PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

ESCOLA POLITÉCNICA DA USP

PQI5835 - Identificação de Sistemas em Processos Químicos: Dos Experimentos aos Modelos

São Paulo

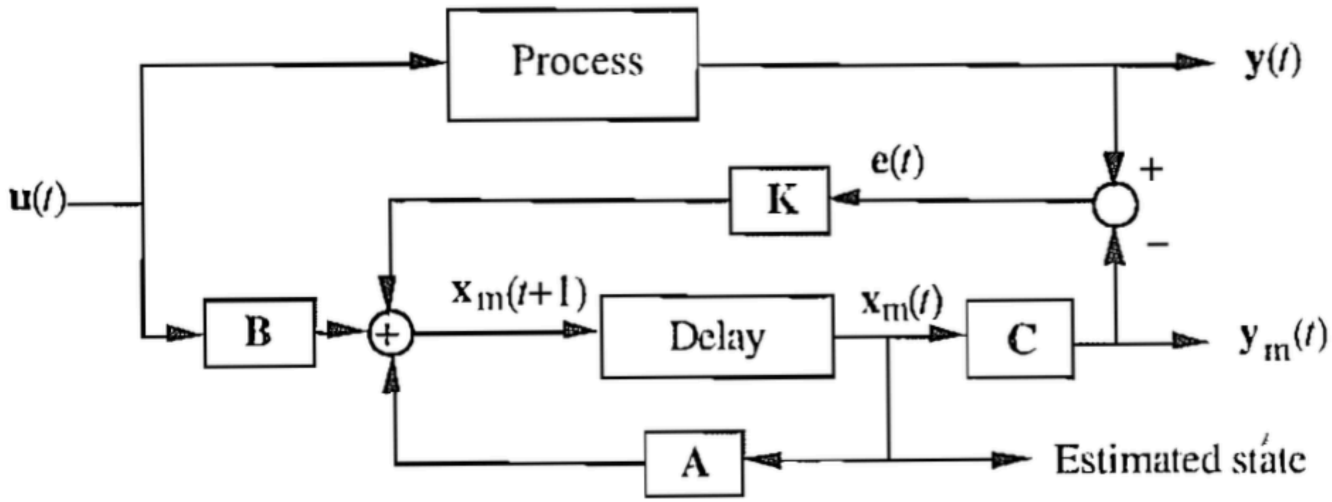
FILTRO DE KALMAN

INTRODUÇÃO

- Modelo em estados:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}^*\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^*\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}^*\mathbf{x}(t)$$



INTRODUÇÃO

- Modelo estados estocástico linear com coeficientes variando no tempo:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{B}_t\mathbf{u}_t + \mathbf{v}_t$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t$$

$$\mathrm{E}\{\mathbf{v}_t\mathbf{w}_k^{\mathrm{T}}\} = \mathbf{0}, \quad \mathrm{E}\{\mathbf{v}_t\mathbf{v}_k^{\mathrm{T}}\} = \mathbf{V}_t\delta_{tk}, \quad \mathrm{E}\{\mathbf{w}_t\mathbf{w}_k^{\mathrm{T}}\} = \mathbf{W}_t\delta_{tk},$$

Parêntese – Mínimos Quadrados Recursivos Vetoriais

- $\mathbf{y}$ é um vetor: $\mathbf{y}_{\mathrm{m}}(t+1,\mathbf{p}) = \mathbf{R}_t^{\mathrm{T}}\mathbf{p}$
- $\mathbf{R}_t$ é uma matriz n_p x n_y
- O estimador de mínimos quadrados minimiza a função objetivo:

$$j_{\mathrm{ls}}(\mathbf{p}) = \sum_{t=1}^{n_1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{R}_{t-1}^{\mathrm{T}}\mathbf{p})^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_t(\mathbf{y}_t - \mathbf{R}_{t-1}^{\mathrm{T}}\mathbf{p})$$

