_c P a \delta \theta$$

$$T_{DV} \quad \delta \bar{T}_i = \delta T_e \Rightarrow T_c P_a \delta \theta = 4 M_p \delta \theta$$

Como  $\delta \theta$  é arbitrário

$$T_c = \frac{4 M_p}{P_a}$$

Verificar com  
Teor. Cinemático

---

Metodologia p/ AL pelos Teoremas

Cinemático e Estático

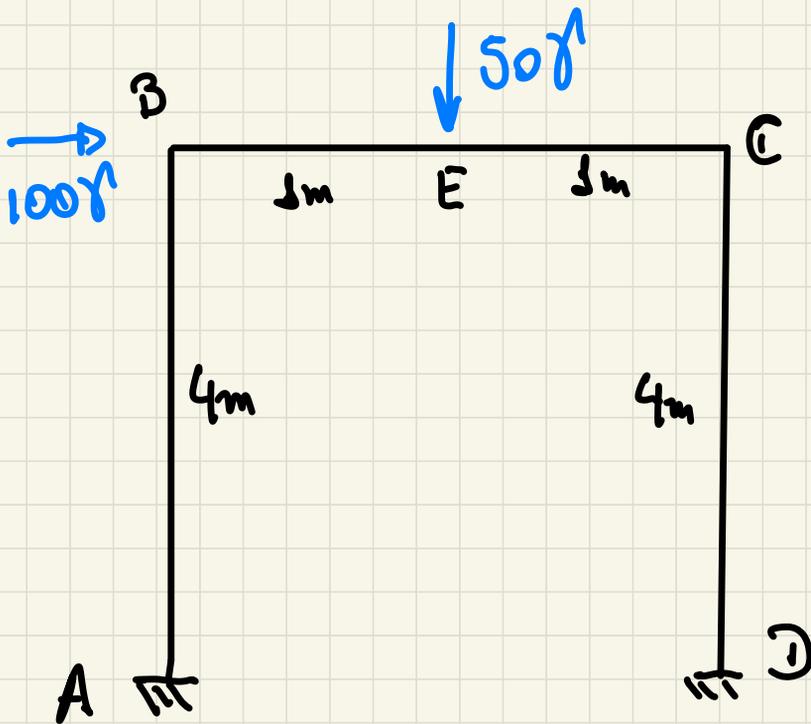
1) Proporho algumas soluções (C) possíveis  
( $i = 1, 2, 3 \dots$ )

2) Tomo como melhor candidata aquele  
com menor fator multiplicativo da carga

3) Verifico, para a melhor candidata, se  
há respeito a critério de plasticidade

4) Se 3) é verificado, análise concluído. Caso  
contrário, pesquisar outro mecanismo!

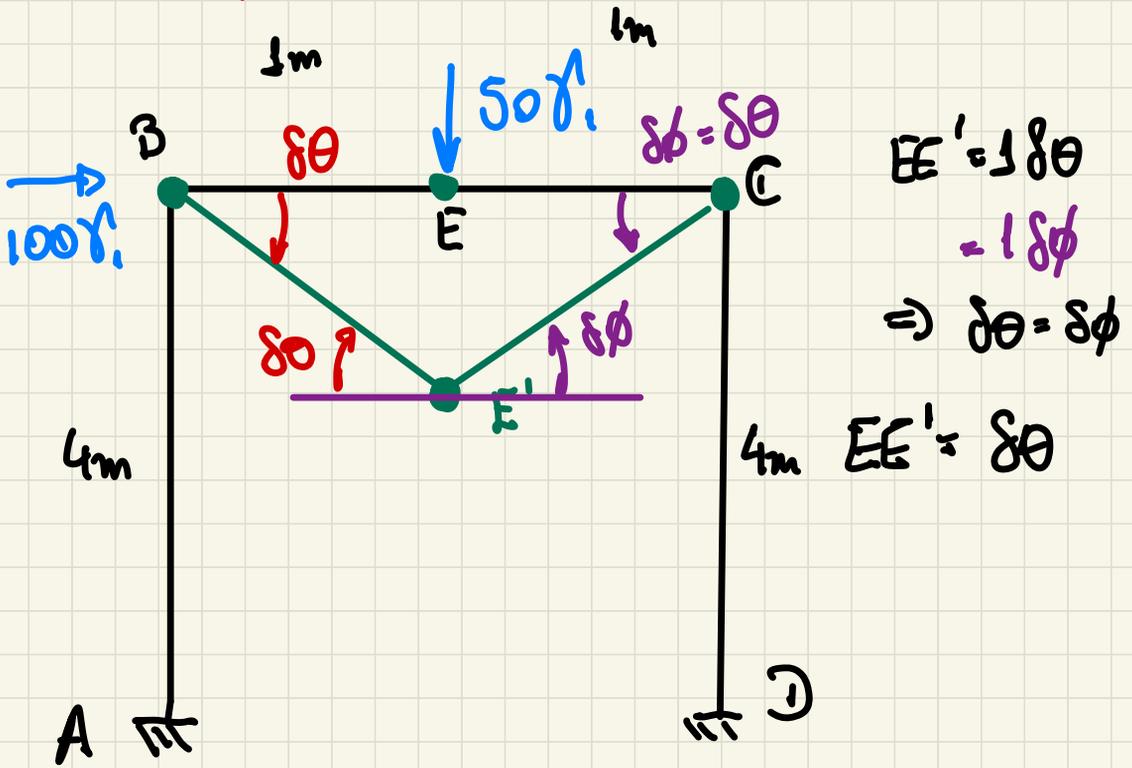
Exemplo. Usar Teoremas Estático e Cinemático para definir o mecanismo de colapso plástico e o DMF na iminência do colapso!



