Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

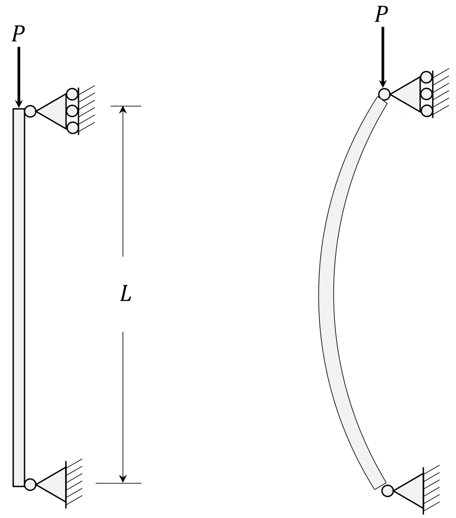
PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #25

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

29/11/2023

Barra sob força axial

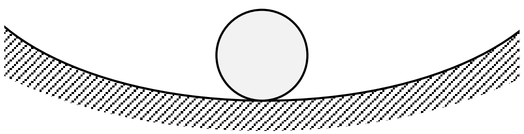


P "pequena" P "grande"

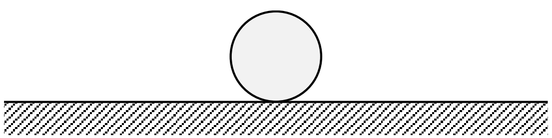
Flambagem

- A flambagem só ocorre para forças de compressão
- A flambagem ocorre para valores de P "grandes"
- Uma barra esbelta é mais suscetível à flambagem
- A tensão limite do material pode ser atingida na flambagem
- A flambagem é um tipo de instabilidade estrutural

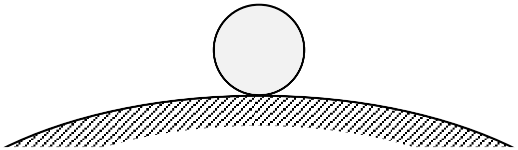
Tipos de equilíbrio



Equilíbrio Estável



Equilíbrio indiferente

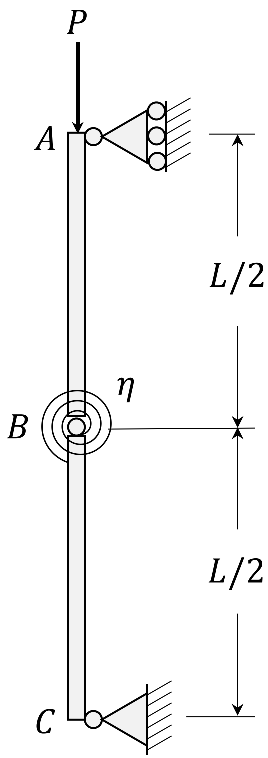


Equilíbrio instável

- Pequenas causas provocam pequenos efeitos

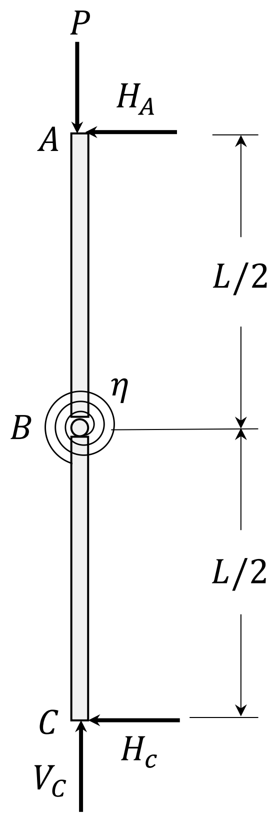
- Pequenas causas provocam grandes efeitos