- $\mathbf{Q}_t$ é uma matriz de pesos definida positiva

Parêntese – Mínimos Quadrados Recursivos Vetoriais

- A solução equivalente ao caso escalar é:

$$\mathbf{K}_{t+1} = \mathbf{P}_t \mathbf{R}_t (\mathbf{Q}_{t+1}^{-1} + \mathbf{R}_t^T \mathbf{P}_t \mathbf{R}_t)^{-1},$$

$$\mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{t+1} \mathbf{R}_t^T \mathbf{P}_t,$$

$$\mathbf{y}_m[t+1, \hat{\mathbf{p}}_{ls}(t)] = \mathbf{R}_t^T \hat{\mathbf{p}}_{ls}(t),$$

$$\hat{\mathbf{p}}_{ls}(t+1) = \hat{\mathbf{p}}_{ls}(t) + \mathbf{K}_{t+1}[\mathbf{y}_{t+1} - \mathbf{y}_m[t+1, \hat{\mathbf{p}}_{ls}(t)]]$$

- Mesmo quando $\mathbf{Q}_{t+1}^{-1}$ for disponível a priori, a cada iteração é necessário inverter a matriz $\mathbf{P}_t$

Filtro de Kalman – Preliminar

- Vamos considerar duas etapas para a dedução do filtro de Kalman
- O estado do sistema é constante, as equações de de estado e de observação se resumem a:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t,$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t.$$

Filtro de Kalman – Preliminar

- Aplica-se o algoritmo recursivo assumindo:
- $\hat{\mathbf{p}}_{ls}(t) = \hat{\mathbf{x}}_t$, $\mathbf{Q}_t = \mathbf{W}_t^{-1}$ e $\mathbf{R}_t^T = \mathbf{C}_{t+1}$
- O que leva a:

$$\mathbf{K}_{t+1} = \mathbf{P}_t \mathbf{C}_{t+1}^T (\mathbf{W}_{t+1} + \mathbf{C}_{t+1} \mathbf{P}_t \mathbf{C}_{t+1}^T)^{-1},$$

$$\mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{t+1} \mathbf{C}_{t+1} \mathbf{P}_t,$$

$$\mathbf{y}_m(t+1, \hat{\mathbf{x}}_t) = \mathbf{C}_{t+1} \hat{\mathbf{x}}_t,$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1} = \hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{K}_{t+1}[\mathbf{y}_{t+1} - \mathbf{y}_m(t+1, \hat{\mathbf{x}}_t)].$$

- $\mathbf{P}_t$ é a matriz de covariância $E\{(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^T\}$

Filtro de Kalman – Etapa 1

- Seja o sistema inicial:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{B}_t\mathbf{u}_t + \mathbf{v}_t$$
$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t$$

- As predições de **x** e **P** em t+1 dados os valores no tempo t, são chamadas $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}$ e $\mathbf{P}_{t+1|t}$ são chamados de valores *a priori*
- Os valores corrigidos de **x** e **P** em t+1 dadas as medidas no instante t+1 são chamadas $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}$ e $\mathbf{P}_{t+1|t+1}$

Filtro de Kalman – Etapa 1

- Predição de **x** e **P**:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} = \mathbf{A}_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t} + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t$$

- O erro de predição é dado por:

$$\mathbf{x}_{t+1} - \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} = \mathbf{A}_t(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t}) + \mathbf{v}_t$$

- Se a predição for não tendenciosa: $\mathrm{E}\{\mathbf{x}_{t+1} - \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}\} = \mathbf{0}$
- A variância de predição é dada por:

$$\mathbf{P}_{t+1|t} = \mathrm{E}\{(\mathbf{x}_{t+1} - \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t})(\mathbf{x}_{t+1} - \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t})^{\mathrm{T}} = \mathrm{E}\{\mathbf{A}_t(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t})(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_t^{\mathrm{T}}\} + \mathrm{E}\{\mathbf{v}_t\mathbf{v}_t^{\mathrm{T}}\}$$

$$= \mathbf{A}_t \mathbf{P}_{t|t} \mathbf{A}_t^{\mathrm{T}} + \mathbf{V}_t$$

Filtro de Kalman – Etapa 2

- Etapa de correção: caso estático:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{t+1} &\rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1},\\
\hat{\mathbf{x}}_{t} &\rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t},\\
\mathbf{P}_{t+1} &\rightarrow \mathbf{P}_{t+1|t+1},\\
\mathbf{P}_{t} &\rightarrow \mathbf{P}_{t+1|t}.
\end{aligned}
$$