$$M_p = 200 \text{ kNm}$$

"Vimos pelo método passo a passo que  $\lambda_{III} = 2$ "

# Mecanismo C1

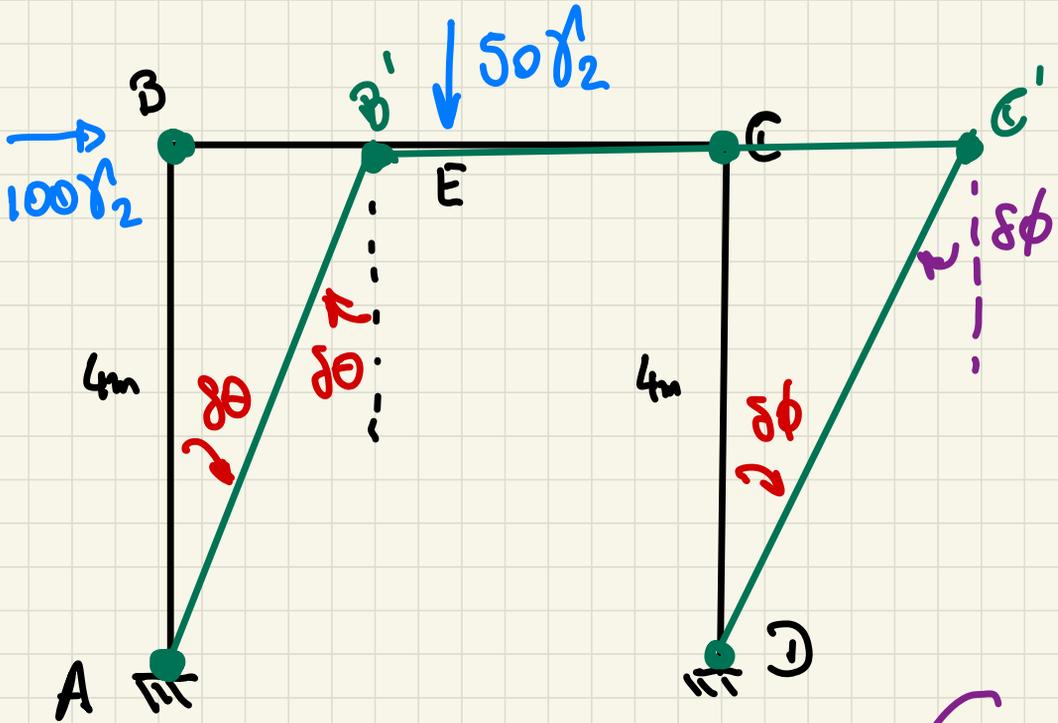


$$\delta T_e = 50\gamma_1 \underbrace{\delta\theta}_{EE'} = 50\gamma_1 \delta\theta$$

$$\delta T_i = \underbrace{M_p \delta\theta}_B + \underbrace{M_p \delta\phi}_C + \underbrace{M_p (\delta\theta + \delta\phi)}_E = 4M_p \delta\theta$$

$$\delta T_i = \delta T_e \Rightarrow \gamma_1 = \frac{4M_p}{50} = \frac{4 \cdot 200}{50} = 16 \parallel$$

# Mecanismo $C_2$



$$BB' = 4\delta\theta \quad CC' = 4\delta\phi$$

$$BB' = CC' \Rightarrow \delta\theta = \delta\phi$$

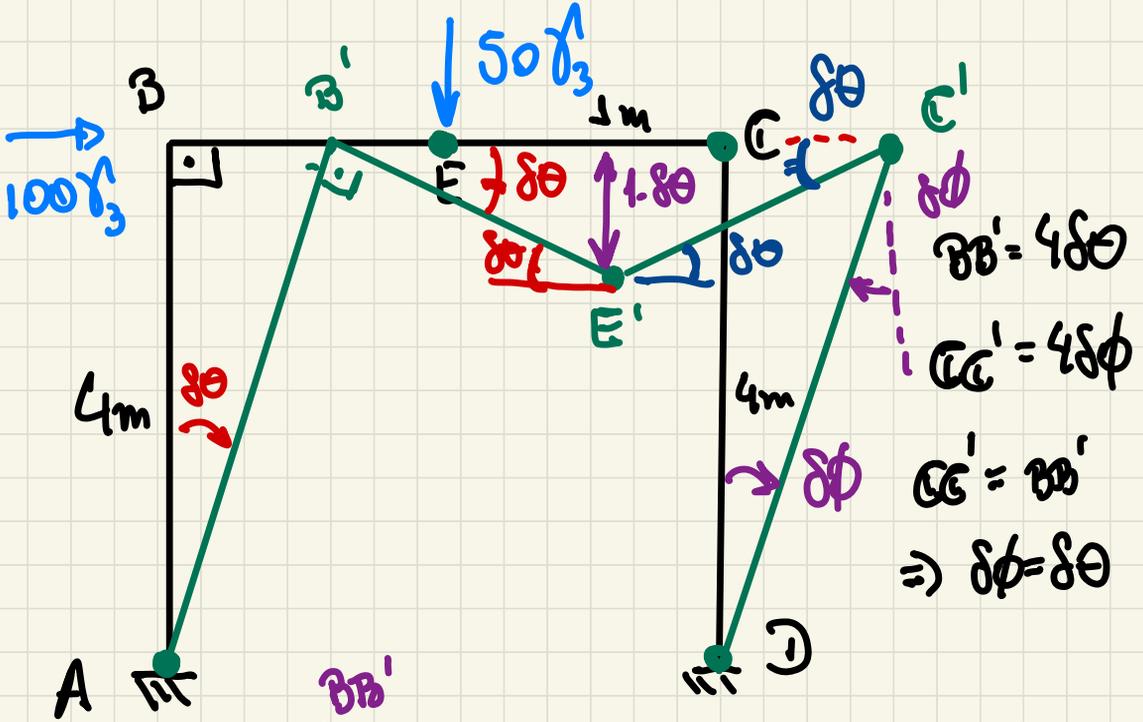
$$\delta T_e = 100 \text{ N}_2 \cdot 4\delta\theta$$

