Mecânica Estatística - IFUSP - 2023
oitava série de exercícios

"Why is it that particles with half-integral spin are Fermi particles whose amplitudes add with the minus sign, whereas particles with integral spin are Bose particles whose amplitude add with positive sign? We apologize for the fact that we cannot give you an elementary explanation. An explanation has been worked out by Pauli from complicated arguments of quantum field theory and relativity. He has shown that the two must necessarily go together, but we have not been able to find a way of reproducing his arguments on an elementary level ... This probably means that we do not have a complete understanding of the fundamental principle involved ..."

Feynman Lectures on Physics ...

(A) gases ideais quânticos - férmions -

1- Considere um gás de N elétrons livres dentro de um recipiente de volume V. Obtenha expressões para a energia interna, a pressão e a compressibilidade no estado fundamental (que também se chama estado completamente degenerado). Utilizando dados para um metal alcalino (sódio, por exemplo), obtenha valores numéricos para a densidade de elétrons livres, a temperatura de Fermi, e a compressibilidade no estado fundamental. Compare a previsão teórica desse modelo de elétrons livres com o valor experimental da compressibilidade do sódio a temperatura ambiente.

2- Mostre que o potencial químico de um gás clássico ideal de N partículas monoatômicas ocupando um volume V, a temperatura T, pode ser escrito na forma

$$\mu = k_B T \ln \left(\frac{\lambda^3}{v} \right),$$

em que $v = V/N$ é o volume específico e $\lambda = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ é o comprimento de onda térmico. Esboce um gráfico de $\mu/k_B T$ contra T. Obtenha agora a primeira correção quântica deste resultado. Isto é, mostre que o potencial químico de um gás ideal quântico pode ser expandido em termos do fator λ^3/v,

$$\frac{\mu}{k_B T} - \ln \left(\frac{\lambda^3}{v} \right) = A \left(\frac{\lambda^3}{v} \right) + B \left(\frac{\lambda^3}{v} \right)^2 + \cdots .$$

Obtenha explicitamente o prefator A para férmions e para bósons. Esboce um gráfico de $\mu/k_B T$ contra T (ou contra λ^{-2}, que é a temperatura em unidades convenientes) para férmions, bósons e partículas clássicas.

3- A baixas temperaturas, a energia interna de um sistema de elétrons livres pode ser escrita na forma de uma expansão em potências de T/T_F,

$$U = \frac{3}{5} N \epsilon_F \left\{ 1 + A \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + B \left(\frac{T}{T_F} \right)^4 + \cdots \right\}.$$

em que T_F é a temperatura de Fermi. Verifique de forma explícita a validade dessa expansão e obtenha a constante A. Para $T << T_F$, qual a forma assintótica do calor específico a volume constante?

4- Considere um gás de N elétrons livres ultra-relativísticos, dentro de uma região de volume V, a uma dada temperatura T, na presença de um campo magnético $\overrightarrow{H}$. Desprezando os efeitos magnéticos orbitais, o espectro de energia é dado por

$$\epsilon_{\overrightarrow{p},\sigma} = cp - \mu_B H \sigma,$$

em que μ_B é o magneton de Bohr e $\sigma = \pm 1$.

(a) Para campos fracos, mostre que a energia de Fermi desse sistema pode ser escrita na forma

$$\epsilon_F = A + BH^2 + O\left(H^4\right).$$

Calcule expressões para os prefatores A e B.

(b) Mostre que a magnetização no estado fundamental pode ser escrita na forma

$$M = CH + O\left(H^3\right).$$

Obtenha uma expressão para a constante C.

(c) Calcule a susceptibilidade a campo nulo no estado fundamental.

(B) gases ideais quânticos - bósons

5- A teoria de Planck da radiação consistiu em propor um "espectro de energia" da forma

$$\epsilon_{\overrightarrow{k}} = nh\nu_{\overrightarrow{k}},$$

em que h se tornou conhecida como "constante de Planck" e $n = 0, 1, 2, ...$ para cada modo normal $\overrightarrow{k}$.

