1. Definição e exemplos

Podemos pensar, de maneira intuitiva, em uma superfície em $\mathbb{R}^n$, como um 'conjunto bidimensional'. Para nossos propósitos, é conveniente começar com o conceito de *superfície parametrizada.*

2. Superfícies parametrizadas

Definição 2.1. *Uma* ***superfície parametrizada*** *em* $\mathbb{R}^3$ *é uma função contínua* $\Sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- Se $\Sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, para cada $(u, v) \in U$, as funções $x(u, v), y(u, v)$ e $z(u, v)$ são denominadas *funções coordenadas* ou, simplesmente, *coordenadas* de Σ. Diremos que Σ é diferenciável, de classe $\mathcal{C}^1$, etc, se as funções coordenadas o forem.
- O termo *"superfície"* é frequentemente usado para denominar tanto uma superfície parametrizada $\Sigma : U \to \mathbb{R}$, como sua imagem $Im(\Sigma)$. Espera-se que o significado, em cada caso, fique claro do contexto.
- Usaremos a notação $\vec{X}(u, v) = x(u, v)\vec{i}y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$ para indicar o vetor posição, para cada ponto da superfície.

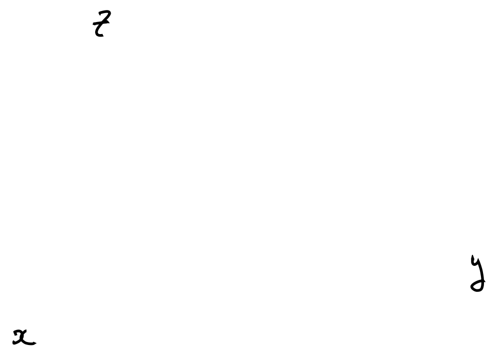
Exemplo 2.2.

(1) *O plano de equação geral* $ax + by + cz = d$*, com* $c \neq 0$ *pode ser parametrizado por*

$$\Sigma : \begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = \frac{d-au-bv}{c}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Date: December 2, 2023.

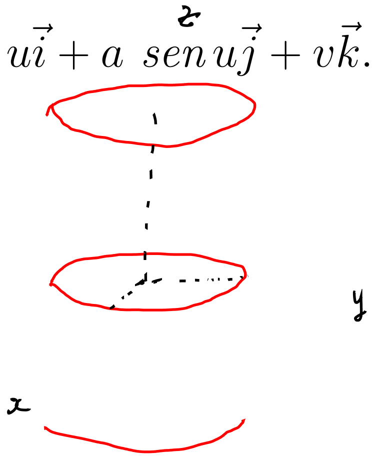
O vetor posição é $\vec{X}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + \frac{d-au-bv}{c}\vec{k}$.



(2) *O cilindro de raio* $a > 0$, $x^2+y^2 = a^2$, *pode ser parametrizado por*

$$\Sigma : \begin{cases} x(u,v) = a\cos u \\ y(u,v) = a \ \text{sen}\, u \\ z(u,v) = v, \quad u \in [0,2\pi], v \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

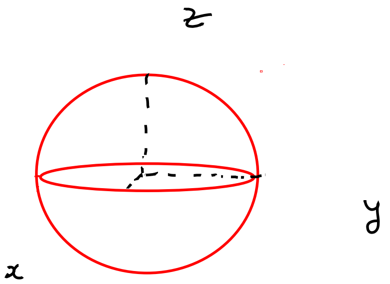
$\vec{X}(u,v) = a\cos u\vec{i} + a \ \text{sen}\, u\vec{j} + v\vec{k}$.



(3) *A esfera* $x^2+y^2+z^2 = a^2$ *de raio* $a > 0$, *pode ser parametrizada por*

$$\Sigma : \begin{cases} x(u,v) = a\cos u \ \text{sen}\, v \\ y(u,v) = a \ \text{sen}\, u \ \text{sen}\, v \\ z(u,v) = a\cos v, \quad u \in [0,2\pi], v \in [0,\pi]. \end{cases}$$

$\vec{X}(u,v) = a\cos u \ \text{sen}\, v\vec{i} + a \ \text{sen}\, u \ \text{sen}\, v\vec{j} + a\cos v\vec{k}$.