$$\delta T_i = \underbrace{M_p \delta\theta}_A + \underbrace{M_p \delta\theta}_B + \underbrace{M_p \delta\phi}_C + \underbrace{M_p \delta\phi}_D = 4M_p \delta\theta$$

$$TDV: \delta T_i = \delta T_e \Rightarrow \text{N}_2 = \frac{4M_p}{400} = 2/1$$

# Mecanismo $C_3$

$B'E'C'$  isósceles



$$\begin{aligned} BB' &= 4\delta\theta \\ CC' &= 4\delta\phi \\ CE' &= BB' \\ \Rightarrow \delta\phi &= \delta\theta \end{aligned}$$

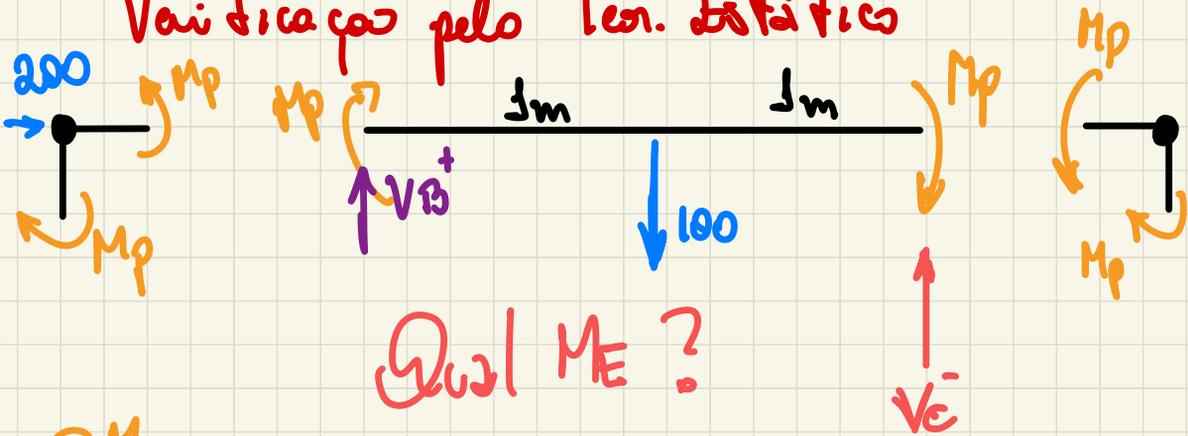
$$\delta T_e = \underbrace{100 \text{ N}}_B \cdot \underbrace{4\delta\theta}_{BB'} + \underbrace{50 \text{ N}}_E \cdot \underbrace{1.80\delta\theta}_{E} = 450 \text{ N} \delta\theta$$

$$\delta T_i = \underbrace{M_p \delta\theta}_A + \underbrace{M_p 2\delta\theta}_E + \underbrace{M_p (\delta\theta + \delta\phi)}_C$$

$$\underbrace{+ M_p \delta\phi}_D = 6 M_p \delta\theta$$

$$T.D.V.: \delta T_i = \delta T_e \Rightarrow \gamma_3 = \frac{6 M_p}{450} = 2,67$$

# Verificação pelo Teor. Estático



Qual  $M_E$ ?

