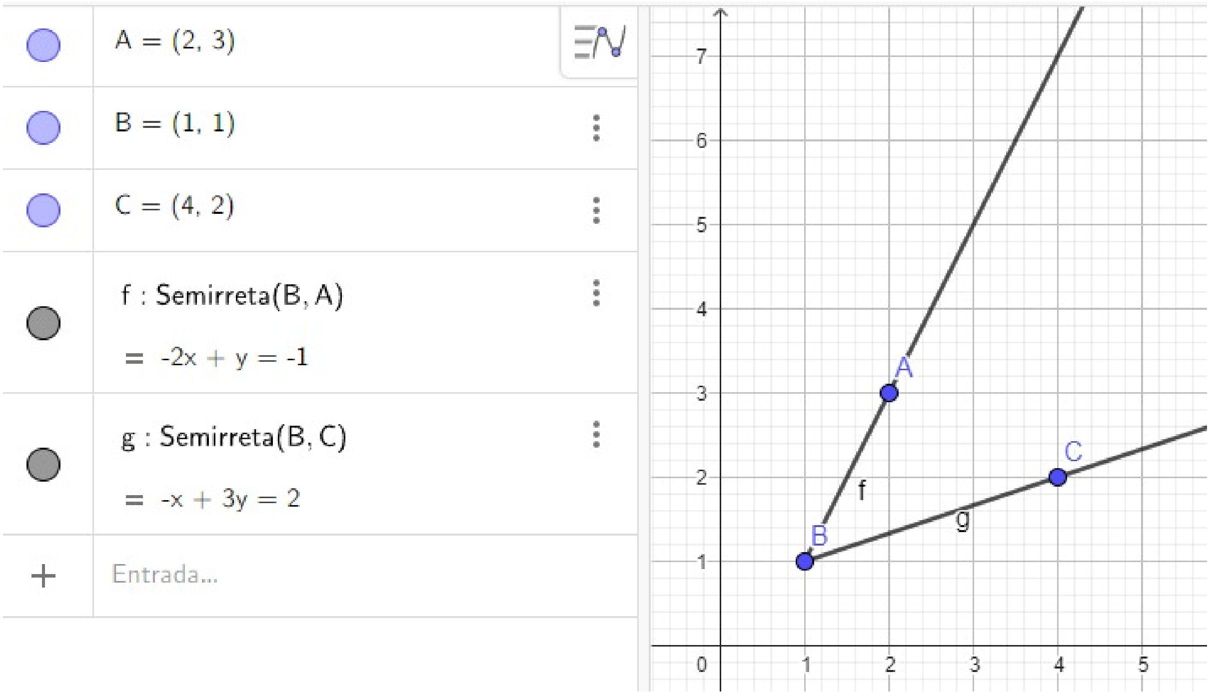
ENCONTRANDO MEDIDAS DE ÂNGULO NO PLANO EUCLIDIANO

Inicialmente, é importante sabermos como encontrar a medida de um ângulo no Plano Euclidiano, usando Geometria Analítica mesmo…

Listando aqui os passos para encontrar a medida de um ângulo ABC no Plano Euclidiano sabendo as coordenadas dos pontos A, B e C:

1 - Encontre os vetores BA e BC;
2 - Calcule o produto escalar entre BA e BC, a norma de BA e a norma de BC;
3 - Use o fato de que arccos(BA.BC/(|BA| |BC|)) = theta, sendo que theta é o ângulo entre os vetores (é interessante usar calculadora aqui mesmo).