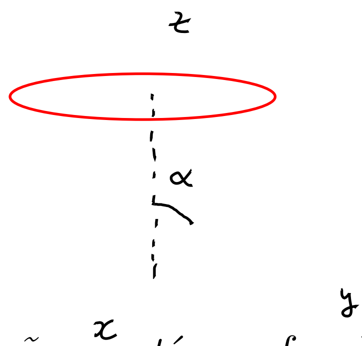
(4) *O cone de com "ângulo de abertura"* $0 < \alpha < \pi/2$ $z = k \pm \sqrt{x^2 + y^2}$, $k = \cot\alpha$ *pode ser parametrizado por*

$$\Sigma : \begin{cases} x(u,v) = \rho \cos u \;\, sen\, \alpha \\ y(u,v) = \rho \;\, sen\, u \;\, sen\, \alpha \\ z(u,v) = \rho \cos\alpha, \quad u \in [0, 2\pi], \rho \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ou, fazendo, $v = \rho\cos\alpha$,

$$\Sigma : \begin{cases} x(u,v) = v \cos u \tan\alpha \\ y(u,v) = v \;\, sen\, u \tan\alpha \\ z(u,v) = v, \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

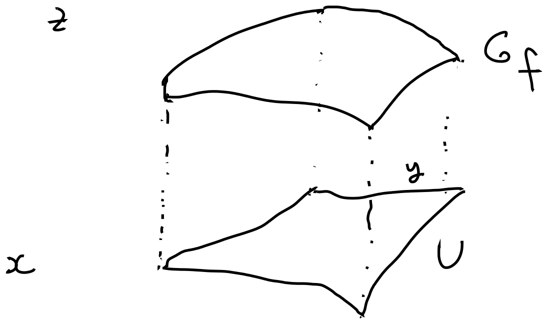
$$\vec{X}(u,v) = v \cos u \tan\alpha \vec{i} + v \;\, sen\, u \tan\alpha \vec{j} + v\vec{k}.$$



(5) *O gráfico da função contínua* $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *pode ser parametrizado por*

$$\Sigma : \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = f(u,v), \quad (u,v) \in U. \end{cases}$$

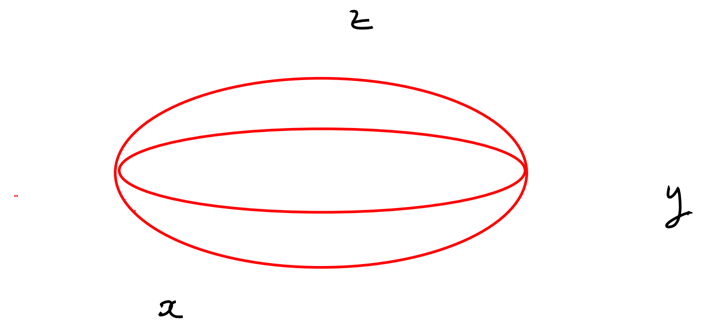
$$\vec{X}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + f(u,v)\vec{k}.$$



(6) *O elipsóide* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1$ *de semieixos* $a, b, c > 0$, *pode ser parametrizada por*

$$\Sigma : \begin{cases} x(u,v) = a\cos u \ \operatorname{sen} v \\ y(u,v) = b \ \operatorname{sen} u \ \operatorname{sen} v \\ z(u,v) = c\cos v, \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi]. \end{cases}$$

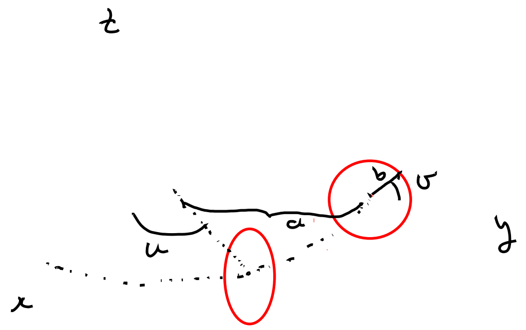
$$\vec{X}(u,v) = a\cos u \ \operatorname{sen} v\vec{i} + b \ \operatorname{sen} u \ \operatorname{sen} v\vec{j} + ac\cos v\vec{k}.$$

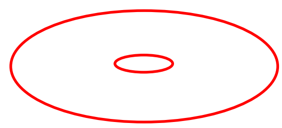


(7) *O toro, obtido pela rotação em torno do eixo Oz da circunferência contida no plano* $y = 0$. x $(x-a)^2 + z^2 = b^2$ *pode ser parametrizado por*

$$\Sigma : \begin{cases} x(u,v) = (a + b\cos v)\cos u \\ y(u,v) = (a + b\cos v) \ \operatorname{sen} u \\ z(u,v) = b \ \operatorname{sen} v, \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

$$\vec{X}(u,v) = (a + b\cos v)\cos u\vec{i} + (a + b\cos v) \ \operatorname{sen} u\vec{j} + b \ \operatorname{sen} v\vec{k}.$$