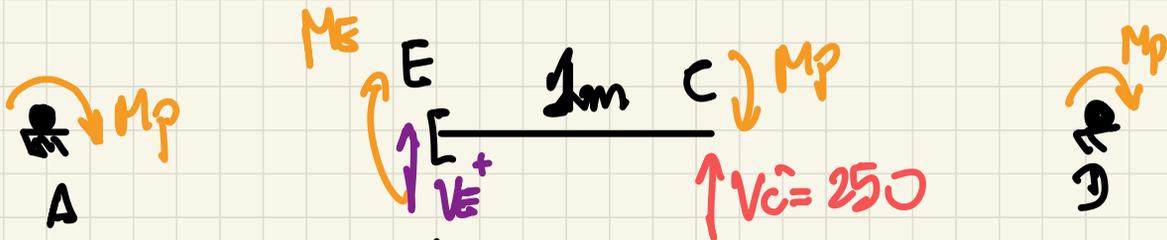
Equilíbrio do trecho Horizontal

$$\sum M_{B^+} = 0$$

$$-M_p - M_p + 2V_c^- - 100 \cdot 1 = 0$$

$$2V_c^- = 2M_p + 100$$

$$V_c^- = 250 \text{ kN}$$



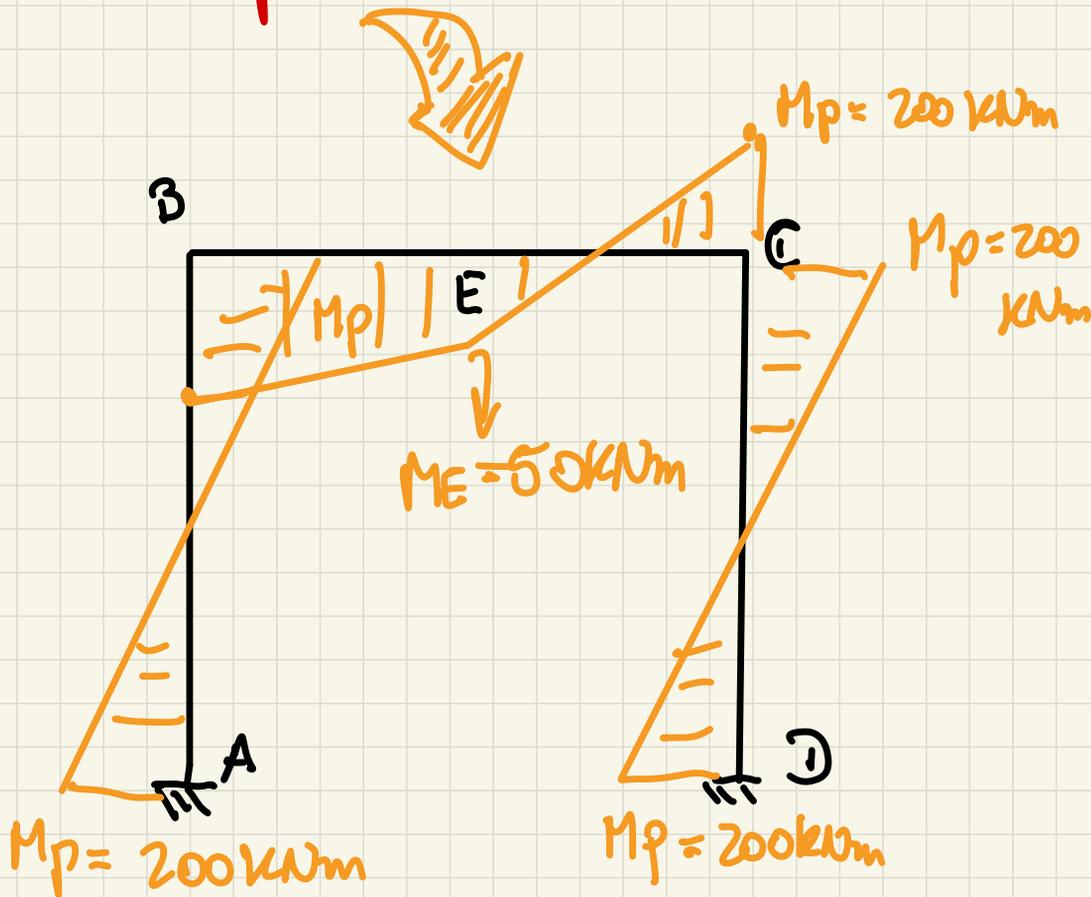
Equilíbrio EC

$$\Rightarrow M_E + M_p = 250 \cdot 1$$

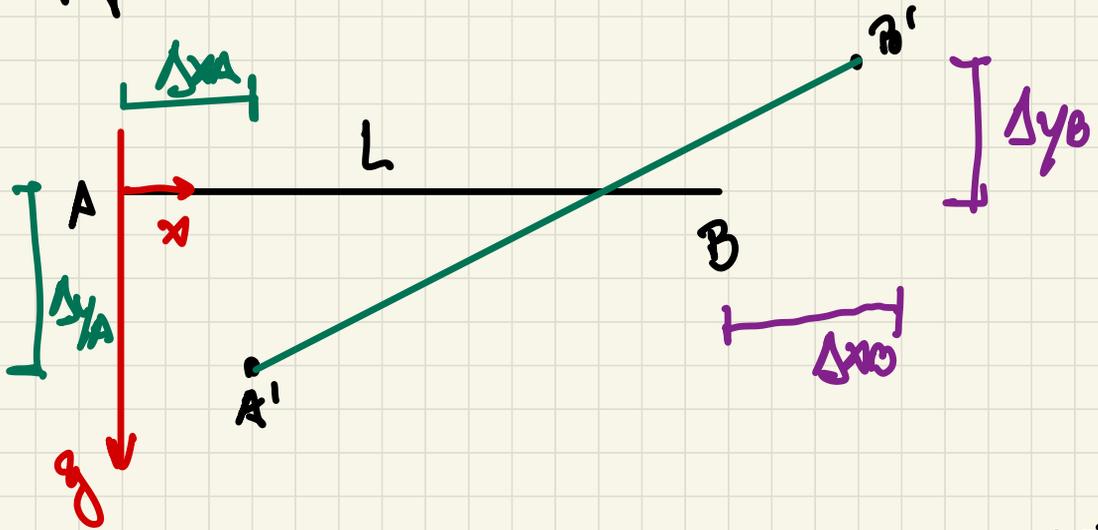
$$\Rightarrow M_E = 250 - M_p < M_p$$

Logo  $\sigma_2$  respeito critérios de plastificação  
e ela é a cont. derivado  $\Rightarrow \delta_{II} = \delta_2 = 2$

Diagrama de momentos fletores na iminência do colapso



Discussão: Barra AB rígida. Quero relacionar deslocamentos nas extremidades da barra. Assumir pequenos deslocamentos



$$\vec{(B'-A')} = (L + \Delta x_B - \Delta x_A) \vec{i} + (-\Delta y_B - \Delta y_A) \vec{j}$$

