



Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



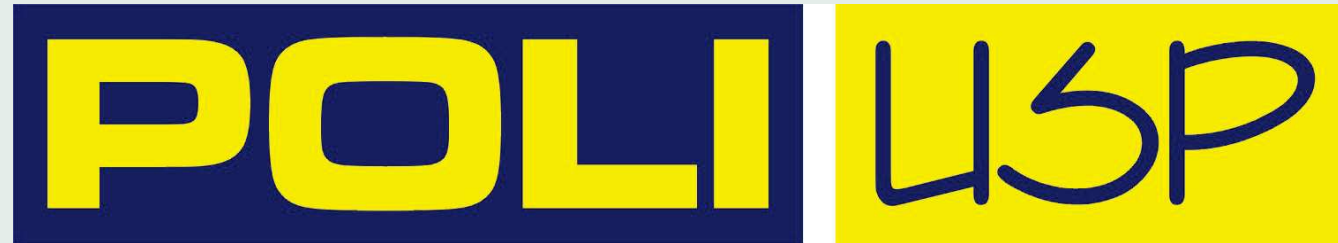
Página 1 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



PTC5611 - Controle Digital de Sistemas Dinâmicos
Cap. 10: Introdução ao Controle Ótimo

Prof. Bruno Augusto Angélico

2021



Capítulo 10 - Introdução ao Controle Ótimo

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 2 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

- Controle ótimo não poder ser confundido como o controle ideal;
- Como em sistemas MIMO as matrizes \mathbf{K} e \mathbf{L} não são únicas, técnicas de controle ótimo podem ser utilizadas para utilizar de forma inteligente este “grau de liberdade”.
- Assuntos do capítulo:
 - Controle Quadrático Ótimo Variante no Tempo com função custo quadrática para o problema de regulação;
 - LQR: forma estacionária do controle variante no tempo;
 - Filtro de Kalman;
 - Filtro de Kalman estacionário;
 - Controle LQG: LQR com FK estacionário.



1. Controle Quadrático Ótimo Variante no Tempo

O Controle Ótimo Quadrático pode ser enunciado como segue.

$$\min_{\mathbf{u}} J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T[N] \mathbf{S} \mathbf{x}[N] + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{x}^T[n] \mathbf{Q} \mathbf{x}[n] + \mathbf{u}^T[n] \mathbf{R} \mathbf{u}[n]) \quad (1)$$

sujeito a

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}[n] + \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}[n], \quad \mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_i, \quad (2)$$

onde,

- \mathbf{Q} matriz ($k \times k$) simétrica definida semi positiva;
- \mathbf{R} matriz ($r \times r$) simétrica definida positiva;
- \mathbf{S} matriz ($k \times k$) simétrica definida semi positiva;

Se o estado final for imposto, tal que $\mathbf{x}[N] = \mathbf{x}_f$, então o primeiro termo à direita de (1) é eliminado.

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto

⏪ ⏩

◀ ▶

Página 3 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



A solução do problema de minimização de J pode ser feita de algumas formas diferentes, como por programação dinâmica, e o método de multiplicadores de Lagrange. Aqui será reproduzida a solução pelo método de multiplicadores de Lagrange.

Deseja-se minimizar o índice de desempenho descrito em (2) sujeito às restrições impostas em (1). Considere um vetor de multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}[n+1]$ para cada instante n . Assim, o seguinte índice de desempenho é definido

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top(N) \mathbf{S} \mathbf{x}[N] + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\mathbf{x}^\top[n] \mathbf{Q} \mathbf{x}[n] + \mathbf{u}^\top[n] \mathbf{R} \mathbf{u}[n] + \underbrace{\boldsymbol{\lambda}^\top[n+1]}_{\text{red underline}} \left(\underbrace{-\mathbf{x}[n+1] + \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}[n] + \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{u}[n]}_{\text{red underline}} \right) \right) \quad (3)$$

Dando sequência ao procedimento de otimização, as seguintes



Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 4 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



equações são obtidas:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}[n]} = \mathbf{u}^\top[n] \mathbf{R} + \boldsymbol{\lambda}^\top[n+1] \boldsymbol{\Gamma} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}[n+1]} = -\mathbf{x}[n+1] + \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}[n] + \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{u}[n] = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}[N]} = \mathbf{S} \mathbf{x}[N] - \boldsymbol{\lambda}[N] = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}[n]} = \mathbf{x}^\top[n] \mathbf{Q} - \boldsymbol{\lambda}^\top[n] + \boldsymbol{\lambda}^\top[n+1] \boldsymbol{\Phi} = 0 \quad (7)$$

Note que (5) é simplesmente a equação de estados, ou seja,

$$\mathbf{x}[n+1] = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}[n] + \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{u}[n] \quad (8)$$

Equação (6) especifica o valor final de $\boldsymbol{\lambda}[n]$. O termo $\boldsymbol{\lambda}[n]$ é frequentemente denominado vetor adjunto e, por isso, (7) é denom-

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto

⏪ ⏩

◀ ▶

Página 5 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



inada equação adjunta, que pode ser escrita como uma equação de diferenças para trás, tal que:

$$\lambda[n] = \Phi^T \lambda[n+1] + Qx[n]. \quad (9)$$

A Equação (9) pode ainda ser reescrita como uma equação de diferenças para frente, ou seja,

$$\lambda[n+1] = \Phi^{-T} \lambda[n] - \Phi^{-T} Qx[n] \quad (10)$$

A solução de (4) é dada por:

$$u[n] = -R^{-1} \Gamma^T \lambda[n+1] \quad (11)$$

Sobre as condições de contorno, $x[0] = x_i$ deve ser dado. Entretanto, $\lambda[0]$ não é usualmente conhecido, sendo $\lambda[N]$ a condição de contorno, dada por (6), ou seja,

$$\lambda[N] = Sx[N]. \quad (12)$$

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto

◀ ▶

◀ ▶

Página 6 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Com isso, o conjunto de equações que descreve a solução ótima do problema de otimização está completamente especificada, tal que,

$$\begin{aligned}\lambda[n] &= \Phi^T \lambda[n+1] + Qx \\ \mathbf{x}[n+1] &= \Phi \mathbf{x}[n] + \Gamma \mathbf{u}[n] \\ \mathbf{u}[n] &= -\mathbf{R}^{-1} \Gamma^T \lambda[n+1] \\ \mathbf{x}[0] &= \mathbf{x}_i \\ \lambda[N] &= \mathbf{S} \mathbf{x}[N]\end{aligned}$$

A solução desse problema com valor de contorno em dois pontos não é trivial. Um método denominado varredura de Bryson e Ho [?], consiste em assumir

$$\lambda[n] = \mathbf{P}[n] \mathbf{x}[n]. \quad (13)$$

Com tal definição, o problema com valor de contorno em dois

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto

◀ ▶

◀ ▶

Página 7 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

$$P(N) = 5$$



pontos em \mathbf{x} e $\boldsymbol{\lambda}$, é transformado para um problema com condição de contorno em um ponto em \mathbf{P} . De (13) e (4), tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathbf{u}[n] &= -\boldsymbol{\Gamma}^\top \mathbf{P}[n+1] \mathbf{x}[n+1] \\ &= -\boldsymbol{\Gamma}^\top \mathbf{P}[n+1] (\boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}[n] + \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{u}[n]) \end{aligned} \quad (14)$$

Resolvendo para $\mathbf{u}[n]$, obtém-se

$$\mathbf{u}[n] = -(\mathbf{R} + \boldsymbol{\Gamma}^\top \mathbf{P}[n+1] \boldsymbol{\Gamma})^{-1} \boldsymbol{\Gamma}^\top \mathbf{P}[n+1] \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}[n] \quad (15)$$

De (13) e (9), segue que

$$\mathbf{P}[n] \mathbf{x}[n] = \boldsymbol{\Phi}^\top \mathbf{P}[n+1] \mathbf{x}[n+1] + \mathbf{Q} \mathbf{x}[n]. \quad (16)$$

Ao substituir $\mathbf{x}[n+1]$ em (16) por (8), tem-se

$$\mathbf{P}[n] \mathbf{x}[n] = \boldsymbol{\Phi}^\top \mathbf{P}[n+1] (\boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}[n] + \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{u}[n]) + \mathbf{Q} \mathbf{x}[n]. \quad (17)$$

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto

◀ ▶

◀ ▶

Página 8 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Ainda, substituindo $\mathbf{u}[n]$ de (15) em (17), chega-se em

$$\mathbf{P}[n]\mathbf{x}[n] = \Phi^T \mathbf{P}[n+1] \left(\Phi \mathbf{x}[n] - \Gamma (\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{P}[n+1] \Gamma)^{-1} \Gamma^T \mathbf{P}[n+1] \Phi \mathbf{x}[n] \right) + \mathbf{Q} \mathbf{x}[n] \quad (1)$$

que pode ser reescrita como

$$\left(\mathbf{P}[n] - \Phi^T \mathbf{P}[n+1] \Phi + \Phi^T \mathbf{P}[n+1] \Gamma (\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{P}[n+1] \Gamma)^{-1} \Gamma^T \mathbf{P}[n+1] \Phi - \mathbf{Q} \right) \mathbf{x}[n] = 0. \quad (19)$$

Como (19) deve valer para qualquer $\mathbf{x}[n]$, o termo que o multiplica deve ser nulo, o que resulta na solução de $\mathbf{P}[n]$.

$$\mathbf{P}[n] = \Phi^T \left(\mathbf{P}[n+1] - \mathbf{P}[n+1] \Gamma (\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{P}[n+1] \Gamma)^{-1} \Gamma^T \mathbf{P}[n+1] \right) \Phi + \mathbf{Q}, \quad (20)$$

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto

⏪ ⏩

◀ ▶

Página 9 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



que é frequentemente escrita como

$$\mathbf{P}[n] = \mathbf{\Phi}^\top \mathbf{M}[n+1] \mathbf{\Phi} + \mathbf{Q}, \quad (21)$$

em que

$$\mathbf{M}[n+1] = \mathbf{P}[n+1] - \mathbf{P}[n+1] \mathbf{\Gamma} (\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^\top \mathbf{P}[n+1] \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{\Gamma}^\top \mathbf{P}[n+1] \quad (22)$$

A Equação (20) é denominada **Equação de Riccati**. De (12) e (13) pode-se verificar que

$$\mathbf{P}[N] = \mathbf{S}, \quad (23)$$

e portanto a solução é descrita pelas Equações recursivas (21) e (22), com a condição de contorno dada por (23). A recursão deve ser resolvida de trás para frente, pois a condição de contorno é um ponto final.