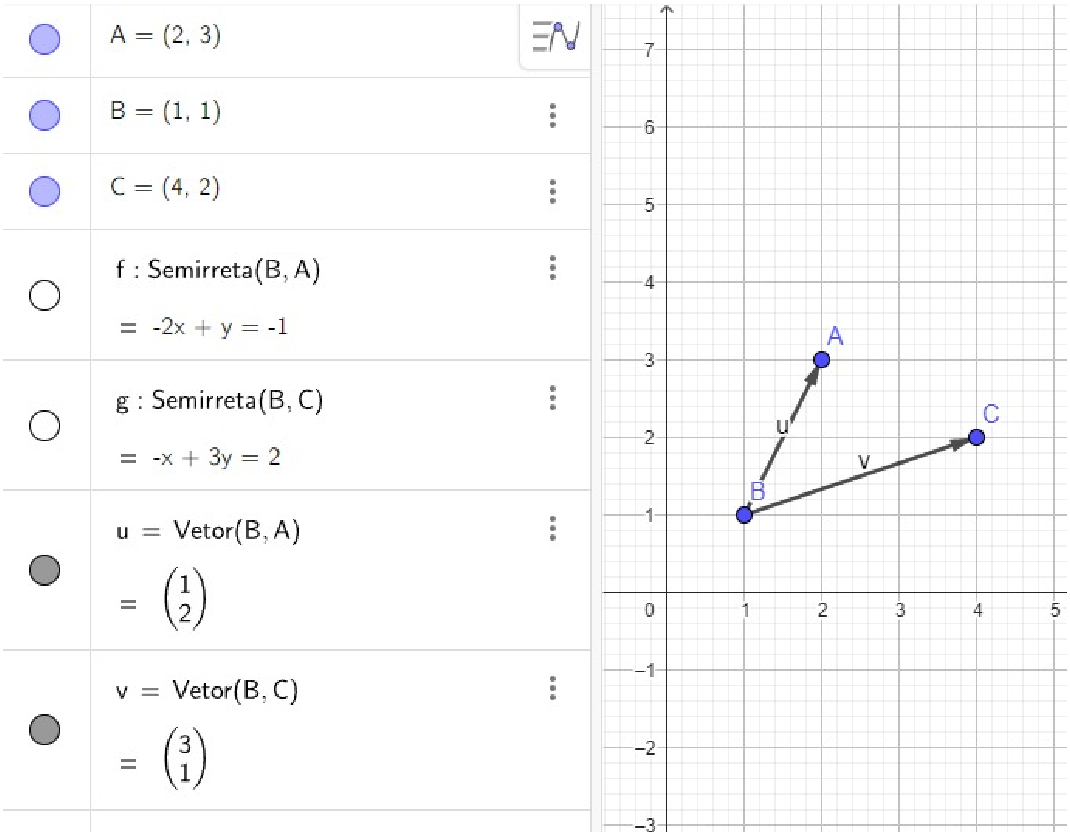


Fui no GeoGebra e marquei um ângulo ABC qualquer lá

A gente pega vetores representantes das semirretas (BA e BC), lembrando que o sentido dos vetores importa aqui...

O vetor BA no Plano Euclidiano é a gente pensar no movimento que faz o ponto B chegar no ponto A, ou caso prefira, A - B (pega as coordenadas de A e subtrai pelas de B)

O vetor BC é análogo!



Aí nesse caso, temos o seguinte:

Depois calculamos o produto escalar entre os vetores e a norma dos vetores

Lembrando que o produto escalar entre vetores u = (x1, y1) e v = (x2, y2) é

$$u \cdot v = x1*x2 + y1*y2$$

E a norma de um vetor u = (x1, y1) é

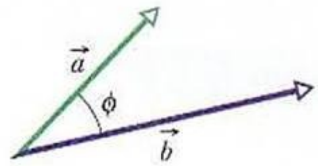
$$|u| = \sqrt{(x1^2 + y1^2)}$$

Nesse exemplo, obtemos BA . BC = 5, $|BA| = \sqrt{5}$ e $|BC| = \sqrt{10}$

Aí usamos a seguinte relação:

O produto escalar dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ escrito como $\vec{a} \cdot \vec{b}$
e definido pela equação:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\phi$$



Onde $|\vec{a}|$ é o módulo de $\vec{a}$, $|\vec{b}|$ é o módulo de $\vec{b}$
e ϕ é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Sabendo o produto escalar e as normas dos vetores, isolamos o ângulo:

cos(theta) = a . b / (|a| |b|)

Nesse nosso exemplo, fica assim:

BA . BC = |BA| |BC| cos(theta)

5 = √5 √10 cos(theta)