3. Superfícies regulares

Se Σ é uma superfície de classe $\mathcal{C}^1$, com vetor posição $\vec{X}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$, $(u,v) \in U$, os vetores

$$\vec{X}_u(u_0,v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\vec{k} \quad \text{e}$$
$$\vec{X}_v(u_0,v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\vec{k}$$

são tangentes às curvas $\gamma(u) = \Sigma(u,v_0)$ e $\gamma(v) = \Sigma(u_0,v)$ com traço contido na Imagem de Σ e, portanto, são tangentes à Imagem de Σ. Se $\vec{X}_u(u_0,v_0)$ e $\vec{X}_u(u_0,v_0)$ forem não colineares, eles determinam um plano em cada ponto da Imagem de Σ, denominado **plano tangente a Σ no ponto** $(x_0,y_0,z_0) = \Sigma(u_0,v_0)$. Temos então a seguinte

Definição 3.1. *A superfície $\Sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in U$, de classe $\mathcal{C}^1$, é dita **regular** (ou* lisa*) se os vetores $\vec{X}_u(u,v)$ e $\vec{X}_v(u,v)$ forem linearmente independentes em cada ponto $(u,v) \in U$.*

Se a superfície $\Sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in U$ for regular, o **plano tangente** em cada ponto $\Sigma(u_0,v_0)$ tem equação vetorial dada por

$$T(s,t) = \Sigma(u_0,v_0) + t\vec{X}_u(u_0,v_0) + s\vec{X}_v(u_0,v_0).$$

Como sabemos, os vetores $\vec{X}_u(u,v)$ e $\vec{X}_v(u,v)$ são linearmente independentes se e somente o produto vetorial $\vec{X}_u(u,v) \wedge \vec{X}_v(u,v)$ é não nulo. Observemos que $\vec{N}(u,v) = \vec{X}_u(u,v) \wedge \vec{X}_v(u,v)$ é um vetor normal ao plano tangente no ponto $\Sigma(u,v)$ Este produto desempenha um papel importante na teoria e é denominado **produto vetorial fundamental.**

Exemplos 3.2.

(1) *Para o cilindro* $\vec{X}(u,v) = a\cos u\vec{i} + a\ sen\,u\vec{j} + v\vec{k},$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ *temos*

$$\vec{X}_u(u,v) = -a\ sen\,u\vec{i} + a\cos u\vec{j} + 0\vec{k}$$
$$\vec{X}_v(u,v) = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}$$

Portanto

$$\vec{X}_u(u,v) \wedge \vec{X}_v(u,v) = (a\cos u, a\ sen\,u, 0),$$
$$\|\vec{X}_u(u,v) \wedge \vec{X}_v(u,v)\| = a \neq 0.$$

Portanto a superfície cilíndrica com esta parametrização é regular.

(2) *Para a esfera* $\vec{X}(u,v) = a\cos u\ sen\,v\vec{i} + a\ sen\,u\ sen\,v\vec{j} + a\cos v\vec{k}$. *e obtemos*

$$\vec{X}_u(u,v) = a\cos u\cos v\vec{i} + a\cos u\ sen\,v\vec{j} - a\ sen\,u\vec{k}$$
$$\vec{X}_v(u,v) = -a\ sen\,u\ sen\,v\vec{i} + a\ sen\,u\cos v\vec{j} + 0\vec{k}$$

Portanto (após alguns cálculos)

$$\vec{X}_u(u,v) \wedge \vec{X}_v(u,v) = a\ sen\,u\vec{X}(u,v).$$
$$\|\vec{X}_u(u,v) \wedge \vec{X}_v(u,v)\| = a^2\ sen\,u.$$

Temos então que $\|\vec{X}_u(u,v) \wedge \vec{X}_v(u,v)\| \neq 0$ *se e somente se* $u \neq k\pi$. *Assim, esta superfície parametrizada não é regular, se tomarmos como domínio, por exemplo,* $U = R^2$ *ou* $U = [0,\pi] \times \mathbb{R}$. *Tomando* $U =]0,\pi[\times [0,2\pi]$, *teremos uma superfíce parametrizada regular cuja imagem, porém, não inclui os "polos"* $S = (0,0,-1)$ *e* $N = (0,0,1)$.

(3) *Para o gráfico da função de classe* $\mathcal{C}^1$, $y = f(x, y,\ \vec{X}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + f(u, v)\vec{k}$.

$$\vec{X}_u(u, v) = 1\vec{i} + 0\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial u}\vec{k}$$
$$\vec{X}_v(u, v) = 0\vec{i} + 1\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial v}\vec{k}$$

Portanto

$$\vec{X}_u(u, v) \wedge \vec{X}_v(u, v) = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, 1\right).$$

$$\|\vec{X}_u(u, v) \wedge \vec{X}_v(u, v)\| = \sqrt{1 + \frac{\partial f}{\partial u}^2 + \frac{\partial f}{\partial v}^2}.$$