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto

⏪ ⏩

◀ ▶

Página 10 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



A ação ótima de controle é dada por:

$$\mathbf{u}[n] = -\mathbf{K}[n]\mathbf{x}[n], \quad (24)$$

em que, de (15),

$$\mathbf{K}[n] = (\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^\top \mathbf{P}[n+1] \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{\Gamma}^\top \mathbf{P}[n+1] \mathbf{\Phi} \quad (25)$$

Os cálculos são resumidos no seguinte procedimento:

1. Faça $\mathbf{P}[N] = \mathbf{S}$ e $\mathbf{K}[N] = 0$;
2. Faça $n = N$;
3. Calcule $\mathbf{M}[n] = \mathbf{P}[n] - \mathbf{P}[n] \mathbf{\Gamma} (\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^\top \mathbf{P}[n] \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{\Gamma}^\top \mathbf{P}[n]$;
4. Calcule $\mathbf{K}[n-1] = (\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^\top \mathbf{P}[n] \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{\Gamma}^\top \mathbf{P}[n] \mathbf{\Phi}$;
5. Armazene $\mathbf{K}[n-1]$;
6. Calcule $\mathbf{P}[n-1] = \mathbf{\Phi}^\top \mathbf{M}[n] \mathbf{\Phi} + \mathbf{Q}$;
7. Faça $n = n - 1$;
8. Vá para o passo 3.

Para uma dada condição inicial $\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_i$, para efetuar o cont-

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 11 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



role, utiliza-se os valores de $\mathbf{K}[n]$ armazenados e

$$\mathbf{x}[n + 1] = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}[n] + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}[n], \quad (26)$$

onde

$$\mathbf{u}[n] = -\mathbf{K}[n]\mathbf{x}[n] \quad (27)$$

Portanto, uma vez conhecido o modelo do sistema e as matrizes de peso \mathbf{S} , \mathbf{Q} e \mathbf{R} , e a duração do problema N , os valores de $\mathbf{K}[n]$ devem ser previamente calculados e armazenados.

Pode-se verificar que o custo ótimo é dado por

$$J_{\min} = \mathbf{x}^T[0]\mathbf{P}[0]\mathbf{x}[0] \quad (28)$$

 **Exemplo 1:** [Ogata DTCS] Considere um sistema descrito por

$$\mathbf{x}[n + 1] = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}[n] + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}[n]$$

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 12 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



onde,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}[0] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determine a sequência ótima de controle $u[n]$ que minimiza o seguinte índice de desempenho

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T[8] \mathbf{S} \mathbf{x}[8] + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^7 (\mathbf{x}^T[n] \mathbf{Q} \mathbf{x}[n] + u^T[n] R u[n]),$$

onde,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: O seguinte *script* foi utilizado para resolver o problema

```
clear all; clc; close all;  
Phi = [1 1; 1 0]; Gamma = [1; 0];  
Q = eye(2); R=1;  
N = 8;
```

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto

⏪ ⏩

◀ ▶

Página 13 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 14 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

```
P = zeros(2,2,N+1); P(:, :, N+1) = Q;  
K = zeros(N+1, 2);  
% Cálculo de K  
for n=N+1:-1:1  
M=P(:, :, n)-P(:, :, n)*Gamma*inv(R+Gamma'*P(:, :, n)*Gamma)*Gamma'*P(:, :, n);  
if (n>1)  
- K(n-1, :) = inv(R+Gamma'*P(:, :, n)*Gamma)*Gamma'*P(:, :, n)*Phi;  
P(:, :, n-1) = Phi'*M*Phi+Q;  
end  
end  
x = zeros(2,N+1); u = zeros(1,N+1);  
x(:, 1) = [1; 0];  
% Cálculo de u  
for n=1:N+1  
u(n) = -K(n, :)*x(:, n);  
x(:, n+1) = Phi*x(:, n)+Gamma*u(n);  
end
```

Os resultados obtidos são apresentados na tabela seguinte:



Table 1: Resultados do exemplo 1.

n	$P[n]$	$K[n]$	$x[n]$	$u[n]$
0	$\begin{bmatrix} 3,7913 & 1,0000 \\ 1,0000 & 1,7913 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,0000 & 0,7913 \\ 0,7913 & 1,0000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0 \end{bmatrix}$	<u>-1</u>
1	$\begin{bmatrix} 3,7911 & 0,9999 \\ 0,9999 & 1,7913 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9999 & 0,7913 \\ 0,7913 & 0,9999 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0000 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$	<u>-0,7913</u>
2	$\begin{bmatrix} 3,7905 & 0,9997 \\ 0,9997 & 1,7911 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9997 & 0,7911 \\ 0,7911 & 0,9997 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,2087 \\ 0,0000 \end{bmatrix}$	<u>-0,2087</u>
3	$\begin{bmatrix} 3,7877 & 0,9986 \\ 0,9986 & 1,7905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9986 & 0,7905 \\ 0,7905 & 0,9986 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0001 \\ 0,2087 \end{bmatrix}$	<u>-0,1651</u>
4	$\begin{bmatrix} 3,7740 & 0,9932 \\ 0,9932 & 1,7877 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9932 & 0,7877 \\ 0,7877 & 0,9932 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0437 \\ 0,0001 \end{bmatrix}$	<u>-0,0435</u>
5	$\begin{bmatrix} 3,7097 & 0,9677 \\ 0,9677 & 1,7742 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9677 & 0,7742 \\ 0,7742 & 0,9677 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0003 \\ 0,0437 \end{bmatrix}$	<u>-0,0342</u>
6	$\begin{bmatrix} 3,4286 & 0,8571 \\ 0,8571 & 1,7143 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8571 & 0,7143 \\ 0,7143 & 0,8571 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0099 \\ 0,0003 \end{bmatrix}$	<u>-0,0087</u>
7	$\begin{bmatrix} 2,5000 & 0,5000 \\ 0,5000 & 1,5000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5000 & 0,5000 \\ 0,5000 & 0,5000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0015 \\ 0,0099 \end{bmatrix}$	<u>-0,0057</u>
8	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0057 \\ 0,0015 \end{bmatrix}$	<u>0</u>

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 15 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



2. Controle LQR

 $\mathbf{K}[n] \rightarrow \mathbf{K}_{ss}$

De fato, para um problema de tempo infinito (**regulador**), a solução com ganho constante é ótima. Tal solução é denominada **regulador linear quadrático** (LQR).

Para $N \rightarrow \infty$, o índice de desempenho poder ser modificado para

$$J = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{x}^{\top}[n] \mathbf{Q} \mathbf{x}[n] + \mathbf{u}^{\top}[n] \mathbf{R} \mathbf{u}[n]) \quad (29)$$

O termo $\frac{1}{2} \mathbf{x}^{\top}(N) \mathbf{S} \mathbf{x}[N]$ não aparece nesta representação, pois ao assumir estabilidade no regulador ótimo \mathbf{x}_{ss} converge para zero. Possível solução: resolver a Equação de Riccati na forma esta-

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 16 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



cionária, denominada **Equação Algébrica de Riccati**:

$$\mathbf{P}_{ss} = \Phi^T \left(\mathbf{P}_{ss} - \mathbf{P}_{ss} \Gamma (\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{P}_{ss} \Gamma)^{-1} \Gamma^T \mathbf{P}_{ss} \right) \Phi + \mathbf{Q} \quad (30)$$

Devido ao fato da equação ser quadrada em \mathbf{P}_{ss} , há mais de uma solução. A solução escolhida deve ser definida positiva. Em muitos casos não é possível obter uma solução analítica de (27), o que exige métodos numérico para sua solução.

No MATLAB, há o comando `dlqr` que, de acordo com a notação utilizada aqui, possui a seguinte sintaxe:

$$[\mathbf{K}, \mathbf{P}, \mathbf{E}] = \text{dlqr}(\Phi, \Gamma, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{N}).$$

Tal comando calcula a matriz de realimentação de estados \mathbf{K} , de forma que $u[n] = -\mathbf{K}\mathbf{x}[n]$ minimize o seguinte índice de desempenho:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{x}^T[n] \mathbf{Q} \mathbf{x}[n] + \mathbf{u}^T[n] \mathbf{R} \mathbf{u}[n] + 2\mathbf{x}^T[n] \mathbf{N} \mathbf{u}[n]),$$

[Controle...](#)[Controle LQR](#)[Filtro de Kalman](#)[Controle LQG](#)[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 17 de 78](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



para o sistema descrito por

$$\mathbf{x}[n + 1] = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}[n] + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}[n],$$

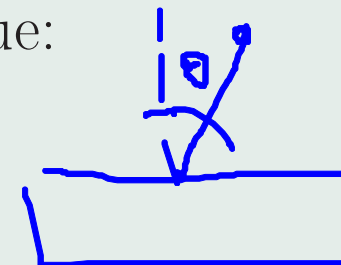
Por *default*, $\mathbf{N} = \mathbf{0}$, valor este assumido quando o parâmetro é omitido. Adicionalmente, o comando retorna solução da Equação algébrica de Riccati, \mathbf{P} , e os autovalores de malha fechada do sistema, \mathbf{E} .

Em relação ao projeto do controlador LQR, ainda há uma questão em aberto? Como escolher as matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} ?

A resposta para tal pergunta é um pouco decepcionante, pois requer uma certa quantidade de tentativa e erro.