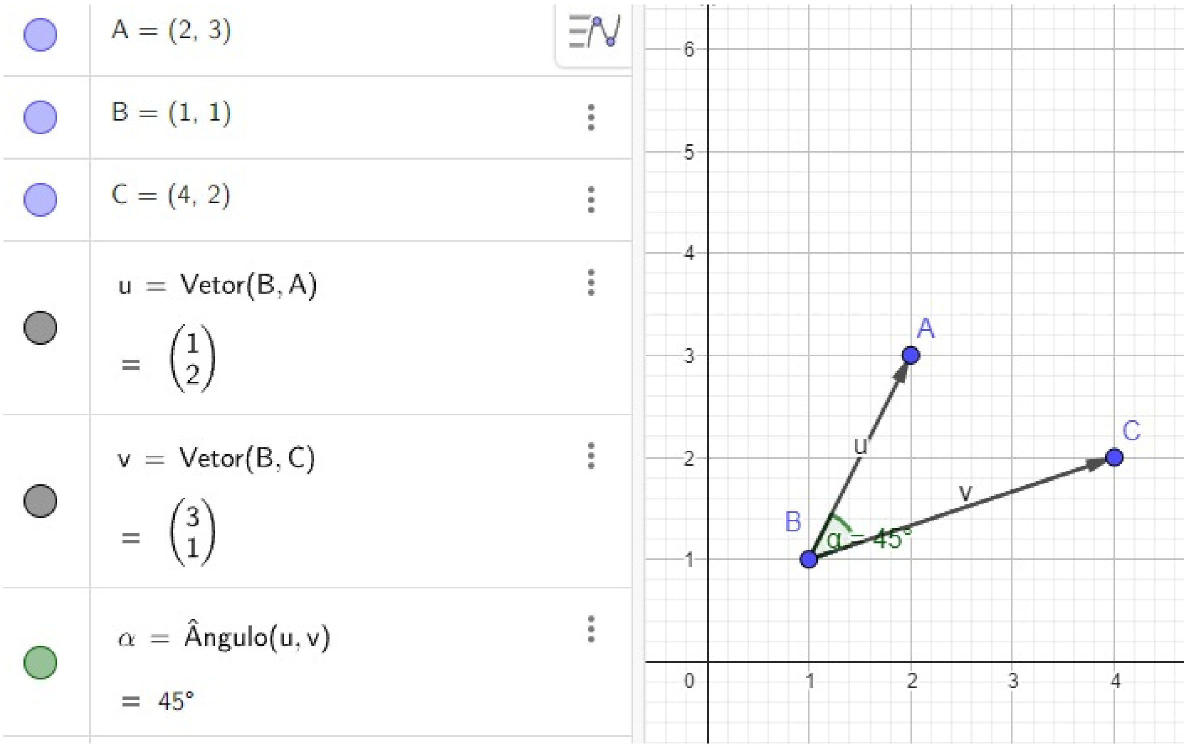
cos(theta) = 5/(√5√10)

E agora o último passo de todo esse rolê é usar TRIGONOMETRIA INVERSA ✨

arccos(5/(√5√10)) = theta

arccos(5/(√5√10)) = 45º

Aí essa parte cê tem que usar a calculadora mesmo haaahaha



E esse são os passos para se encontrar a medida de um ângulo no Plano Euclidiano (percebam que a depender dos pontos, pode ser um tanto um trabalhoso).

ENCONTRANDO MEDIDAS DE ÂNGULO NO PLANO DE MOULTON

Lembrando que no Plano de Moulton, só as RETAS ESTRITAMENTE CRESCENTES que "ENTORTAM" (retas verticais, horizontais e decrescentes não entortam).

E os ângulos são muitos parecidos com os euclidianos, mas podem mudar se alguma das arestas cruza o eixo y.

Observe as questões retiradas da pág. 48 do PDF de slides de MAT0230:

Exercícios

No plano de Moulton

1) Encontre a medida do <ABC, sendo A = (1, 1), B = (0, 0) e C = (-1, -1).
2) Quanto vale a soma dos ângulos internos do $\Delta\, ABC$,se:

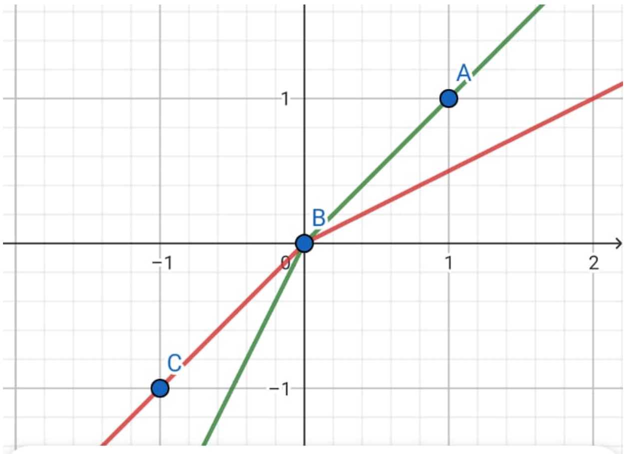
a) A = (0, 0), B = (1, 0) e C = (1, 1).

b) A = (-2, 0), B = (2,-4) e C = (2, 4).

3) Faça um desenho do ΔABC do exercício 1. Observe que o conjunto de pontos que formam este triângulo é também um triângulo do plano euclidiano, mas com outros vértices e outros lados.

Solução do exercício 1: m(< ABC) = m_E(<A_0BC_0), A_0= (1, 2) e C_0= (-1, -1). Usando o produto escalar, temos -3 = $\sqrt{5}\,\sqrt{2}$ cos α. Segue daí cos α = $\frac{-3}{\sqrt{10}}$ e a medida do ângulo é aproximadamente 161 graus

Na questão 1 os pontos A, B e C com as retas AB e BC ficam assim:



$f(x) = x, \quad (x \geq 0)$

$g(x) = 2x, \quad (x < 0)$

$h(x) = x, \quad (x < 0)$

$p(x) = \frac{x}{2}, \quad (x \geq 0)$

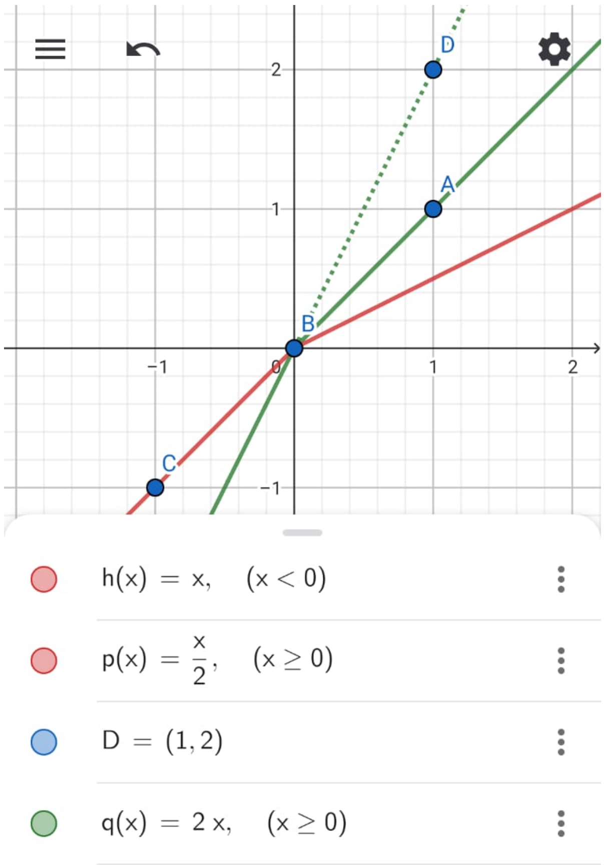
Tracei a reta AB em verde e a reta BC em vermelho

As retas no Plano de Moulton perdem metade da inclinação depois que passam do eixo y

O ponto C está do lado esquerdo do eixo y, neste momento a reta em vermelho não foi "entortada"

Já o ponto A está do lado direito do eixo y, quando a reta em verde foi "entortada"

Então, vamos desentortar a reta AB (em verde) e imaginar onde seria o ponto A se a reta não perdesse metade da inclinação (depois de passar pelo eixo y)



Daí, chegamos nesse ponto D (que o PDF do professor chamaria de A_0)

No que segue, notaremos a medida de ângulo euclidiano por m_E. Também, se P = (x, y) e b∈ $\mathbb{R}$, usamos a notação P_b= (x, 2y – b) se x > 0 e y > b. Em todos os outros casos, P_b= P.

