27/11/23

Espaço-tempo de Minkowski

Como vimos anteriormente, o intervalo entre dois eventos é <u>invariante</u> por transformação de Lorentz, tendo um sentido absoluto: é o mesmo em qualquer referencial inercial.

Considerando dois eventos de coordenadas (x_1, t_1) e (x_2, t_2), em um dado referencial, usando:

$$(s_{12})^2 = (x_2 - x_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \qquad e \qquad (s_{12})^2 = -c^2(\tau_{12})^2$$

O intervalo entre eles é dado por:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2 = -c^2(\Delta \tau)^2$$

$$\text{onde} \quad \Delta x = x_2 - x_1 \qquad c\Delta t = t_2 - t_1$$

Minkowski introduziu formalmente uma coordenada temporal, sendo $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $x_0 \equiv ct$.

Então:

$$\text{Transf. Lorentz especial} \begin{cases} x_1' = \gamma(x_1 - \beta x_0) \\ x_0' = \gamma(x_0 - \beta x_1) \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \end{matrix}$$

$$\underline{x_4 \equiv ict \equiv ix_0}$$

Assim, reescrevemos:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_4)^2$$

↳ expressão do quadrado da distância entre dois pontos num espaço-tempo quadridimensional com coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) (geometria euclidiana).

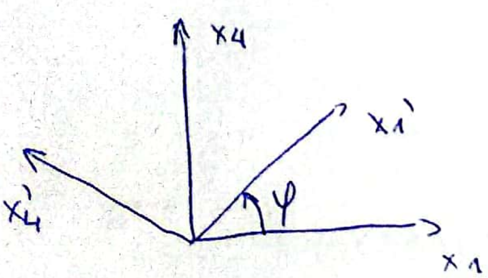
A contribuição do termo temporal de $(\Delta s)^2$ é negativa:

$(\Delta x_4)^2 = (i \Delta x_0)^2 = -(\Delta x_0)^2$ => isso significa que o espaço-tempo tem métrica pseudo-euclidiana.

No caso em que $\Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$, temos:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x_1)^2 \underbrace{- (\Delta x_0)^2}_{(\Delta x_4)^2}$$

↳ invariante para uma rotação de coordenadas no plano (x_1, x_4)



$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos\varphi + x_4 \sin\varphi \\ x_4' = -x_1 \sin\varphi + x_4 \cos\varphi \end{cases}$$

TL como rotação.

Sabemos que x_1' deve ser real e x_4' é imaginário puro, então $\cos\varphi$ deve ser real e $\sin\varphi$ é imaginário.

Usando: $\cos(i\zeta) = \cosh\zeta$ e $\sin(i\zeta) = i\sinh\zeta$

Tomamos $\varphi = i\zeta \left\{ \begin{array}{l} \cos\varphi = \cosh\zeta \\ \sin\varphi = i\sinh\zeta \end{array} \right.$

Substituindo:
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = x_1\cosh\zeta + x_4\sinh\zeta = x_1\cosh\zeta - x_0\sinh\zeta \\ x_4' = -x_1 i\sinh\zeta + x_4\cosh\zeta \\ \quad \hookrightarrow x_0' = x_1\sinh\zeta + x_0\cosh\zeta \end{array} \right.$$

Se identificarmos a origem como $O'(x_1'=0)$ com $x_1 = Vt = \frac{V}{c}x_0 = \beta x_0$ escrevemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = 0 \Rightarrow x_1\cosh\zeta = x_0\sinh\zeta \\ \qquad \hookrightarrow \beta x_0\cos\zeta = x_0\sinh\zeta \\ x_0' = \beta x_0\sinh\zeta + x_0\cosh\zeta \end{array} \right.$$

$$\tanh\zeta = \frac{\sinh\zeta}{\cosh\zeta} = \beta$$

Então: $$\cosh\zeta = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\zeta}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \Rightarrow \sinh\zeta = \gamma\beta.$$

As equações se resumem à:

$$\begin{cases} x_1' = x_1\gamma - x_0\gamma\beta \Rightarrow x_1' = \gamma(x_1 - x_0\beta) = \gamma(x_1 - Vt) \\ x_0' = x_1\gamma\beta + x_0\gamma = \gamma\left(x_1\frac{V}{c} + ct\right), \quad x_0' = ct' \\ \quad \hookrightarrow t' = \gamma\left(t + x_1\frac{V}{c^2}\right) \end{cases}$$

Semelhante à:
$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \\ y' = y, \quad z' = z \end{cases}$$

A TL especial pode ser interpretada geometricamente como uma rotação por um ângulo imaginário no plano (x_1, x_4) no espaço-tempo.

É importante notar que a coordenada temporal preserva um caráter diferente das espaciais, descrito pelo sinal $(-)$: $(\Delta x_4)^2 = -(\Delta x_0)^2$ e pela unidade imaginária $\underline{x_4 = ix_0}$.

Vantagem da interpretação geométrica de Minkowski: permite escrever expressões de leis físicas de forma a garantir automaticamente a ~~preser~~ invariação pela transformação de Lorentz, ou seja, satisfazem automaticamente o princípio da relatividade.

Assim introduzimos o formalismo de vetores no espaço-tempo. Na física usamos vetores do espaço 3D nas leis físicas e é automaticamente satisfeita num sistema de coordenadas obtido por rotação de eixos pois os dois membros se transformam da mesma maneira (covariantes).

Podemos definir um vetor dizendo que a lei de transformação das suas componentes numa rotação de eixos é a mesma que a das coordenadas (x_1, x_2, x_3).

Essa definição se estende à de um quadrivetor no espaço-tempo de Minkowski $\Rightarrow$ 4 componentes se transformam numa rotação de eixos (em particular numa T.L.) da mesma forma que as coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) (4° componente é imaginária pura).

Exemplo: $x_\ell = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\ell = 1,2,3,4$ é um 4-vetor.

$dx_\ell = (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4)$ é um 4-vetor.

$$(cd\tau)^2 = ds^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 = (cdt)^2 \cdot \left[1 - \underbrace{\left(\frac{dx}{cdt}\right)^2}_{v^2/c^2}\right]$$

$\hookrightarrow$ é um invariante.

O mesmo vale para $d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

↳ intervalo infinitesimal do tempo próprio no mov. de uma part.

Então: $m_0 \frac{dx_\alpha}{d\tau} \equiv p_\alpha$ é 4-vetor (m_0 invariante)

A parte espacial de p_α é: $m_0 \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \vec{p}$ ↳ momento relativístico.

A parte temporal de p_α é: $p_4 = m_0 \frac{dx_4}{d\tau} = \frac{i m_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = i\frac{E}{c}$ → energia relativ.

Então o vetor $p_\alpha = (\vec{p}, i\frac{E}{c})$ é o quadri momento da partícula, e as leis de conservação de momento e de energia se unificam na conservação do quadri momento.

Da mesma forma que: $\sum_{\alpha=1}^{4} (x_\alpha)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ é um invariante

A norma do 4-momento: $\sum_{\alpha=1} (p_\alpha)^2 = \underbrace{p^2 - \frac{E^2}{c^2}}_{= -m_0^2 c^2}$ também é invariante