Um aumento em \mathbf{Q} aumenta a velocidade de convergência da solução ao ponto de equilíbrio. Um aumento em \mathbf{R} reduz o esforço de controle considerado;

A regra de Bryson (ponto de partida), mencionada em [Franklin], sugere escolher \mathbf{Q} e \mathbf{R} diagonais, tais que:



Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 18 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 19 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

$$Q_{ii} = \frac{1}{\text{Máxima variação aceitável para } x_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

$$R_{jj} = \frac{1}{\text{Máxima variação aceitável para } u_j^2}, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Como relacionar especificações de desempenho?

\mathbf{Q} e \mathbf{R} são apenas fracamente conectadas com as especificações de desempenho.

Procedimento de *pincer* (“pinça”) mencionado em [Franklin] → polos de malha fechada no interior do círculo de raio $1/\alpha$, com $\alpha > 1$. Com isso, a resposta oscilatória decairá pelo menos com taxa igual a $1/\alpha^n$.

Suponha a seguinte função custo modificada:



Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 20 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

$$\begin{aligned} J &= \sum_{n=0}^{\infty} [(\alpha^n \mathbf{x}[n])^\top \mathbf{Q}(\alpha^n \mathbf{x}[n]) + (\alpha^n \mathbf{u}[n])^\top \mathbf{R}(\alpha^n \mathbf{u}[n])] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbf{z}[n]^\top \mathbf{Q} \mathbf{z}[n] + \mathbf{v}[n]^\top \mathbf{R} \mathbf{v}[n]] \end{aligned} \quad (31)$$

onde $\mathbf{z}[n] = \alpha^n \mathbf{x}[n]$ e $\mathbf{v}[n] = \alpha^n \mathbf{u}[n]$. Com isso,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}[n+1] &= \alpha^{(n+1)} \mathbf{x}[n+1] = \alpha^{(n+1)} (\mathbf{\Phi} \mathbf{x}[n] + \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}[n]) \\ &= \alpha \mathbf{\Phi} (\alpha^n \mathbf{x}[n]) + \alpha \mathbf{\Gamma} (\alpha^n \mathbf{u}[n]) \\ &= \alpha \mathbf{\Phi} \mathbf{z}[n] + \alpha \mathbf{\Gamma} \mathbf{v}[n] \end{aligned} \quad (32)$$

Com isso, o problema de controle ótimo é reformulado, tal que a solução ótima é dada por $\mathbf{v}[n] = -\mathbf{K} \mathbf{z}[n]$, ou seja, $\alpha^n \mathbf{u}[n] = -\mathbf{K}(\alpha^n \mathbf{x}[n])$, ou ainda,

$$\mathbf{u}[n] = -\mathbf{K} \mathbf{x}[n] \quad (33)$$



Portanto, utilizando a lei de controle da Equação (33), a trajetória resultante é ótima para a função custo definida em (31).

Para garantir a estabilidade de $\mathbf{z}[n]$, o vetor $\mathbf{x}[n]$ precisa decair com taxa pelo menos igual a $1/\alpha^n$.

Suponha que seja definido o tempo de assentamento t_s para um estado x_j , tal que $x_j(0) = 1$ e $x_j(nT_s) \leq 0,01x_j(0)$. Considere que os demais estados são nulos para $n = 0$. Assim, ao considerar

$$x_j(nT_s) \approx x_j(0)(1/\alpha)^n,$$

conclui-se que

$$(1/\alpha)^n \leq 0,01 \Rightarrow \alpha \geq 100^{1/n} = 100^{T_s/t_s} \quad (34)$$

Para aplicar o procedimento de *pincer* considerando o critério de 1% para o tempo de assentamento t_s e período de amostragem T_s , encontre o valor de α utilizando (34), e encontre a matriz \mathbf{K} do LQR para as matrizes $\alpha\Phi$ e $\alpha\Gamma$.

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto

◀ ▶

◀ ▶

Página 21 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



🖋 **Exemplo 2:** [Franklin] Considere um sistema com a seguinte equação de estados

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

onde,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,1 & 1 \\ -0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0,7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}[0] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e a seguinte equação de saída

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x},$$

com

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O projeto deve seguir as seguintes especificações:

1. Máxima frequência de amostragem igual a 5 Hz;

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 22 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



2. Tempo de assentamento (1%) para x_1 menor do que $2,4$ s;
3. Tempo de assentamento (1%) para x_2 menor do que 8 s;
4. Máximo desvio em x_1 menor do que 2 e em x_2 menor do que 1 .
5. Máximo desvio em u_1 menor do que 5 e em u_2 menor do que 10 .

Assume-se $T_s = 0,2$ s. Assim:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0,9607 & 0,0196 & 0,1776 \\ -0,0098 & 0,9999 & -0,0009 \\ 0 & 0 & 0,8187 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0,0185 & 0,1974 \\ -0,0001 & 0,1390 \\ 0,1813 & 0 \end{bmatrix}$$

Para obtenção de α , considera-se a restrição mais forte: $\alpha \geq 100^{0,2/2,4} = 1,4678$. As matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} são obtidas a partir das

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 23 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



restrições 4 e 5:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1/5^2 & 0 \\ 0 & 1/10^2 \end{bmatrix}$$

O seguinte código em Matlab foi utilizado:

```
clear all; clc; close all;
fs=5; Ts=1/fs;
A = [-0.2 0.1 1; -0.05 0 0; 0 0 -1]; B = [0 1; 0 0.7; 1 0];
C = [1 0 0; 0 1 0]; D = zeros(3,2);
%OBS: no bloco State-Space foi feito C=eye(3) para obter na saída todos os
%estados para a realimentação. Para obter y, tomou-se as 2 primeiras saídas
[Phi,Gamma] = c2d(A,B,Ts);
item = 'c';
switch(item)
    case 'a'
        ts = 2.4; alpha = 100^(Ts/ts);
        Q = diag([1/2^2 1/1^2 0]); R = diag(1./[5^2 10^2]);
        K = dlqr(alpha*Phi,alpha*Gamma,Q,R);
    case 'b'
        ts = 5; alpha = 100^(Ts/ts);
        Q = diag([1/2^2 1/1^2 0]); R = diag(1./[5^2 10^2]);
```

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 24 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 25 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

```
K = dlqr(alpha*Phi,alpha*Gamma,Q,R);
case 'c'
    ts = 5; alpha = 100^(Ts/ts);
    Q = diag([1/2^2 0 0]); R = diag(1./[5^2 10^2]);
    K = dlqr(alpha*Phi,alpha*Gamma,Q,R);
otherwise
    error('item deve ser 'a', 'b' ou 'c' ');
end
x_ini = [1 0 0];
sim('SIM_EX3_CHAP_12');
x_1 = x_out(:,1); x_2 = x_out(:,2); x_3 = x_out(:,3);
t_d = (0:length(x_1)-1)*Ts;
subplot(2,1,1)
stairs(t_d,x_1,'b');hold on; stairs(t_d,x_2,'r'); stairs(t_d,x_3,'g'); grid on;
xlabel('$n T_s$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('Amplitude', 'Interpreter', 'latex')
leg = legend('$x_1(n T_s)$', '$x_2(n T_s)$', '$x_3(n T_s)$');
set(leg, 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'best', 'FontSize', 12);
subplot(2,1,2); stairs(t_d, u); grid on
leg = legend('$u_1(n T_s)$', '$u_2(n T_s)$');
set(leg, 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'best', 'FontSize', 12);
xlabel('$n T_s$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('$u(n T_s)$', 'Interpreter', 'latex');
```

O diagrama de simulação é apresentado na Figura 1. A matriz



$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 6,8137 & -9,7876 & 3,7946 \\ 0,9548 & 4,9424 & 0,1045 \end{bmatrix}$$

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 26 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

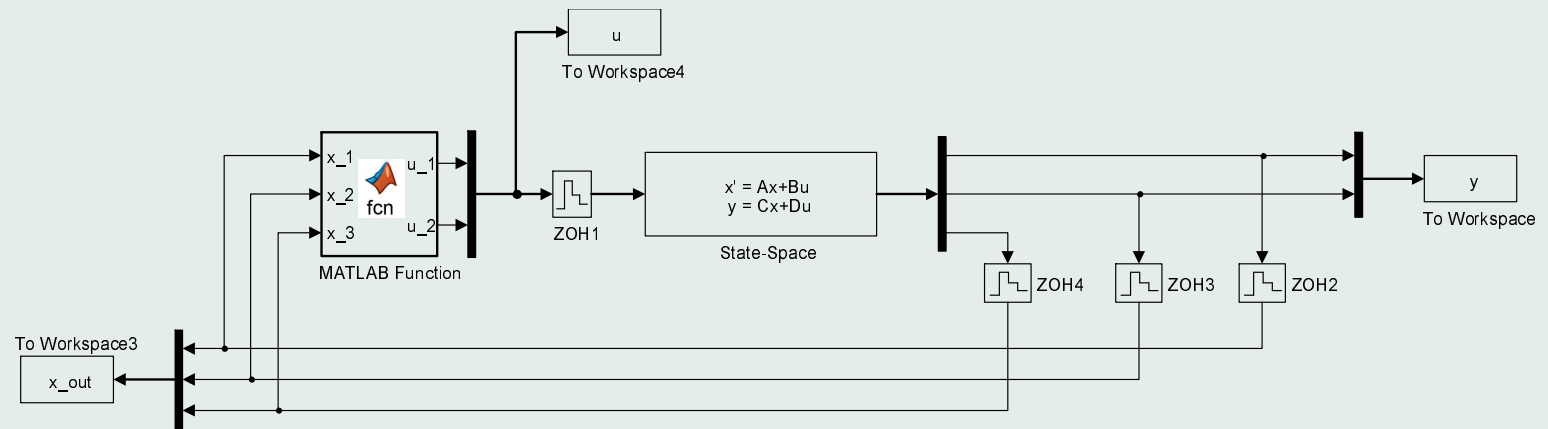


Figure 1: Diagrama de blocos da simulação o Exemplo 2.