(a) Mostre que a função canônica de partição associada a cada "modo normal" é dada por

$$Z_{\overrightarrow{k}} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\beta nh\nu_{\overrightarrow{k}}\right) = \left[1 - \exp\left(-\beta h\nu_{\overrightarrow{k}}\right)\right]^{-1},$$

de onde é possível obter a energia

$$u_{\overrightarrow{k}} = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z_{\overrightarrow{k}} = \frac{h\nu_{\overrightarrow{k}}}{\exp\left(\beta h\nu_{\overrightarrow{k}}\right) - 1}.$$

(b) Mostre que a energia interna total do sistema de osciladores da radiação é dada por

$$U = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} 4\pi^2 \left(\frac{2\pi}{c}\right)^3 \nu^2 d\nu \, \frac{h\nu}{\exp(\beta h\nu) - 1} = V \int_0^{\infty} u(\nu) \, d\nu,$$

em que a densidade de energia por frequência,

$$u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp(\beta h\nu) - 1},$$

é a celebrada "fórmula de Planck". Mostre que $u(\nu) \sim \nu^2$ no limite $\nu \to 0$, e que $u(\nu)$ se anula exponencialmente no limite $\nu \to \infty$, corrigindo assim a "catástrofe do ultravioleta".

6- O número de partículas de um gás ideal de bósons, com spin nulo, dentro de um recipiente de volume V, é dado pela expressão

$$N = \frac{z}{1 - z} + \sum_{j \neq 0} \frac{1}{z^{-1} \exp(\beta\epsilon_j) - 1},$$

em que $\beta = (k_B T)^{-1}$ é o inverso da temperatura absoluta, $z = \exp(\beta\mu)$ é a fugacidade, e

$$\epsilon_j = \epsilon_{\overrightarrow{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

é o espectro de energia.

(i) A densidade de partículas no condensado é obtida a partir do limite apropriado da expressão

$$n_0 = \frac{1}{V}\frac{z}{1-z}.$$

Faça gráficos de n_0 contra z (com $0 < z < 1$) para valores crescentes do volume V. O que acontece no limite $V \to \infty$?

(ii) Mostre que não há condensação de Bose-Einstein num sistema de bósons livres em duas dimensões.

(iii) Suponha agora que o gás de bósons livres esteja num regime ultrar-relativístico, isto é, que o espectro de energia seja dado por

$$\epsilon_j = \epsilon_{\overrightarrow{k}} = c\hbar\left|\overrightarrow{k}\right|,$$

em que a constante c é a velocidade da luz. Acima de qual dimensão d há ocorrência de uma transição de Bose-Einstein? Calcule a temperatura da transição de Bose-Einstein para $d = 2$.

7- Considere um sistema de bósons ideais, de spin nulo ($\gamma = 1$) e massa m, dentro de um recipiente de volume V.

(a) Mostre que a entropia acima da temperatura T_0 da condensação de Bose-Einstein é dada pela expressão

$$S = k_B \frac{V}{\lambda^3}\left[\frac{5}{2} g_{5/2}(z) - \frac{\mu}{k_B T} g_{3/2}(z)\right],$$

em que

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

é o comprimento de onda térmico de de Broglie e

$$g_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}.$$

(b) Dados N e V, qual é a expressão da entropia abaixo de T_0? Qual é a entropia associada às partículas do condensado?

(c) Utilizando a expressão da entropia, mostre que o calor específico a volume constante, acima de T_0, é dado por

$$c_V = \frac{3}{4} k_B \left[5 \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - 3 \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)} \right].$$

(d) Abaixo de T_0, mostre que o calor específico a volume constante é dado por

$$c_V = \frac{15}{4} k_B \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(1).$$

(e) Dado o volume específico v, esboce um gráfico de c_V/k_B contra T (ou contra λ^{-2}, que é a temperatura em unidades convenientes). Obtenha expressões assintóticas do calor específico para $T \to 0$ e $T \to \infty$ (ou seja, mostre que os seus resultados satisfazem tanto a Lei de Nernst quanto a forma clássica da equipartição da energia). Obtenha o calor específico para $T = T_0$. Compare o seu gráfico com a forma do calor específico experimental do hélio líquido nas vizinhanças da transição λ.

Um trabalho pioneiro sobre a condensação de Bose-Einstein e as suas conexões com a superfluidez no hélio líquido foi publicado por F. London em 1938 [F. London, Phys. Rev. **54**, 947, 1938].