Enfim, agora que a gente "desentortou" a reta AB, criando um ponto A_0, vamos calcular o ângulo A_0BC_0

Sendo que C_0 = C, pelo fato de que C não está numa parte "torta" da reta

Eu vou escrever como ângulo DBC (já que eu chamei o A_0 de D e o C_0 é a mesma coisa que o C)

Agora é Geometria Analítica: vamos pensar nas nos vetores BD e BC

BD = (1 - 0, 2 - 0) = (1, 2)

E analogamente, o vetor BC = (-1, -1)

Tendo esses vetores, podemos descobrir o ângulo entre eles usando o produto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\phi$$

BD . BC = 1(-1) + 2(-1) = -3

|BD| = √($1^2 + 2^2$) = ✓5

|BC| = √($(-1)^2 + (-1)^2$) = ✓2

Aí usando a fórmula do produto escalar:

-3 = √5 √2 cos(theta)
-3 = ✓10 cos(theta)

Isola o cosseno:

cos(theta) = -3/✓10

E por fim, usa a relação trigonométrica inversa... arccos para descobrir theta:

arccos(-3/✓10) = theta
theta = 161,56°

Para esse finalzin, vai precisar de calculadora:

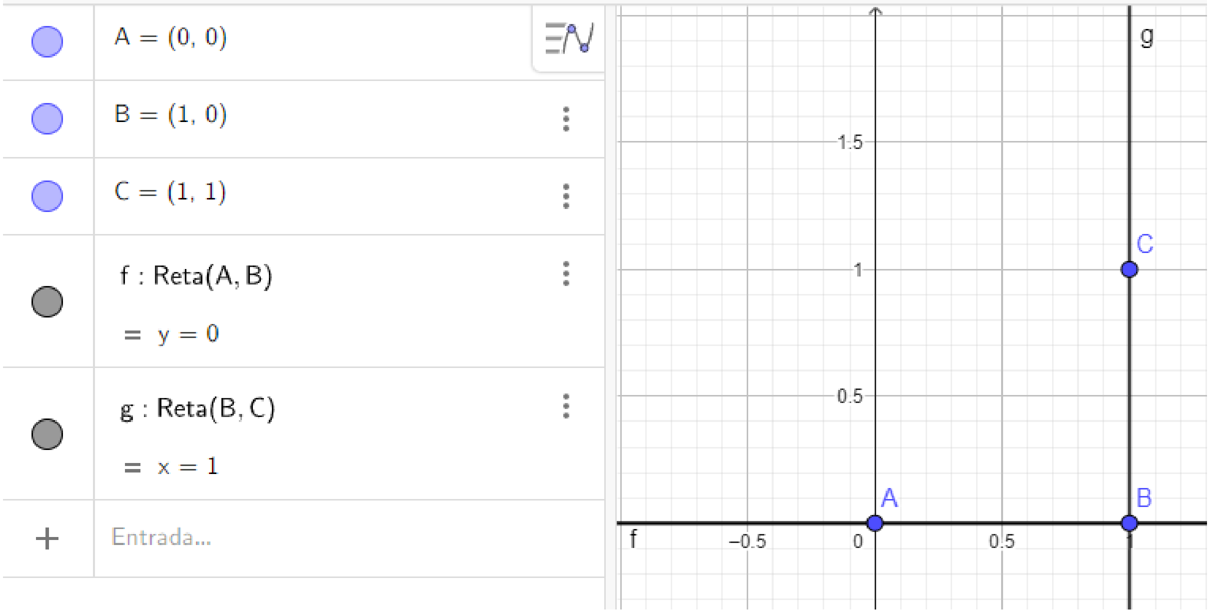
$$\cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= \quad 161.565051177078^{\circ}$$