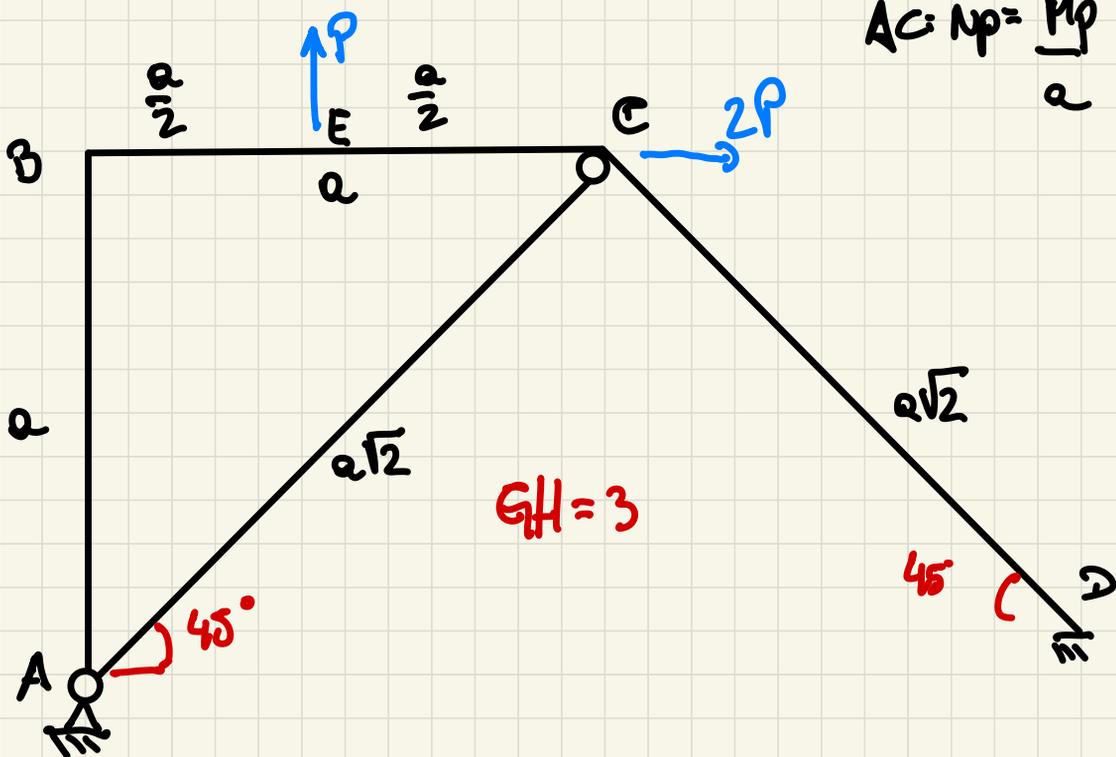
$$\|\vec{(B'-A')}\|^2 = L^2 + \cancel{\Delta x_B^2} + \cancel{\Delta x_A^2} + 2L\Delta x_B$$

$$- 2L\Delta x_A - \cancel{\Delta x_B \Delta x_A} + \cancel{\Delta y_B^2} + \cancel{\Delta y_A^2} + \cancel{2\Delta y_A \Delta y_B}$$

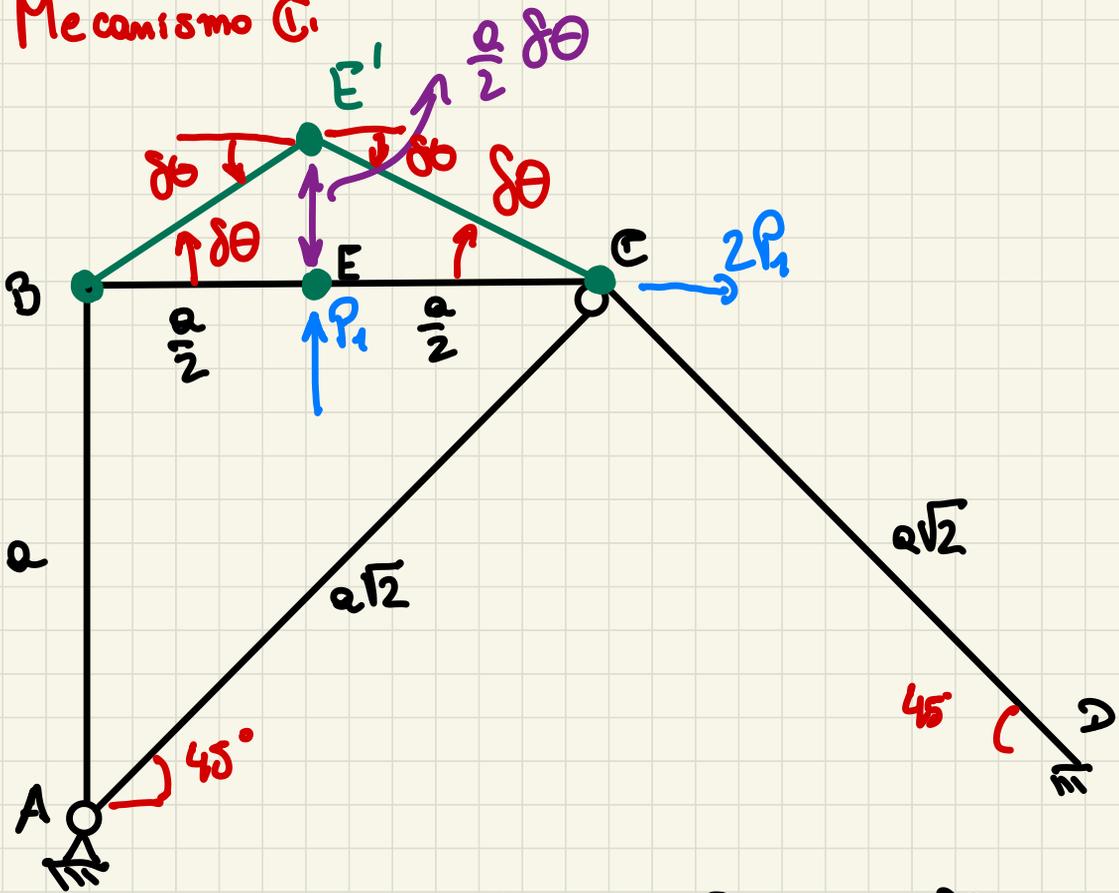
$$= L^2 \Rightarrow 2L\Delta x_B = 2L\Delta x_A$$