Filtro de Kalman

- O algoritmo:
- Sendo dados $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$ e $\mathbf{P}_{t|t}$
  - Predição de estados e covariânca:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} = \mathbf{A}_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t} + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t$$

$$\mathbf{P}_{t+1|t} = \mathbf{A}_t \mathbf{P}_{t|t} \mathbf{A}_t^{\mathrm{T}} + \mathbf{V}_t$$

  - Ganho do filtro

$$\mathbf{K}_{t+1} = \mathbf{P}_{t+1|t} \mathbf{C}_{t+1}^{\mathrm{T}} (\mathbf{W}_{t+1} + \mathbf{C}_{t+1} \mathbf{P}_{t+1|t} \mathbf{C}_{t+1}^{\mathrm{T}})^{-1}$$

  - Atualização da predição de estado:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1} = \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} + \mathbf{K}_{t+1} (\mathbf{y}_{t+1} - \mathbf{C}_{t+1} \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t})$$

Filtro de Kalman

– Atualização da covariância:

$$\mathbf{P}_{t+1|t+1} = \mathbf{P}_{t+1|t} - \mathbf{K}_{t+1}\mathbf{C}_{t+1}\mathbf{P}_{t+1|t}$$

- Os ganhos podem ser atualizados offline
- Se o modelo for impreciso o filtro pode divergir

Filtro de Kalman

- Influência das covariâncias:

$$\mathbf{K}_{t+1}(\mathbf{W}_{t+1} + \mathbf{C}_{t+1}\mathbf{P}_{t+1|t}\mathbf{C}_{t+1}^{T}) = \mathbf{P}_{t+1|t}\mathbf{C}_{t+1}^{T}$$

$$\mathbf{K}_{t+1}(\mathbf{I} + \mathbf{C}_{t+1}\mathbf{P}_{t+1|t}\mathbf{C}_{t+1}^{T}\mathbf{W}_{t+1}^{-1}) = \mathbf{P}_{t+1|t}\mathbf{C}_{t+1}^{T}\mathbf{W}_{t+1}^{-1}$$

$$\mathbf{K}_{t+1} = (\mathbf{P}_{t+1|t} - \mathbf{K}_{t+1}\mathbf{C}_{t+1}\mathbf{P}_{t+1|t})\mathbf{C}_{t+1}^{T}\mathbf{W}_{t+1}^{-1}$$

Filtro de Kalman

- Filtro estacionário:

$$\mathbf{P} = \lim_{t \to \infty} \mathbf{P}_{t|t}, \quad \text{and} \quad \mathbf{P}^+ = \lim_{t \to \infty} \mathbf{P}_{t+1|t}.$$

- Da equação de $\mathbf{P}_{t+1|t}$

$$\mathbf{P}^+ = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{V}.$$

- Portanto:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^+ - \mathbf{P}^+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{P}^+\mathbf{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}^+.$$

- Equação de Ricatti discreta:

$$\mathbf{P}^+ - \mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{P}^+\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}\mathbf{P}^+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{P}^+\mathbf{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}^+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

Filtro de Kalman

- Ganho do filtro estacionário de Kalman:

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}^{+}\mathbf{C}^{T}(\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{P}^{+}\mathbf{C}^{T})^{-1}$$

- Implementação muito simples:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{t|t} + \mathbf{B}\mathbf{u}_t + \mathbf{K}[\mathbf{y}_{t+1} - \mathbf{C}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{t|t} + \mathbf{B}\mathbf{u}_t)]$$

$$= (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{A})\hat{\mathbf{x}}_{t|t} + (\mathbf{B} - \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{B})\mathbf{u}_t + \mathbf{K}\mathbf{y}_{t+1}.$$

Filtro de Kalman Extendido

- Um sistema não linear em tempo discreto:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{p}_t) + \mathbf{v}_t,$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\mathbf{p}_0),$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) + \mathbf{w}_t$$

Filtro de Kalman Extendido

- Sistema extendido:

$$\mathbf{x}_t^c = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{p}_t \end{bmatrix}, \qquad \text{com} \qquad \mathbf{p}_{t+1} = \mathbf{p}_t + \mathbf{v}_t^p$$

- O sistema fica:

$$\mathbf{x}_{t+1}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{p}_t) \\ \mathbf{p}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_t \\ \mathbf{v}_t^p \end{bmatrix} = \mathbf{f}^c(\mathbf{x}_t^c, \mathbf{u}_t) + \mathbf{v}_t^c$$

$$\mathbf{x}_0^c = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0(\mathbf{p}_0) \\ \mathbf{p}_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}^c(\mathbf{x}_t^c) + \mathbf{w}_t.$$