Modelo idealizado



$$\bar{M}_B = \eta\,\beta$$

- DCL



- Equilíbrio

$$\Sigma F_H = 0 \;\Rightarrow H_A + H_C = 0$$

$$\Sigma F_V = 0 \;\Rightarrow V_C - P = 0 \;\Rightarrow V_C = P$$

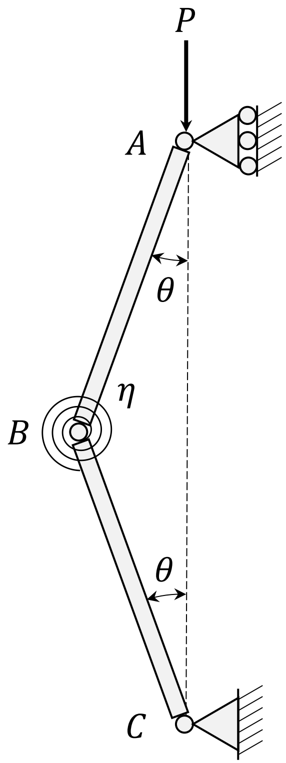
$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow H_A\, L = 0 \;\Rightarrow H_A = 0$$

$$\Rightarrow H_C = 0$$

- O equilíbrio na posição vertical é sempre possível

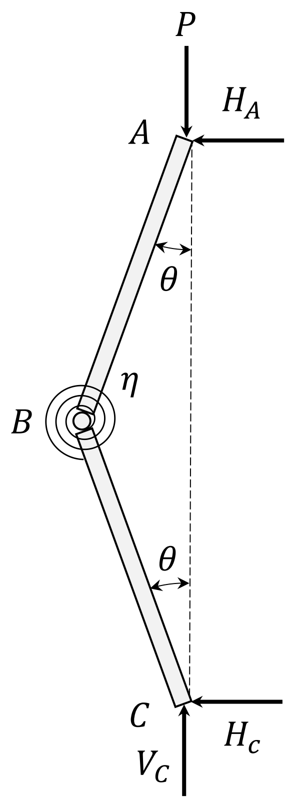
- Se as barras estão na posição vertical o *momento restaurador* é nulo

Modelo idealizado



Volta ou não volta para a posição vertical?

- DCL



- Equilíbrio

$$\Sigma F_H = 0 \;\Rightarrow H_A + H_C = 0$$

$$\Sigma F_V = 0 \;\Rightarrow V_C - P = 0 \;\Rightarrow V_C = P$$

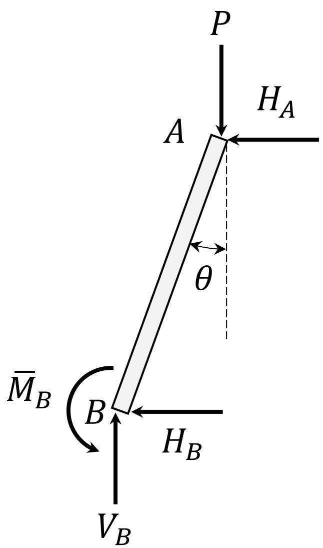
$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow H_A\, L \cos\theta = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\Rightarrow H_C = 0$$

- Não dá para responder a pergunta porque o momento restaurador é um *esforço interno* e só vai aparecer nas equações de equilíbrio se as barras forem separadas!

Modelo idealizado

- DCL explodido



- Equilíbrio

$$\Sigma F_H = 0 \;\Rightarrow H_A + H_B = 0$$

$$\Sigma F_V = 0 \;\Rightarrow V_B - P = 0 \Rightarrow V_B = P$$

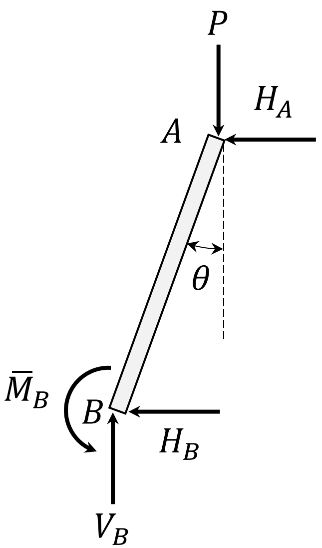
$$\Sigma M_C = 0 \;\Rightarrow H_A \frac{L}{2} \cos\theta - \frac{PL}{2} \operatorname{sen}\theta + \bar{M}_B = 0$$