$$\Delta x_B = \Delta x_A$$

Exemplo. Usar Teoremas Estático e Cinemático para definir o mecanismo de colapso plástico e o DMF na iminência do colapso!



Mecanismo C:



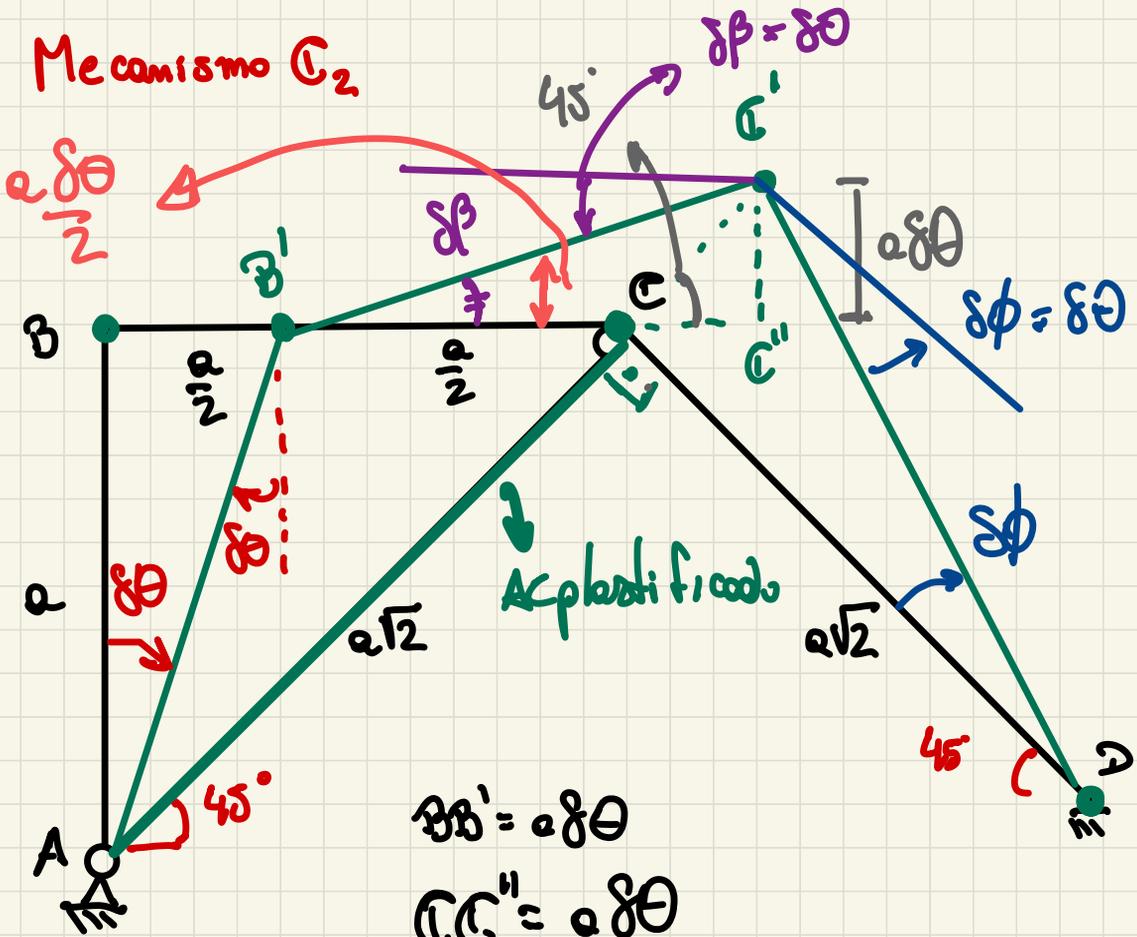
$$\delta T_e = P_1 \frac{a}{2} \delta\theta$$

$$\delta T_i = \underbrace{M_p \delta\theta}_B + \underbrace{2M_p \delta\theta}_E + \underbrace{M_p \delta\theta}_C = 4M_p \delta\theta$$

$$\text{TUV: } \delta T_i = \delta T_e \Rightarrow P_1 \frac{a}{2} = 4M_p$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{8M_p}{a}$$