Filtro de Kalman Extendido

- Expansão de primeira ordem em torno a $\hat{\mathbf{x}}^c_{t|t}$

$$\mathbf{f}^c(\mathbf{x}^c_t, \mathbf{u}_t) \approx \mathbf{f}^c(\hat{\mathbf{x}}^c_{t|t}, \mathbf{u}_t) + \mathbf{A}_t(\mathbf{x}^c_t - \hat{\mathbf{x}}^c_{t|t})$$

onde:

$$\mathbf{A}_t = \frac{\partial \mathbf{f}^c(\mathbf{x}^c_t, \mathbf{u}_t)}{\partial \mathbf{x}^{cT}_t}\bigg|_{\hat{\mathbf{x}}^c_{t|t}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{p}_t)}{\partial \mathbf{x}^T_t} & \dfrac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{p}_t)}{\partial \mathbf{p}^T_t} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}\bigg|_{\hat{\mathbf{x}}^c_{t|t}}$$

e:

$$\mathbf{h}^c(\mathbf{x}^c_t) \approx \mathbf{h}^c(\hat{\mathbf{x}}^c_{t|t-1}) + \mathbf{C}_t(\mathbf{x}^c_t - \hat{\mathbf{x}}^c_{t|t-1})$$

com:

$$\mathbf{C}_t = \frac{\partial \mathbf{h}^c(\mathbf{x}^c_t)}{\partial \mathbf{x}^{cT}_t}\bigg|_{\hat{\mathbf{x}}^c_{t|t-1}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)}{\partial \mathbf{x}^T_t} & \dfrac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)}{\partial \mathbf{p}^T_t} \end{bmatrix}\bigg|_{\hat{\mathbf{x}}^c_{t|t-1}}$$

Filtro de Kalman Extendido

- O sistema não linear é aproximado por:

$$\mathbf{x}_{t+1}^{e} = \mathbf{A}_t\mathbf{x}_t^{e} + \mathbf{f}^{e}(\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{e}, \mathbf{u}_t) - \mathbf{A}_t\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{e} + \mathbf{v}_t^{e}$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C}_t\mathbf{x}_t^{e} + \mathbf{h}^{e}(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{e}) - \mathbf{C}_t\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{e} + \mathbf{w}_t.$$

que é linear com coeficientes não constantes.

$$\mathbf{V}^{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}^{p} \end{bmatrix}.$$

Filtro de Kalman Extendido

- Predição: $\hat{\mathbf{x}}^c_{t+1|t} = \mathbf{f}^c(\hat{\mathbf{x}}^c_{t|t}, \mathbf{u}_t)$
- Calcula-se: $\mathbf{P}_{t+1|t} = \mathbf{A}_t\mathbf{P}_{t|t}\mathbf{A}_t^T + \mathbf{V}^c$