como $H_A = 0 \Rightarrow H_B = 0$

$$\Rightarrow \bar{M}_B = \frac{PL}{2} \operatorname{sen}\theta$$

- Se o momento restaurador for igual ao momento da força P haverá equilíbrio na posição deformada
- Se o momento restaurador for maior que o momento da força P, o sistema volta para a posição vertical
- Se o momento restaurador for menor que o momento da força P, não haverá equilíbrio

Modelo idealizado



$$\bar{M}_B = \frac{PL}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

mas $\bar{M}_B = \eta\, 2\theta$

$$\Rightarrow \eta 2\theta = \frac{PL}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

- Equação característica:

$$\frac{PL}{4\eta}\,\mathrm{sen}\,\theta - \theta = 0$$

- Existe sempre a *solução trivial* $\theta = 0$ que corresponde à posição vertical do sistema

- Quando existe outra solução com $\theta \neq 0$?

Modelo idealizado

- Equação característica:

$$\frac{PL}{4\eta}\,\mathrm{sen}\,\theta - \theta = 0$$

- Para pequenos ângulos:

$$\mathrm{sen}\,\theta = \theta$$

- Equação característica linearizada

$$\left(\frac{PL}{4\eta} - 1\right)\theta = 0$$

- Duas soluções:

i) $\theta = 0$

ii) $P = \dfrac{4\eta}{L}$

- *Carga crítica* ou *carga de Euler:*

$$P_{cr} = \frac{4\eta}{L}$$

- Conclusão:

$$P \neq P_{cr} \Rightarrow \theta = 0$$

$$P = P_{cr} \Rightarrow \theta \text{ é } qualquer$$

- Esta conclusão é o que se espera?

- Informações foram perdidas no processo de linearização!

Modelo idealizado

- Equação característica:

$$\frac{PL}{4\eta}\operatorname{sen}\theta - \theta = 0$$

- Para pequenos ângulos:

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6}$$

- Equação característica não-linear

$$\left[\frac{PL}{4\eta}\left(1 - \frac{\theta^2}{6}\right) - 1\right]\theta \ = 0$$

ou

$$\left(1 - \frac{\theta^2}{6} - \frac{4\eta}{PL}\right)\theta = 0$$

ou, ainda,

$$\left(1 - \frac{\theta^2}{6} - \frac{P_{cr}}{P}\right)\theta = 0$$

- Raízes

i) $\theta = 0$

ii) $\theta = \pm\sqrt{6}\sqrt{1 - \frac{P_{cr}}{P}}$

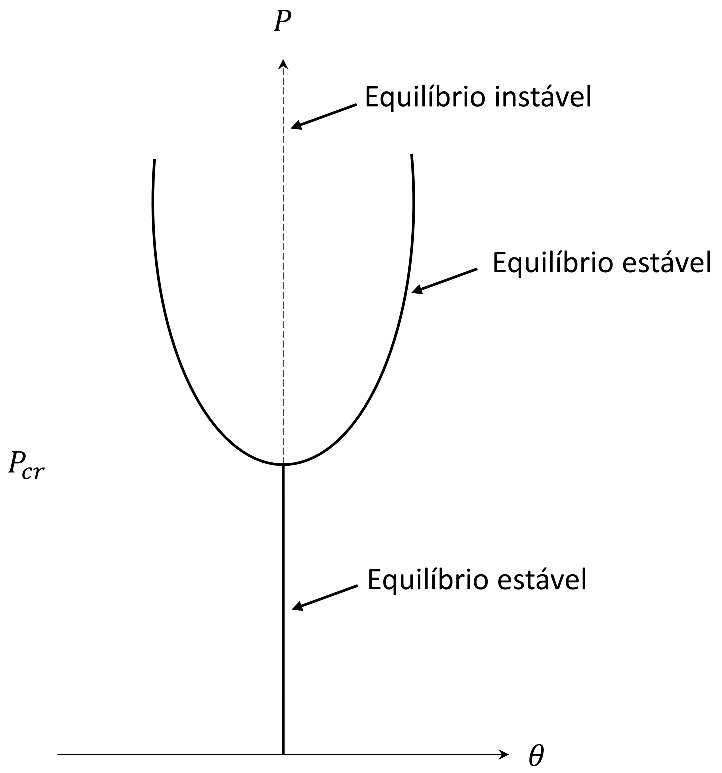
- Note que só existe solução não-trivial para $P > P_{cr}$