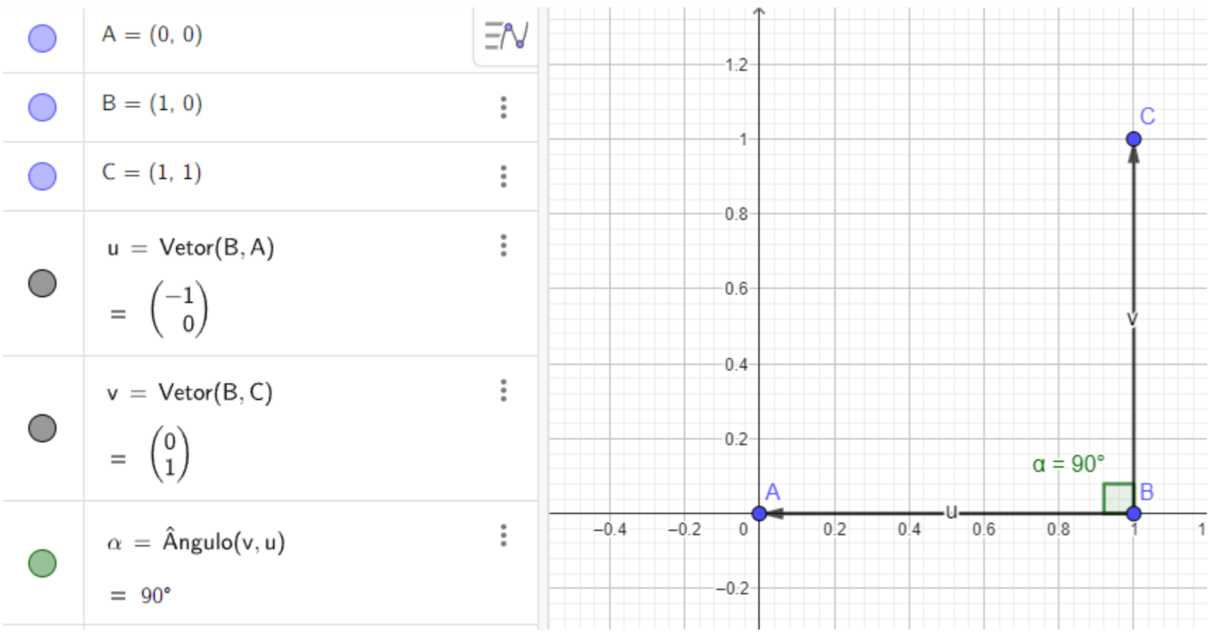
No item “a” da questão 2 as retas do ângulo ABC são retas “bonitinhas” que não se quebraram/entortaram… e daí a medida do ângulo é a mesma medida do ângulo euclidiano:

2) Quanto vale a soma dos ângulos internos do $\Delta\, ABC$,se:

a) A = (0, 0), B = (1, 0) e C = (1, 1).



Usando a noção de vetores, produto escalar e trigonometria inversa, assim como nas páginas anteriores deste PDF, sabe-se que a medida do ângulo ABC é igual a 90º, conforme a figura que fiz no GeoGebra:

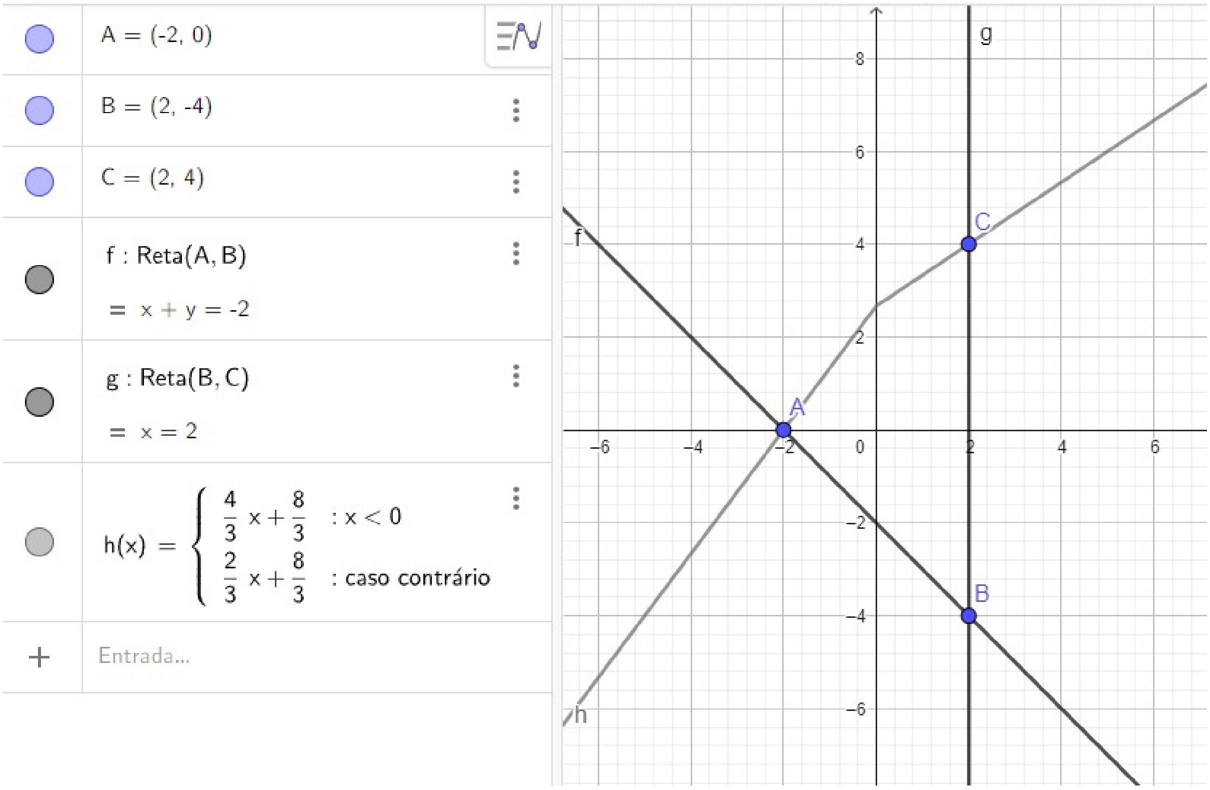


No item “b” da questão 2 a gente tem uma figura assim, marcando os pontos A, B e C que são dados, bem como as retas que passam por eles:

2) Quanto vale a soma dos ângulos internos do $\Delta\, ABC$,se:

a) A = (0, 0), B = (1, 0) e C = (1, 1).

b) A = (-2, 0), B = (2,-4) e C = (2, 4).

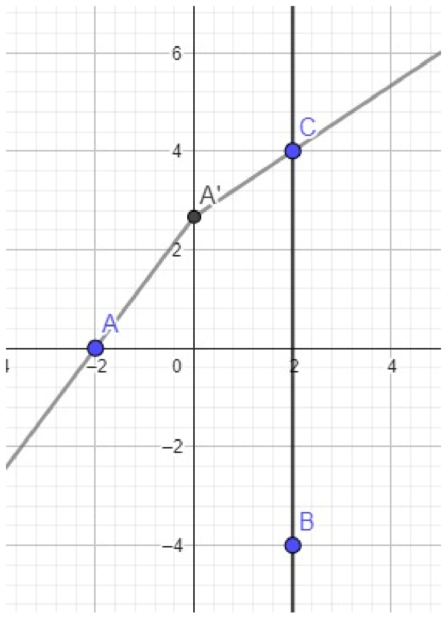


Lembrando que no Plano de Moulton, só as RETAS ESTRITAMENTE CRESCENTES que "ENTORTAM"

E os ângulos são muitos parecidos com os euclidianos, mas podem ser estranhos quando algum dos pontos cruza o eixo y

O ângulo ABC fica que nem o ângulo euclidiano, normalzin… isso porque as retas BA e BC não entortam no Plano de Moulton

Já os ângulos BCA e CAB envolvem retas que entortam… daí vem a tal da intersecção com das retas com o eixo y que alguns de vocês já devem ter ouvido falar!