# Mecanismo $C_2$



$$BB' = a \delta \theta$$

$$CC'' = a \delta \theta$$

$$CC' = a \delta \theta \sqrt{2} = \delta \phi a \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \delta \phi = \delta \theta$$

$$B'C'C'' : \sin \delta \beta \sim \delta \beta = \frac{C'C''}{B'C'} = \frac{a \delta \theta}{a} = \delta \beta = \delta \theta$$

$$\delta \mathcal{L}_i = \underbrace{0}_A + \underbrace{M_p (\delta \theta + \delta \beta)}_B + M_p (\delta \beta + \delta \phi) + M_p \delta \phi + N_p CC'$$

"pré-existente"

$$\delta T_i = 2M_p \delta\theta + 2M_p \delta\theta + M_p \delta\theta$$

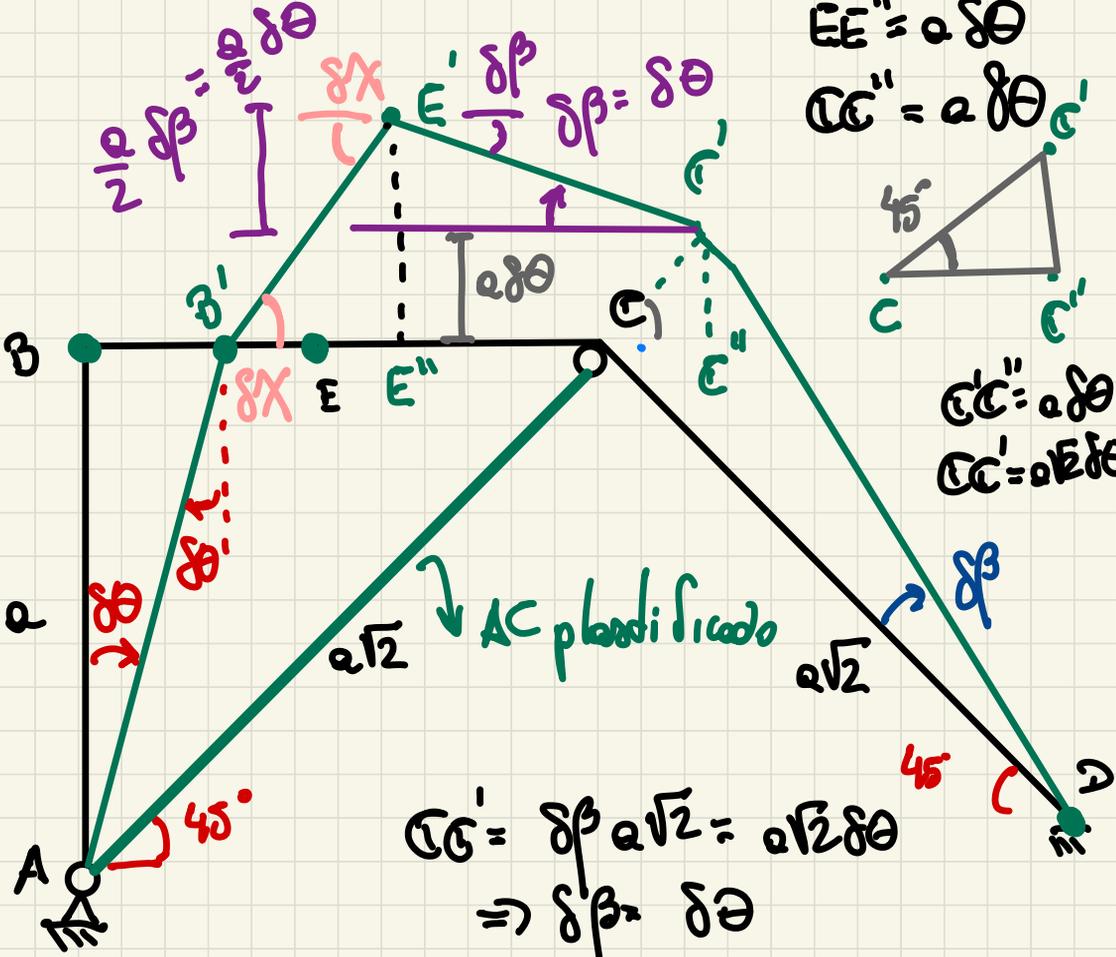
$$+ \boxed{\frac{M_p}{a}} a\sqrt{2} \delta\theta = M_p (5 + \sqrt{2}) \delta\theta$$

$M_p$

$$\delta T_e = \underbrace{P_2 a \frac{\delta\theta}{2}}_E + 2P_2 \underbrace{a \delta\theta}_{a\epsilon''} = \frac{5}{2} P_2 a \delta\theta$$

$$\text{TUV: } \delta T_i = \delta T_e \Rightarrow P_2 = \frac{2}{5} (5 + \sqrt{2}) \frac{M_p}{a} \\ = 2,56 M_p / a$$

Mecanismo C,



$BB' = a \delta\theta$   
 $EE'' = a \delta\theta$   
 $CC'' = a \delta\theta$

$CC'' = a \delta\theta$   
 $CC' = a \delta\theta$

$CC' = \delta\beta a\sqrt{2} = a\sqrt{2}\delta\theta$   
 $\Rightarrow \delta\beta = \delta\theta$

$B'E''E' : \sin \delta\alpha \sim \delta\alpha = \frac{EE''}{B'E'} = \frac{\frac{3}{2} a \delta\theta}{\frac{a}{2}} = 3\delta\theta$