O código do Bloco Matlab Function é apresentado abaixo:

```
function [u_1, u_2] = fcn(x_1, x_2, x_3, K)
%#eml
u_1 = -( K(1,1)*x_1 + K(1,2)*x_2 + K(1,3)*x_3 );
u_2 = -( K(2,1)*x_1 + K(2,2)*x_2 + K(2,3)*x_3 );
```



Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 27 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

Os resultados obtidos são apresentados nas Figura 2. Observe que os tempos de assentamento estão muito mais baixo do que os especificados, especialmente para x_2 . No entanto, o esforço de controle u_1 não satisfaz o limite máximo especificado. Para melhorar este aspecto, pode-se tentar aumentar o tempo de assentamento. Por exemplo, para $t_s = 5$, chega-se em:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3,5006 & -5,0086 & 2,3797 \\ 1,1031 & 4,3946 & 0,1646 \end{bmatrix}$$

A Figura 3 apresenta os resultados obtidos. Note que os resultados agora satisfazem todas as especificações. Entretanto, os requisitos para x_2 ainda são bem conservadores, o que sugere uma relaxação no custo relativo a este estado, resultando em

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Com isso, a seguinte matriz de ganhos é obtida:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1,9570 & -2,6986 & 1,7547 \\ 2,9805 & 0,6968 & 0,5816 \end{bmatrix}$$

Os resultados obtidos são apresentados na Figura 4, Note que o esforço de controle diminuiu e os requisitos de projetos continuam sendo satisfeitos.

[Controle...](#)[Controle LQR](#)[Filtro de Kalman](#)[Controle LQG](#)[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 28 de 78](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 29 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

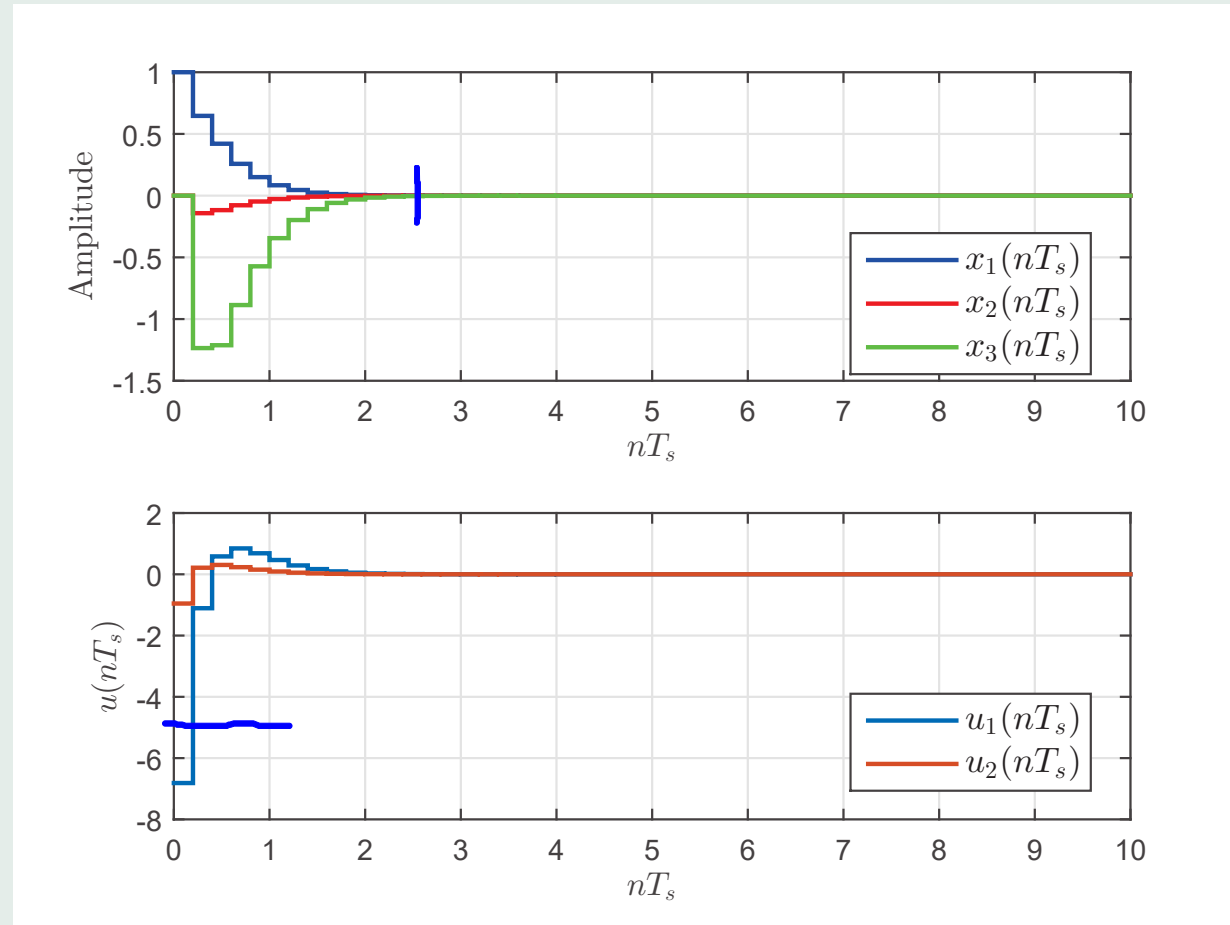


Figure 2: Resposta do Exemplo 2.



Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 30 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

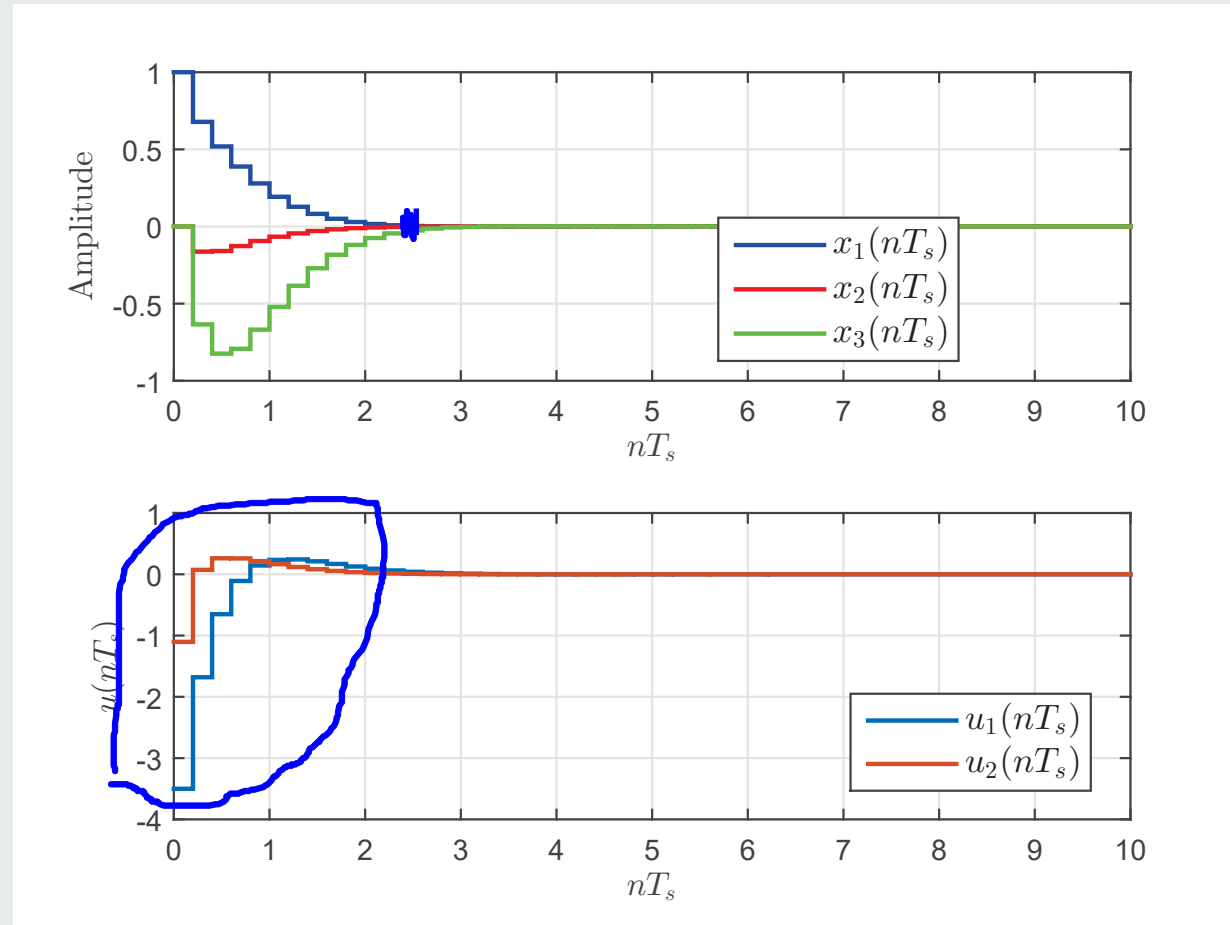


Figure 3: Resposta do Exemplo 2 com especificação $t_s = 5s$.



Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 31 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

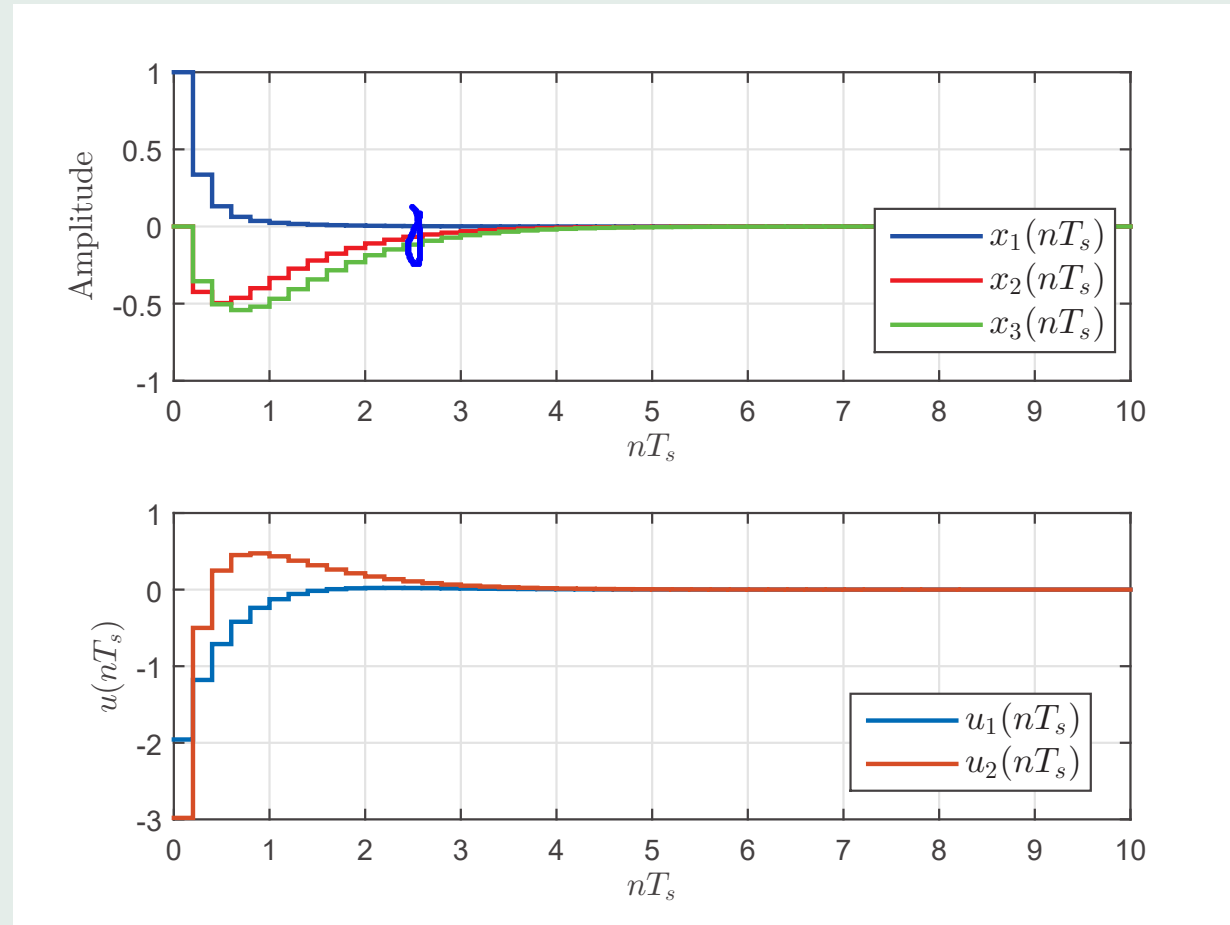


Figure 4: Resposta do Exemplo 2 com especificação $t_s = 5s$ e relaxação no custo de x_2 .



Se a equação de saída do sistema é dada por $\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{x}[n]$, e $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^\top \mathbf{C}$, então a função custo do LQR pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{x}^\top[n] \mathbf{C}^\top \mathbf{C} \mathbf{x}[n] + \mathbf{u}^\top[n] \mathbf{R} \mathbf{u}[n]) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{y}^\top[n] \mathbf{y}[n] + \mathbf{u}^\top[n] \mathbf{R} \mathbf{u}[n]) \end{aligned} \quad (35)$$

Se em (35) a matrix \mathbf{R} for da forma $\mathbf{R} = \rho \mathbf{I}$, com $\rho \rightarrow 0^+$, então tem-se a forma denominada *cheap control*. Isso significa que não há penalização no esforço de controle.

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 32 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



3. Filtro de Kalman

O filtro de Kalman consiste em um conjunto de equações recursivas para estimar os estados do sistema descrito pelas seguintes equações de diferenças

$$\mathbf{x}[n + 1] = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}[n] + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}[n] + \mathbf{\Psi}\mathbf{w}[n], \quad (36)$$

e

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{x}[n] + \mathbf{v}[n], \quad (37)$$

onde $\mathbf{w}[n]$ e $\mathbf{v}[n]$ representam, respectivamente, o ruído de processo e o ruído de medição, ambos caracterizados como ruído branco Gaussiano, tais que

$$\mathbb{E} \{ \mathbf{v}[k] \mathbf{w}^\top[j] \} = 0, \quad (38)$$

$$\mathbb{E} \{ \mathbf{v}[k] \mathbf{v}^\top[j] \} = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ \mathbf{R}_v, & k = j \end{cases}, \quad (39)$$

[Controle...](#)[Controle LQR](#)[Filtro de Kalman](#)[Controle LQG](#)[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 33 de 78](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



e

$$\mathbb{E} \{ \mathbf{w}[k] \mathbf{w}^\top[j] \} = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ \mathbf{R}_w, & k = j \end{cases} \quad (40)$$

Considere um estimador com a mesma estrutura do estimador de valor atual (filtro), tal que

$$\hat{\mathbf{x}}[n] = \bar{\mathbf{x}}[n] + \mathbf{L}_c[n](\mathbf{y}[n] - \mathbf{C} \bar{\mathbf{x}}[n]), \quad (41)$$

$$\bar{\mathbf{x}}[n] = \Phi \hat{\mathbf{x}}[n-1] + \Gamma \mathbf{u}[n-1], \quad (42)$$

onde (42) é denominada atualização temporal, dependendo apenas do modelo, ao passo que (41) denomina-se correção de medida. Definem-se:

$$\tilde{\mathbf{x}}[n] = \hat{\mathbf{x}}[n] - \mathbf{x}[n], \quad (43)$$

como o erro de estimação *a posteriori* e

$$\tilde{\bar{\mathbf{x}}}[n] = \bar{\mathbf{x}}[n] - \mathbf{x}[n], \quad (44)$$

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 34 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



como o erro de estimação *a priori*. Suas respectivas covariâncias (medidas das magnitudes dos ruídos) são dadas por:

$$\mathbf{P}[n] = \mathbb{E} \{ \tilde{\mathbf{x}}[n] \tilde{\mathbf{x}}^\top[n] \}, \quad (45)$$

e

$$\mathbf{M}[n] = \mathbb{E} \{ \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}[n] \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}^\top[n] \} \quad (46)$$

Ao substituir (43) e (41) em (45), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[n] &= \mathbb{E} \{ \tilde{\mathbf{x}}[n] \tilde{\mathbf{x}}^\top[n] \} \\ &= \mathbb{E} \left\{ (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C}) \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}[n] \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}^\top[n] (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C})^\top \right\} + \mathbb{E} \left\{ \mathbf{L}_c[n] \mathbf{v}[n] \mathbf{v}^\top[n] \mathbf{L}_c^\top[n] \right\} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C}) \mathbf{M}[n] (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C})^\top + \mathbf{L}_c[n] \mathbf{R}_v \mathbf{L}_c^\top[n] \end{aligned} \quad (47)$$

O ganho $\mathbf{L}_c[n]$ é obtido ao minimizar o seguinte custo:

$$\min_{\mathbf{L}_c[n]} J = \text{Tr} (\mathbf{P}[n]) \quad (48)$$

[Controle...](#)[Controle LQR](#)[Filtro de Kalman](#)[Controle LQG](#)[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 35 de 78](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



Antes de prosseguir, considere as seguintes propriedades: sejam \mathbf{G} , \mathbf{A} , \mathbf{X} , \mathbf{B} e \mathbf{P} matrizes de dimensões compatíveis, então

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{Tr} \left[(\mathbf{G} + \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}) \mathbf{P} (\mathbf{G} + \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B})^\top \right] = 2\mathbf{A}^\top (\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{G}) \mathbf{P}\mathbf{B}^\top$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{Tr} (\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^\top) = \mathbf{X} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top)$$

Com isso, verifica-se que:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{L}_c[n]} \text{Tr} \left[(\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C}) \mathbf{M}[n] (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C})^\top \right] = -2 (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C}) \mathbf{M}[n] \mathbf{C}^\top, \quad (49)$$

e,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{L}_c[n]} \text{Tr} (\mathbf{L}_c[n] \mathbf{R}_v \mathbf{L}_c^\top [n]) = \mathbf{L}_c[n] (\mathbf{R}_v + \mathbf{R}_v^\top) = 2\mathbf{L}_c[n] \mathbf{R}_v. \quad (50)$$

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 36 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Logo,

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{L}_c[n]} = -2 (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n] \mathbf{C}) \mathbf{M}[n] \mathbf{C}^\top + 2 \mathbf{L}_c[n] \mathbf{R}_v. \quad (51)$$

Ao igualar (51) a zero, encontra-se $\mathbf{L}_c[n]$, tal que

$$\mathbf{L}_c[n] = \mathbf{M}[n] \mathbf{C}^\top (\mathbf{C} \mathbf{M}[n] \mathbf{C}^\top + \mathbf{R}_v)^{-1} \quad (52)$$

Considere novamente a Equação (47). Ao expandir os termos, chega-se em:

$$\mathbf{P}[n] = \mathbf{M}[n] - \mathbf{L}_c[n] \mathbf{C} \mathbf{M}[n] + \mathbf{L}_c[n] (\mathbf{C} \mathbf{M}[n] \mathbf{C}^\top + \mathbf{R}_v) \mathbf{L}_c^\top[n] - \mathbf{M}[n] \mathbf{C}^\top \mathbf{L}_c^\top[n]. \quad (53)$$

Substituindo (52) no terceiro termo do lado direito de (53),

[Controle...](#)[Controle LQR](#)[Filtro de Kalman](#)[Controle LQG](#)[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 37 de 78](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



obtém-se:

$$\mathbf{P}[n] = (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C}) \mathbf{M}[n] \Rightarrow \mathbf{P}[n](\mathbf{M}[n])^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C}). \quad (54)$$

A Equação (52) pode ser rearranjada como:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_c[n] &= \mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top \mathbf{R}_v^{-1} \mathbf{R}_v (\mathbf{C}\mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top + \mathbf{R}_v)^{-1} \\ &= \mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top \mathbf{R}_v^{-1} (\mathbf{C}\mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top \mathbf{R}_v^{-1} + \mathbf{I})^{-1} \end{aligned} \quad (55)$$

Com isso,

$$\mathbf{L}_c[n] (\mathbf{C}\mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top \mathbf{R}_v^{-1} + \mathbf{I}) = \mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top \mathbf{R}_v^{-1} \quad (56)$$

ou seja,

$$\mathbf{L}_c[n] = \mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top \mathbf{R}_v^{-1} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C}\mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top \mathbf{R}_v^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C}) \mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top \mathbf{R}_v^{-1} \quad (57)$$

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 38 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Portanto, de (54) e (57), chega-se em:

$$\mathbf{L}_c[n] = \mathbf{P}[n] \mathbf{C}^\top \mathbf{R}_v^{-1}. \quad (58)$$

Ao substituir (58) de volta em (54), verifica-se que:

$$\mathbf{P}[n] = (\mathbf{M}^{-1}[n] + \mathbf{C}^\top \mathbf{R}_v^{-1} \mathbf{C})^{-1} \quad (59)$$

Uma forma numericamente mais eficiente de se escrever (59) pode ser obtida utilizando-se o seguinte lema.