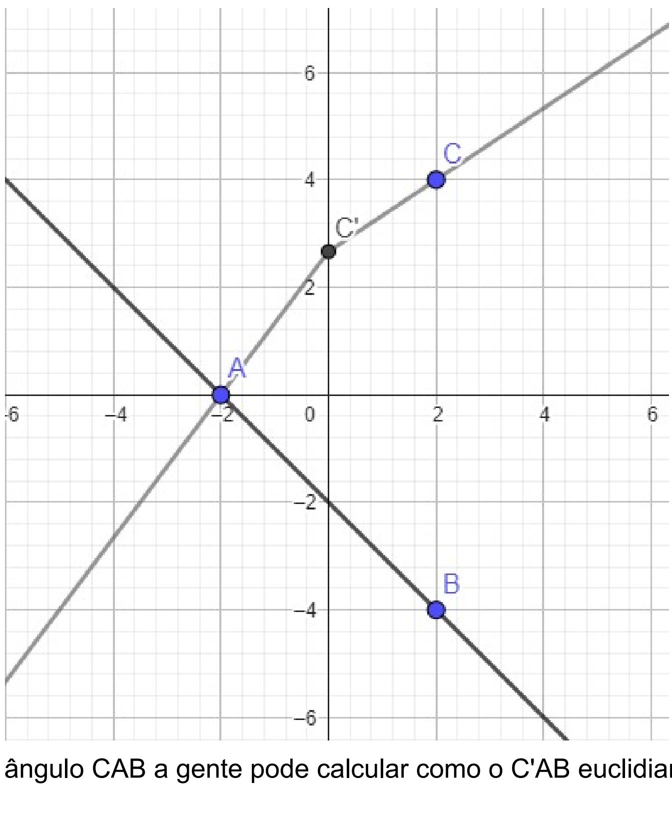


O ângulo BCA a gente pode calcular como o ângulo euclidiano BCA'

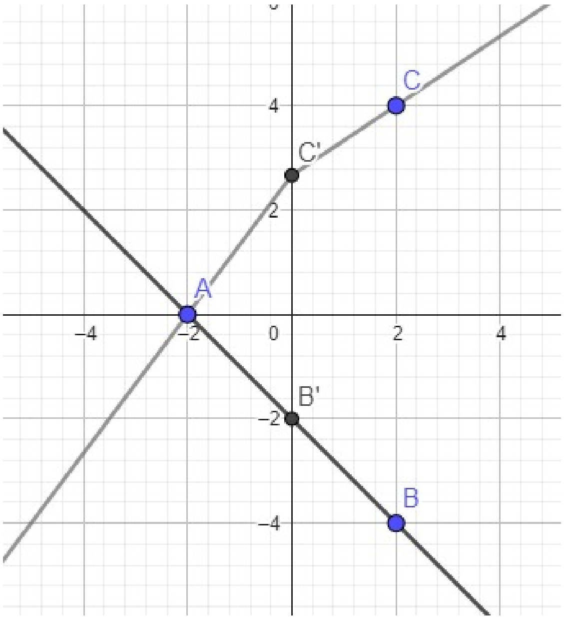
Percebam que eu peguei a semirreta CA indo no sentido de C para A, mas antes de entortar…

Esse A' a gente pode encontrar depois de encontrar a equação da reta CA e substituindo x = 0 na equação

E aí é só calcular BCA como o BCA' euclidiano!



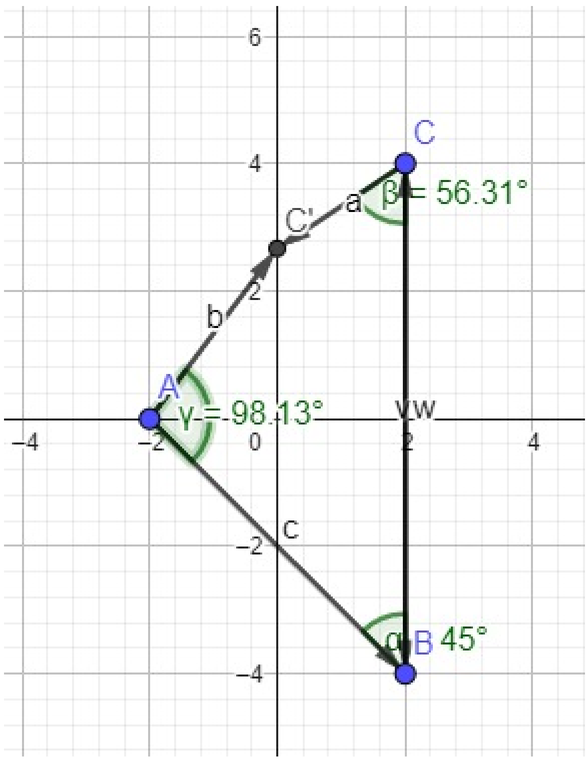
O ângulo CAB a gente pode calcular como o C'AB euclidiano



Pelo PDF, seria C'AB' assim

Mas é que o objetivo desses P's aí é só "desentortar" a reta, sendo que a reta AB é decrescente (e por isso não entorta), não é preciso usar um B'

E aí, se fizer as continhas deve chegar nisso:



A soma dos ângulos internos desse triângulo dá 199.44º