$\delta T_i = \underbrace{M_p (\delta\alpha + \delta\theta)}_B + \underbrace{M_p (\delta\alpha + \delta\beta)}_D$   
 $+ \underbrace{M_p \delta\theta}_D + M_p CC'$

$$\delta T_c = 4M_p \delta\theta + 4M_p \delta\theta + M_p \delta\theta + M_p a\sqrt{2} \delta\theta = 9M_p \delta\theta + \frac{M_p a\sqrt{2}}{a} \delta\theta$$

$$= M_p (9 + \sqrt{2}) \delta\theta$$

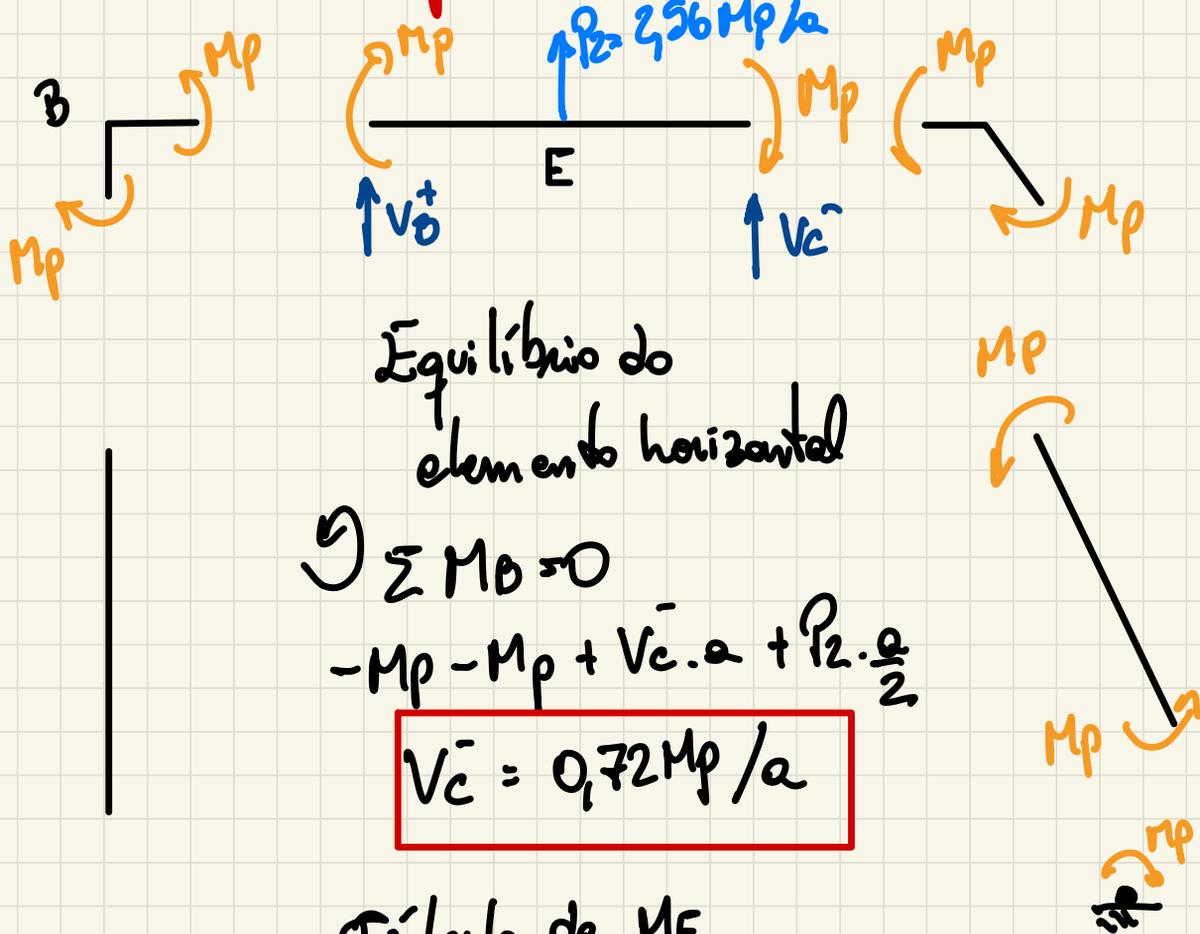
$$\delta T_e = P_3 \left( a + \frac{a}{2} \right) \delta\theta + 2P_3 \left( a \delta\theta \right) \frac{CE''}{CE''}$$

$$= \frac{7}{2} P_3 a \delta\theta$$

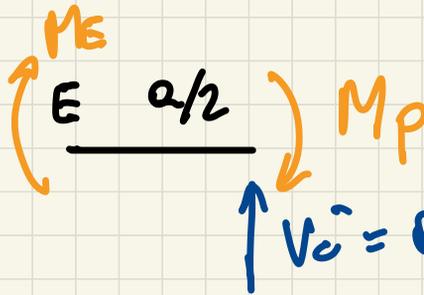
$$\text{T.D.V.} \quad \delta T_c = \delta T_e \Rightarrow P_3 = \frac{2}{7} (9 + \sqrt{2}) \frac{M_p}{a}$$

$$\Rightarrow P_3 = 2,37 \frac{M_p}{a}$$

# Verificação pelo Método Estático



Cálculo de  $M_E$



Equilíbrio

$$M_E + M_p = V_{c^-} \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow$$

$$M_E = -0,64 M_p$$

Logo  $G_2$  também respeito critério de plasticificação. Assim  $G_2$  é o mecanismo de colapso plástico e  $P_{II} = P_2 = 256 M_p/a$

Diagrama de momentos fletores (em ABCD) e força normal (AC) na iminência do colapso