Modelo idealizado

- A solução linearizada não é capaz de prever o que acontece para valores de P superiores à carga crítica

- Mas ela é capaz de prever o valor da carga crítica

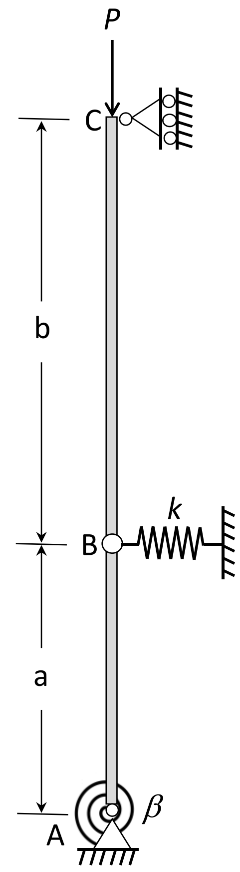
- Diagrama de estabilidade

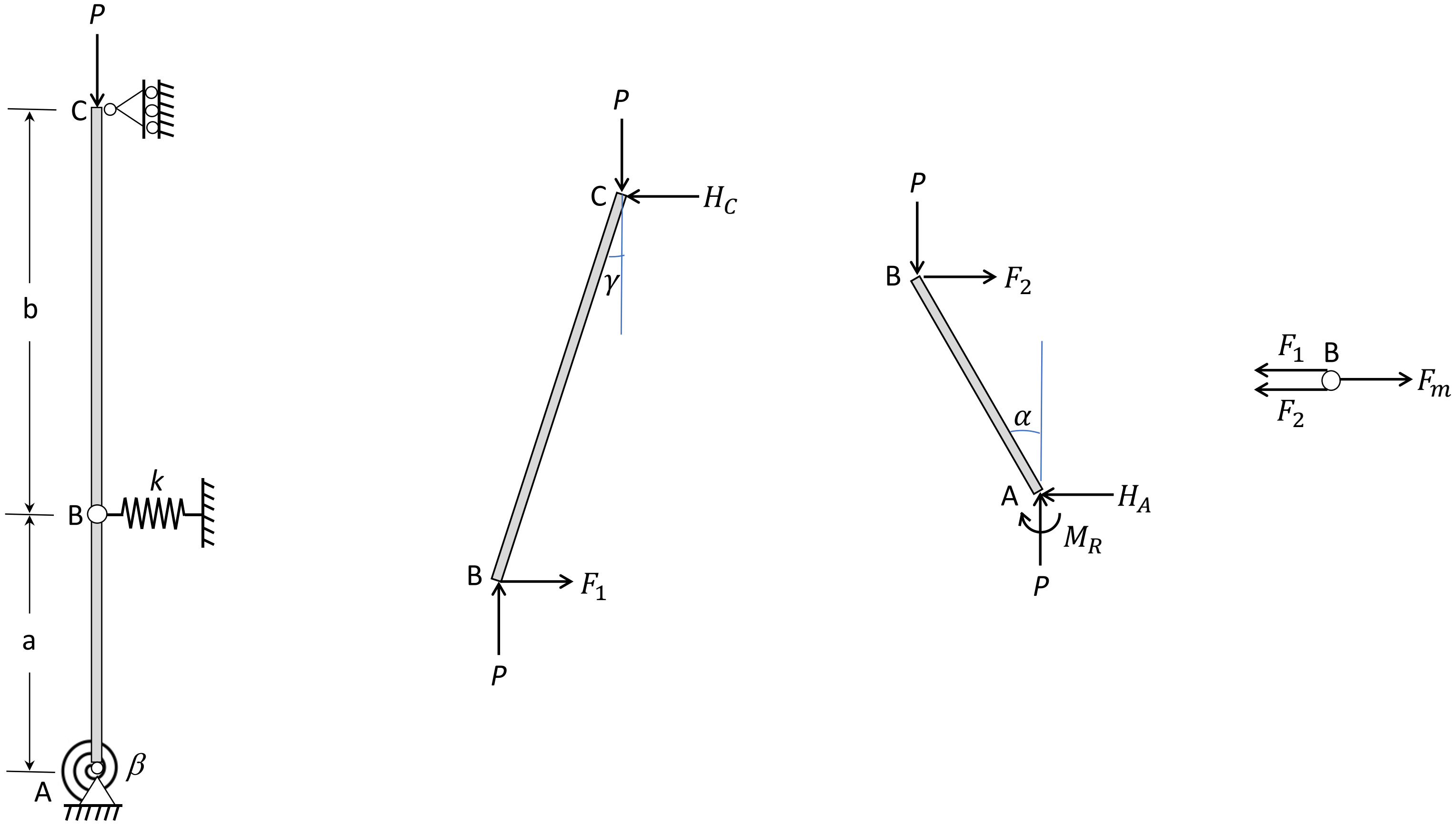


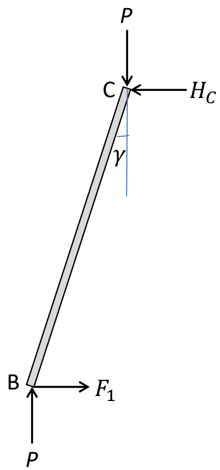
Instabilidade do tipo "pitchfork"

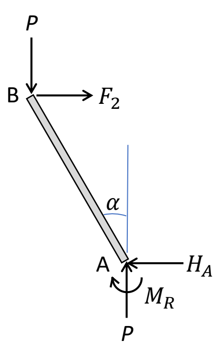
Exercício

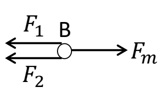
A figura mostra uma estrutura idealizada formada por duas barras infinitamente rígidas, AB e BC, conectadas em B por uma articulação. A estrutura está vinculada em A por uma articulação ligada a uma mola rotacional linear de constante elástica β e em C, por um apoio simples. À articulação B está conectada uma mola translacional linear de constante elástica k. A estrutura está submetida a uma força vertical P. Pede-se determinar o valor crítico de P.




P
C
b
k
B
a
β
A
P
C
H_C
γ
B
F_1
P
P
B
F_2
α
A
H_A
M_R
P
F_1
B
F_m
F_2







- Barra *AB*

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow P a\alpha - F_2 a = M_R = \beta\alpha$$

- Barra *BC*

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow P\gamma - F_1 = 0$$

- Nó *B*

$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = k a\alpha = k b\gamma$$

- Juntando tudo:

$$[Pa(a+b) - b(ka^2 + \beta)]\alpha = 0$$

- Carga crítica: (Para haver uma solução diferente da trivial)

$$P_{cr} = \frac{b(ka^2 + \beta)}{a(a+b)}$$

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo da Flambagem de Barras.* Disponível no Moodle

Gere, J.M. & Goodno, B.J. *Mecânica dos Materiais* – 7ª edição – Capítulo 11