Lema 3.1 *Lema da inversão de matrizes*

Considere \mathbf{R} , \mathbf{S} , \mathbf{T} e \mathbf{U} matrizes de dimensões $(N \times N)$, $(N \times K)$, $(K \times K)$ e $(K \times N)$, respectivamente, e que não haja problemas de singularidade com as matrizes a serem invertidas, então, a seguinte relação é válida:

$$(\mathbf{R} + \mathbf{S}\mathbf{T}\mathbf{U})^{-1} = \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}[\mathbf{T}^{-1} + \mathbf{U}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}]^{-1}\mathbf{U}\mathbf{R}^{-1}$$

[Controle...](#)[Controle LQR](#)[Filtro de Kalman](#)[Controle LQG](#)[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 39 de 78](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



Assim:

$$\mathbf{P}[n] = \mathbf{M}[n] - \mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top (\mathbf{C}\mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top + \mathbf{R}_v)^{-1} \mathbf{C}\mathbf{M}[n]. \quad (60)$$

Note que em (58) o ganho $\mathbf{L}_c[n]$ depende de $\mathbf{P}[n]$ dada em (60), que por sua vez depende de $\mathbf{M}[n]$. Para fechar o conjunto de equações recursivas que definem o filtro de Kalman, considere:

$$\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}[n+1] = \bar{\mathbf{x}}[n+1] - \mathbf{x}[n+1] \quad (61)$$

e,

$$\mathbf{M}[n+1] = \mathbb{E} \left\{ \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}[n+1] \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}^\top[n+1] \right\}. \quad (62)$$

De (44) e (36),

$$\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}[n+1] = \Phi \hat{\mathbf{x}}[n] + \Gamma \mathbf{u}[n] - \Phi \mathbf{x}[n] - \Gamma \mathbf{u}[n] - \Psi \mathbf{w}[n] = \Phi \tilde{\mathbf{x}}[n] - \Psi \mathbf{w}[n]. \quad (63)$$

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 40 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Com isso,

$$\begin{aligned}\mathbf{M}[n+1] &= \mathbb{E} \left\{ (\Phi \tilde{\mathbf{x}}[n] - \Psi \mathbf{w}[n]) (\Phi \tilde{\mathbf{x}}[n] - \Psi \mathbf{w}[n])^\top \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \Phi \tilde{\mathbf{x}}[n] \tilde{\mathbf{x}}^\top[n] \Phi^\top \right\} + \mathbb{E} \left\{ \Psi \mathbf{w}[n] \mathbf{w}^\top[n] \Psi^\top \right\} \\ &= \Phi \mathbb{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}[n] \tilde{\mathbf{x}}^\top[n] \right\} \Phi^\top + \Psi \mathbb{E} \left\{ \mathbf{w}[n] \mathbf{w}^\top[n] \right\} \Psi^\top\end{aligned}\quad (64)$$

Portanto,

$$\mathbf{M}[n+1] = \Phi \mathbf{P}[n] \Phi^\top + \Psi \mathbf{R}_w \Psi^\top. \quad (65)$$

Assim se completa as relações que definem o estimador ótimo variante no tempo, conhecido com filtro de Kalman. Os cálculos são resumidos no seguinte procedimento:

As equações recursivas para determinar \mathbf{M} e \mathbf{P} no filtro de Kalman são repetidas aqui:

[Controle...](#)[Controle LQR](#)[Filtro de Kalman](#)[Controle LQG](#)[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 41 de 78](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 42 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

1. Defina \mathbf{R}_v , \mathbf{R}_w , $\bar{\mathbf{x}}[0]$ e $\mathbf{M}[0]$;
2. Faça $n = 0$;
3. Calcule $\mathbf{P}[n] = \mathbf{M}[n] - \mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top (\mathbf{C}\mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top + \mathbf{R}_v)^{-1} \mathbf{C}\mathbf{M}[n]$
4. Calcule $\mathbf{L}_c[n] = \mathbf{P}[n]\mathbf{C}^\top \mathbf{R}_v^{-1}$;
5. Calcule $\hat{\mathbf{x}}[n] = \bar{\mathbf{x}}[n] + \mathbf{L}_c[n](\mathbf{y}[n] - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}[n])$;
5. Atualize $\bar{\mathbf{x}}[n+1] = \Phi\hat{\mathbf{x}}[n] + \Gamma\mathbf{u}[n]$;
6. Atualize $\mathbf{M}[n+1] = \Phi\mathbf{P}[n]\Phi^\top + \Psi\mathbf{R}_w\Psi^\top$;
7. Faça $n = n + 1$;
8. Vá para o passo 3.

$$\mathbf{P}[n] = \mathbf{M}[n] - \mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top (\mathbf{C}\mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top + \mathbf{R}_v)^{-1} \mathbf{C}\mathbf{M}[n]$$

$$\mathbf{M}[n+1] = \Phi\mathbf{P}[n]\Phi^\top + \Psi\mathbf{R}_w\Psi^\top$$

Já para o controle ótimo, tinha-se:

$$\mathbf{M}[n] = \mathbf{P}[n] - \mathbf{P}[n]\Gamma (\mathbf{R} + \Gamma^\top \mathbf{P}[n]\Gamma)^{-1} \Gamma^\top \mathbf{P}[n]$$

$$\mathbf{P}[n-1] = \Phi^\top \mathbf{M}[n]\Phi + \mathbf{Q}$$



Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 43 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

Bruno A. Angélico

PTC5611

Note que as duas formas são semelhantes, exceto pelo sentido da evolução temporal. Assim, da mesma forma que feito no controle ótimo, pode-se considerar a versão em regime estacionário para o estimador, resultando em um ganho constante \mathbf{L}_{SS} . Por analogia ao controle ótimo, tem-se:

$$\mathbf{L}_{SS} = \mathbf{M}_{SS} \mathbf{C}^\top (\mathbf{C} \mathbf{M}_{SS} \mathbf{C}^\top + \mathbf{R}_v)^{-1}, \quad (66)$$

onde

$$\mathbf{M}_{SS} = \Phi \mathbf{P}_{SS} \Phi^\top + \Psi \mathbf{R}_w \Psi^\top, \quad (67)$$

e,

$$\mathbf{P}_{SS} = \mathbf{M}_{SS} - \mathbf{M}_{SS} \mathbf{C}^\top (\mathbf{R}_v + \mathbf{C} \mathbf{M}_{SS} \mathbf{C}^\top)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{M}_{SS} \quad (68)$$

De (67) e (68), obtém-se:

$$\mathbf{M}_{SS} = \Phi \left(\mathbf{M}_{SS} - \mathbf{M}_{SS} \mathbf{C}^\top (\mathbf{R}_v + \mathbf{C} \mathbf{M}_{SS} \mathbf{C}^\top)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{M}_{SS} \right) \Phi^\top + \Psi \mathbf{R}_w \Psi^\top, \quad (69)$$



que está na forma da equação algébrica de Riccati.

No MATLAB, há o comando `dlqe` que, de acordo com a notação utilizada aqui, possui a seguinte sintaxe: $[L, M, P, E] = \text{dlqe}(\Phi, \Psi, C, R_w, R_v)$, sendo E os polos resultantes do observador.

O LQR e o FK são duais, ou seja, relações análogas são obtidas nos dois casos, simplesmente fazendo as correspondências apontadas na Tabela 2

Table 2: Parâmetros duais do LQR e do FK em regime estacionário.

LQR	FK
Φ	Φ^T
Γ	C^T
Q	$\Psi R_w \Psi^T$
R	R_v
K	L_c

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 44 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



🔗 **Exemplo 3:** Considere o sistema descrito por:

$$G(s) = \frac{70}{(s+2)(s+5)(s+7)}$$

A representação em espaço de estados pode ser dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & -59 & -70 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 70 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Assuma que haja ruído branco de medição, tal que $\mathbf{R}_v = 0,01$. Considere também a presença de ruído branco no estado x_1 , tal que $\mathbf{R}_w = 0,01$. Note que assim, pode-se considerar

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[Controle...](#)[Controle LQR](#)[Filtro de Kalman](#)[Controle LQG](#)[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 45 de 78](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



Projete estimadores de estado considerando: a) observador de Luenberger, alocando os polos com dinâmica cerca de três mais rápida do que a menor constante de tempo do sistema; b) filtro de Kalman variante no tempo; c) filtro de Kalman estacionário. Assuma estado inicial igual a $[1 \ 0 \ 1]^T$.

Antes de iniciar a solução, observe que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

Assim, para incluir o ruído de processo no modelo, pode-se considerar a matriz aumentada $\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ no modelo em espaço de estados, bem como o vetor de entrada $\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$.