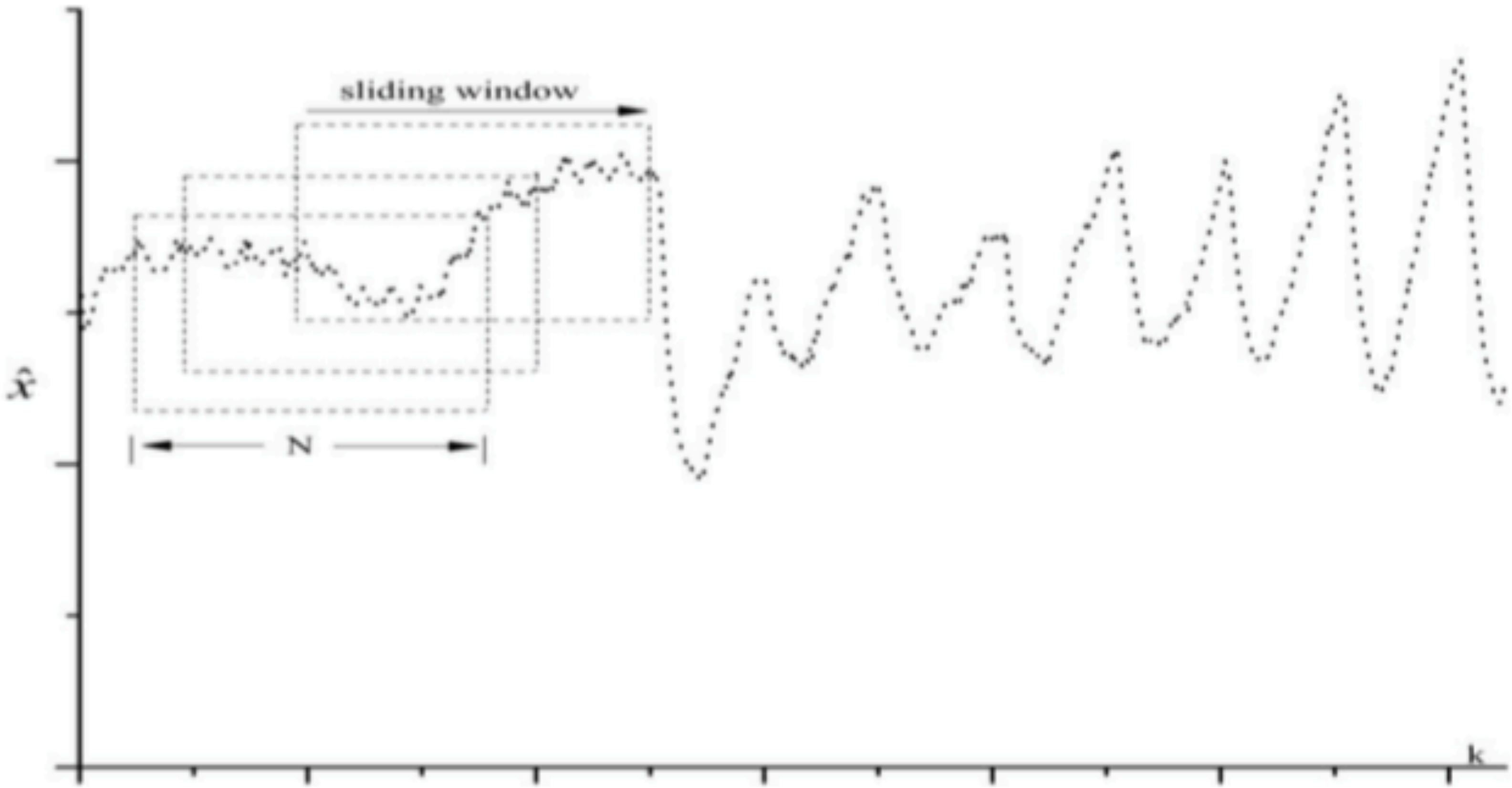
$$\mathbf{K}_{t+1} = \mathbf{P}_{t+1|t}\mathbf{C}_{t+1}^T(\mathbf{W} + \mathbf{C}_{t+1}\mathbf{P}_{t+1|t}\mathbf{C}_{t+1}^T)^{-1},$$

$$\mathbf{P}_{t+1|t+1} = \mathbf{P}_{t+1|t} - \mathbf{K}_{t+1}\mathbf{C}_{t+1}\mathbf{P}_{t+1|t}$$

- E no fim:

$$\hat{\mathbf{x}}^c_{t+1|t+1} = \hat{\mathbf{x}}^c_{t+1|t} + \mathbf{K}_{t+1}[\mathbf{y}_{t+1} - \mathbf{h}^c(\hat{\mathbf{x}}^c_{t+1|t})].$$

Estimador de Horizonte Móvel



Estimador de Horizonte Móvel

- Sistema não linear:

$$x_{n+1} = \Phi(x_n, u_n) + w_n$$

$$y_n = h(x_n, u_n) + v_n$$

Estimador de Horizonte Móvel

- Janela de tamanho N:

$$\min_{x} \quad \frac{1}{2}\|x_n - \bar{x}_n\|^2_{P_n} + \sum_{i=n}^{n+N-1} \frac{1}{2}\|x_{i+1} - \Phi(x_i, u_i)\|^2_Q + \sum_{i=n}^{n+N} \frac{1}{2}\|h(x_i, u_i) - y_i\|^2_R$$

- Problema de otimização não linear com N+1 variáveis:

$$x = (x_n, \ldots, x_{n+N})$$

Estimador de Horizonte Móvel

- Dificuldades: cálculo numérico
- Determinação de P_n