[Controle...](#)[Controle LQR](#)[Filtro de Kalman](#)[Controle LQG](#)[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 46 de 78](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



A solução é obtida pelo seguinte código Matlab:

[Controle...](#)[Controle LQR](#)[Filtro de Kalman](#)[Controle LQG](#)[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 47 de 78](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)

```
clear all; clc; %close all;
fs=50; Ts=1/fs; s = tf('s');
G = 1/((s+2)*(s+5)*(s+7)); K_G = 1/dcgain(G); G = K_G*G;
%OBS 1: O ganho foi transferido para a matrix de entrada. Assim y = x_3
[A,B,C,D] = tf2ss(G.num{:},G.den{:}); B = B*K_G; C = C/K_G;
[Phi,Gamma] = c2d(A,B,Ts);
Psi = [1 0 0]'; Rv = 1e-2; Rw = 1e-2;
%OBS 2: no bloco State-Space1 a matrix B foi modificada para considerar a
%entrada de ruído em x_1. Consequentemente, D foi modificada
A1 = A; B1 = [B, Psi]; C1 = C; D1 = [0 0]; % Bloco State-Space1
%OBS 3: no bloco State-Space2 C=eye(3) para obter todos os estados
% para fins de comparação
A2 = A; B2 = B; C2 = eye(3); D2 = [0; 0; 0]; % Bloco State-Space2
x_0 = [1 0 1]; %estado inicial
item = 'a';
switch(item)
case 'a' %Lumberger
so = [-21; -22+j*2; -22-j*2]; p_o = exp(so*Ts);
Lc = place(Phi', (C*Phi)', p_o)';
sim('SIM_EX4_CHAP_12_a');
case 'b' %Filtro de Kalman
M_0 = eye(3);
sim('SIM_EX4_CHAP_12_b');
case 'c' %Filtro de Kalman estacionário
Lc = dlqe(Phi, Psi, C, Rw, Rv);
```



Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 48 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

```
sim('SIM_EX4_CHAP_12_a');
otherwise
error('item precisa se 'a', 'b' ou 'c' ');
end
x_1 = x_out(:,1); x_2 = x_out(:,2); x_3 = x_out(:,3); y = x_3;
x_chap_1 = x_chap_out(:,1); x_chap_2 = x_chap_out(:,2);
x_chap_3 = x_chap_out(:,3); y_chap = x_chap_3;
t_d = (0:length(y_chap)-1)*Ts;
figure(1);
plot(t,y,'b',t_d,y_noisy,'y',t_d,y_chap,'r');
xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('Amplitude', 'Interpreter', 'latex');
l = legend('$y$ sem ruído', '$y$ com ruído', '$\hat{y}$');
set(l, 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', 12);
figure(2);
subplot(3,1,1); plot(t,x_1,'b—',t_d,x_chap_1,'r'); axis([0 20 -4 4]);
xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('Amplitude', 'Interpreter', 'latex');
l = legend('$x_1$', '$\hat{x}_1$'); set(l, 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', 12);
subplot(3,1,2); plot(t,x_2,'b—',t_d,x_chap_2,'r'); axis([0 20 -2 2]);
xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('Amplitude', 'Interpreter', 'latex');
l = legend('$x_2$', '$\hat{x}_2$');
set(l, 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', 12);
subplot(3,1,3); plot(t,x_3,'b—',t_d,x_chap_3,'r'); axis([0 20 -0.5 1.5]);
xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('Amplitude', 'Interpreter', 'latex');
l = legend('$x_3$', '$\hat{x}_3$'); set(l, 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', 12);
```




Diagramas de simulação estão apresentados nas Figuras 5 e 6.

Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 49 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

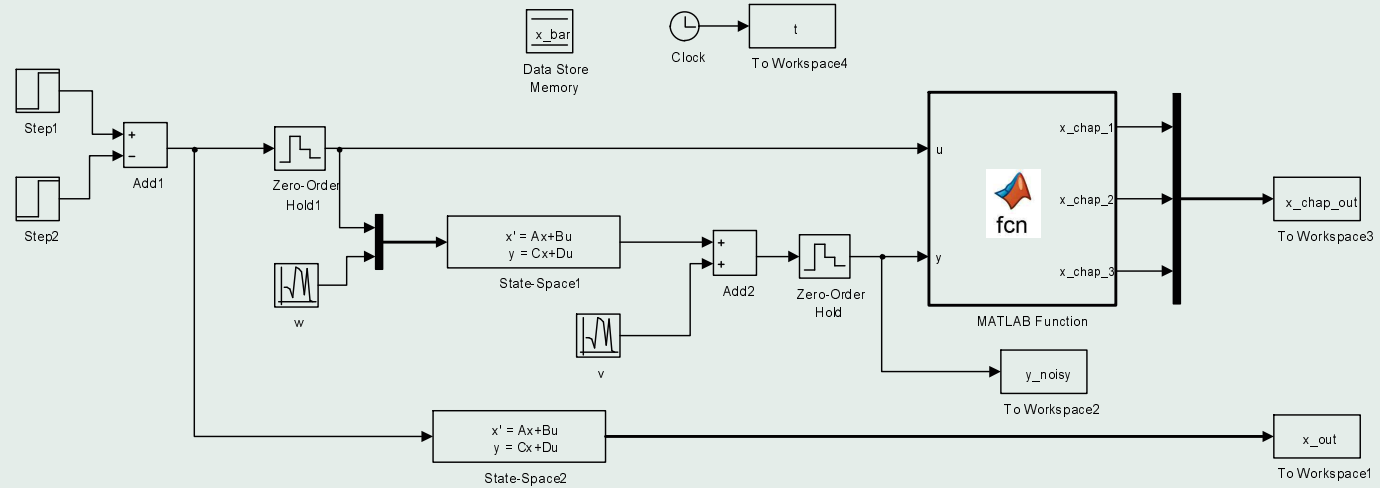


Figure 5: Diagrama de blocos da simulação o Exemplo 3 a e c.



Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 50 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

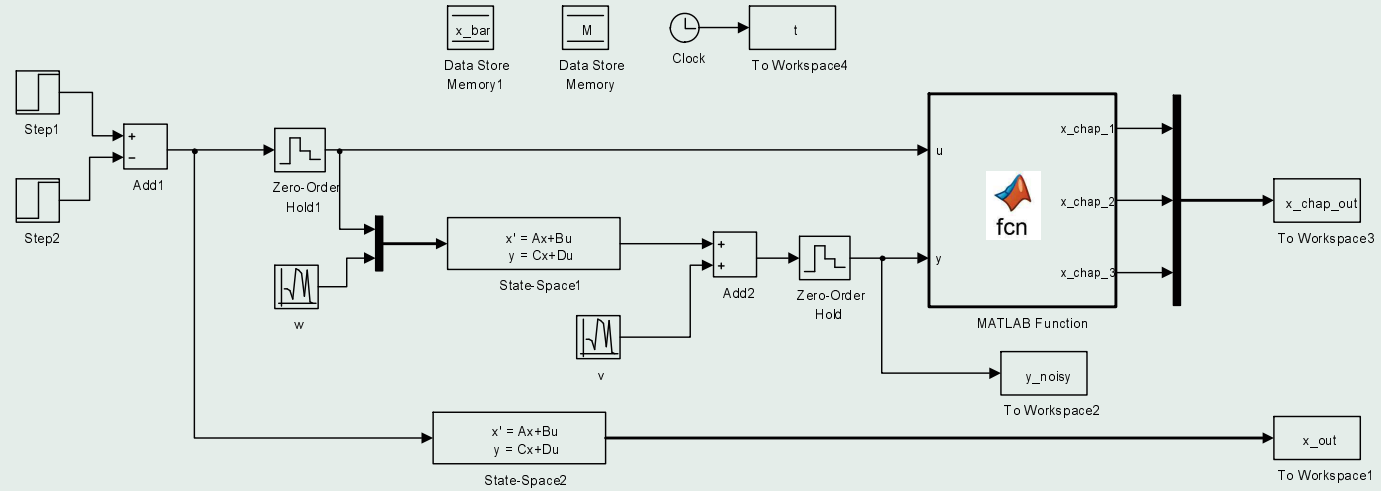


Figure 6: Diagrama de blocos da simulação o Exemplo 3 b.

Códigos dos blocos Matlab Function:

```
%a) e c) Luenberger e Kalman Estacionário
function [x_chap_1, x_chap_2, x_chap_3] = ...
fcn(u, y, Phi, Gamma, C, Lc)
%#eml
global x_bar;
x_chap = x_bar + Lc*(y - C*x_bar);
x_bar = Phi*x_chap+ Gamma*u;
x_chap_1 = x_chap(1); x_chap_2 = x_chap(2); x_chap_3 = x_chap(3);
```



Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



Página 51 de 78

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

```
%b) Kalman variante no tempo
function [x_chap_1, x_chap_2, x_chap_3] = ...
fnc(u, y, Phi, Gamma, C, Rv, Rw, Psi)
%#eml
global x_bar;
global M;
P = M-M*C'*inv(C*M*C'+Rv)*C*M;
Lc = P*C'*inv(Rv);
x_chap = x_bar + Lc*(y - C*x_bar);
x_bar = Phi*x_chap+ Gamma*u;
M = Phi*P*Phi'+Psi*Rw*Psi';
x_chap_1 = x_chap(1); x_chap_2 = x_chap(2); x_chap_3 = x_chap(3);
```

Os resultados obtidos são mostrados nas Figuras 7 a 9.



Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



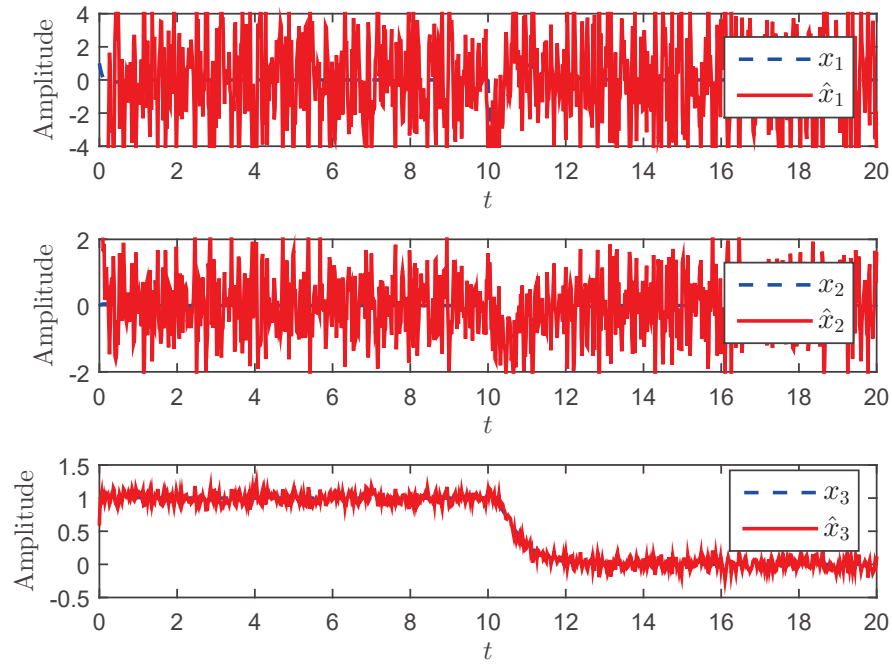
Página 52 de 78

Voltar

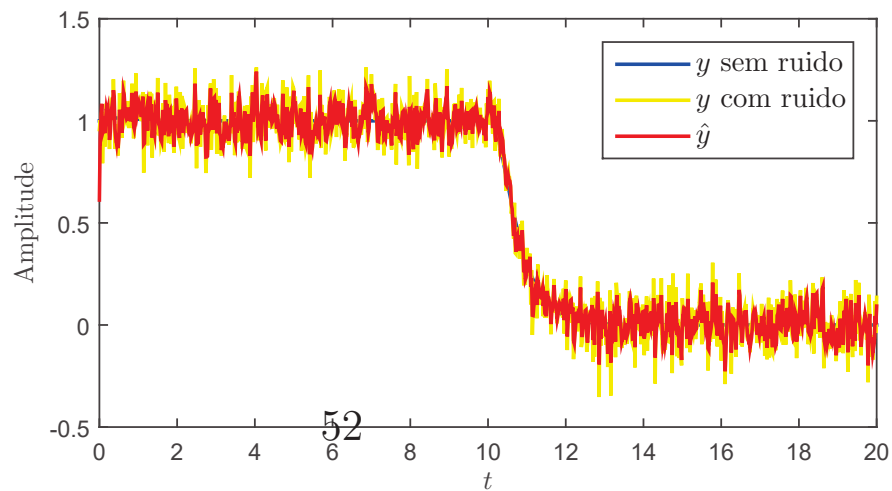
Full Screen

Fechar

Desistir



(a) Saída e Estados



(b) Sinal de Controle



Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



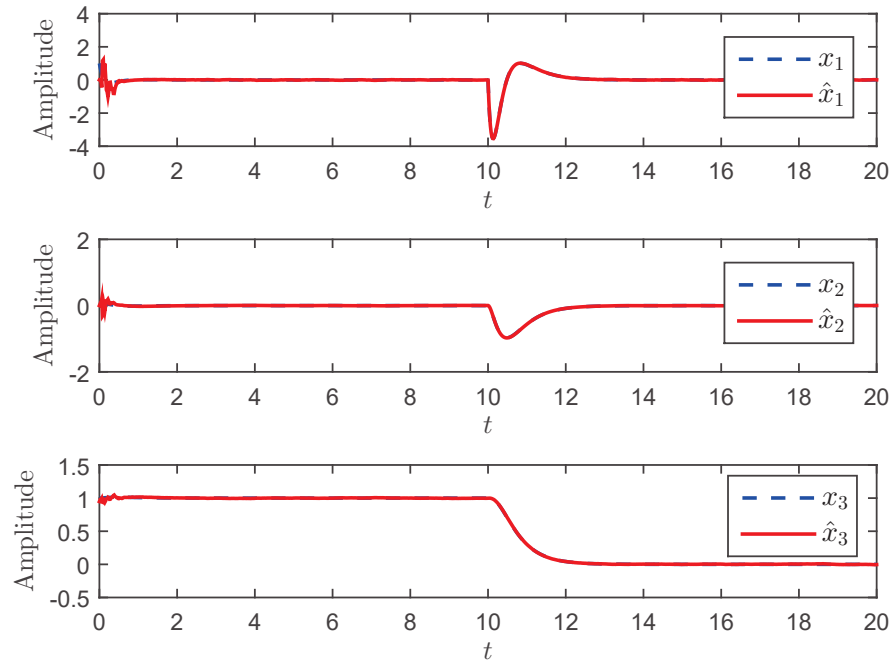
Página 53 de 78

Voltar

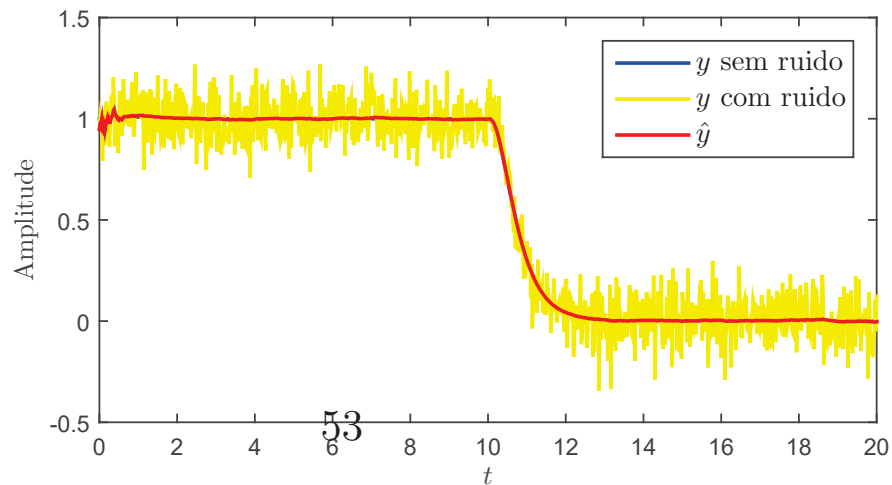
Full Screen

Fechar

Desistir



(a) Saída e Estados



(b) Sinal de Controle



Controle...

Controle LQR

Filtro de Kalman

Controle LQG

Homepage

Página de Rosto



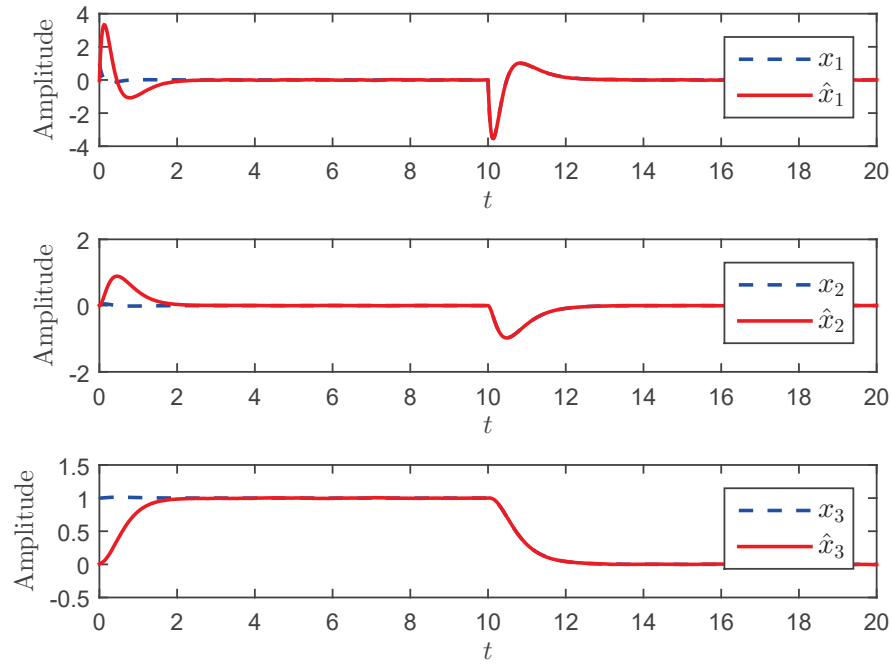
Página 54 de 78

Voltar

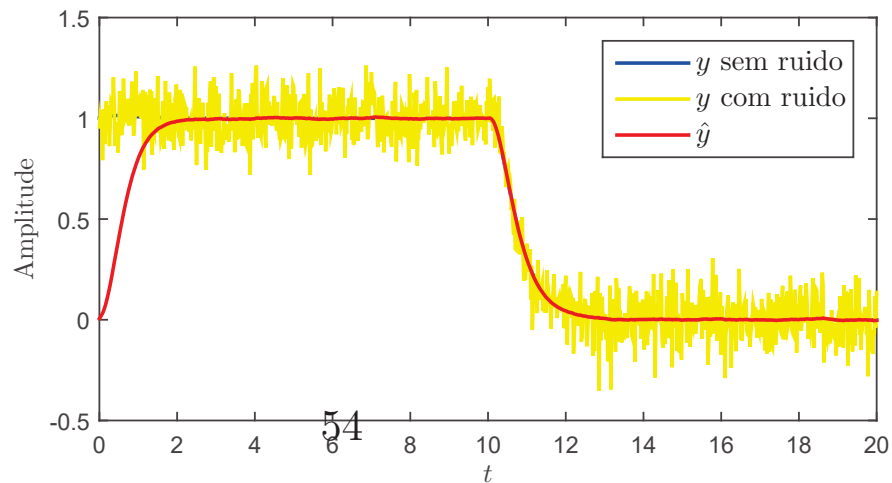
Full Screen

Fechar

Desistir



(a) Saída e Estados



(b) Sinal de Controle