GABARITO DA P1 DE MAT0230 DA T48

Q1) No Plano Rasgado considere os pontos $A=(-1,1)$ e $B=(2,b)$ e $f$ uma régua tal que $f(A)=0$ e $f(B)=\frac{10}{3}$. Quais são os possíveis valores para $b$?

↳ Acredito que a maioria de vocês tentou descobrir a equação da reta... esse caminho é um tanto "intuitivo", mas no fim se mostra complicado e talvez impossível (T-T)

As distâncias no Plano Euclidiano e no Plano Rasgado são as mesmas se você tirar do Plano Euclidiano os pontos do tipo $(x,y)$ com $0<x\leq 1$ e $y\in\mathbb{R}$.

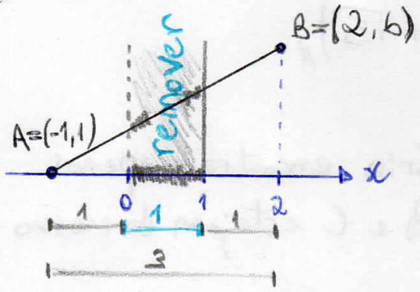
A distância entre dois pontos (em qualquer geometria em que valha o Postulado da Régua) pode ser calculada como:

$$\boxed{AB = |f(B)-f(A)|}$$

onde A e B são pontos e $f$ é uma régua da reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Desta forma, $AB = |f(B)-f(A)| = \left|\frac{10}{3}-0\right| = \frac{10}{3}$.

Além de que pode-se calcular AB como no Plano Euclidiano e subtrair a parte do "rasgo":




De modo que $\underbrace{AB}_{\text{rasgado}} = \frac{2}{3} AB_{\text{euclidiano}}$

E assim $AB = \frac{2}{3}\sqrt{(2-(-1))^2+(b-1)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{9+(b-1)^2}$

Daí se tem $AB = \frac{10}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{9+(b-1)^2} \Rightarrow \frac{10}{3}\cdot\frac{3}{2} = \sqrt{9+(b-1)^2}$

$\Rightarrow 5^2 = \left(\sqrt{9+(b-1)^2}\right)^2 \Rightarrow 25 = 9+(b-1)^2 \Rightarrow 16=(b-1)^2$

$\Rightarrow \sqrt{(b-1)^2} = \sqrt{16} \Rightarrow |(b-1)| = 4 \Rightarrow b-1 = \pm 4$

$\Rightarrow b = 1\pm 4$

$$\boxed{\therefore b=5 \text{ ou } b=-3}$$

Q2) No Plano de Moulton encontre o valor de $x$ de maneira que o $\Delta ABC$ seja isósceles, com $A=(-2,-2)$, $B=(x,0)$ e $C=(2,4)$. Faça $AC = BC$.

↳ Semelhante à questão anterior, você provavelmente tentou encontrar a reta $\overleftrightarrow{BC}$ e não conseguiu (T-T)

É um tanto maldoso o fato de que como a questão é sobre Plano de Moulton você é induzido a pensar na distância apenas no Plano de Moulton, enquanto que para resolver a questão será utilizada a distância euclidiana.

Pense no Plano de Moulton como sendo o Plano Euclidiano só que com retas crescentes "estranhas", já que se $y=mx+b$ com $m>0$, então $y=2mx+b$ quando $x<0$ e $y=mx+b$ quando $x\geq 0$.

Então, se dois pontos estão do mesmo lado da reta vertical $x=0$ a distância entre eles é a distância euclidiana.

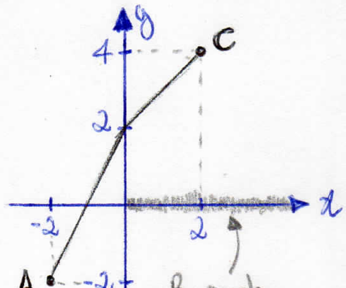
AC é possível calcular em Moulton: $A=(\underbrace{-2}_{x_1},\overbrace{-2}^{y_1})$ e $C=(\underbrace{2}_{x_2},\overbrace{4}^{y_2}) \Rightarrow m = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-2x_1} = \dfrac{4-(-2)}{2-2(-2)}$

$\Rightarrow \underline{m=1}$

E daí, $AC = \Big|\underbrace{\sqrt{1+m^2}\,x_2}_{\text{régua de reta crescente quando } x\geq 0} - \underbrace{\sqrt{1+4m^2}\,x_1}_{\text{régua de reta crescente quando } x<0}\Big|$

$$AC = \left|\sqrt{1+1^2}\cdot 2 - \sqrt{1+4\cdot 1^2}\,(-2)\right| = \left|2\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right| = 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$$

O enunciado "encontre o valor de $x$" implica que é necessário encontrar apenas um valor... então, suponha que $x\geq 0$ para que os pontos B e C estejam do mesmo lado da reta $x=0$ e, por conseguinte, $BC = BC_{\text{euclidiano}}$.




B pode estar por aqui!!!

Caso não estivesse, não seria possível achá-lo e então se saberia que $x<0$.

$$BC = AC \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(0-4)^2} = 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+16 = 4\left(2+2\sqrt{10}+5\right) \Rightarrow (x-2)^2 = 4\left(2+2\sqrt{10}+5\right)-16$$

$$\Rightarrow |x-2| = \sqrt{4\left(2\sqrt{10}+7-4\right)} \Rightarrow x-2 = \pm 2\sqrt{2\sqrt{10}+3}$$

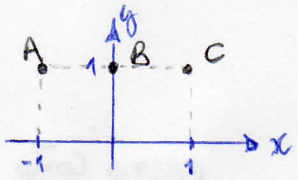
$\Rightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{2\sqrt{10}+3}$, porém assumiu-se $x\geq 0$.

$$\boxed{\therefore x = 2+2\sqrt{2\sqrt{10}+3}}$$

Q3) No Plano Hiperbólico considere os pontos $A=(-1,1)$, $B=(0,1)$ e $C=(1,1)$. Então, podemos afirmar que:

a) Os três pontos são colineares.

↪ No Plano Hiperbólico as retas são verticais ou semi-circunferências centradas no eixo $x$, apenas!




Sabendo que dados três pontos colineares no Plano Euclidiano é impossível existir uma circunferência que os contenha, e que A, B e C não pertencem a nenhuma reta vertical, é, portanto, impossível que A, B e C sejam colineares no Plano Hiperbólico.

$\boxed{\therefore \text{Falsa}}$

b) O $\Delta ABC$ é um triângulo equilátero.

↪ ① Descubra a equação da reta usando as coordenadas de dois pontos e a equação geral da reta $r_{p,r} = \{(x,y) \in \pi \,/\, (x-p)^2 + y^2 = r^2\}$, sendo $\pi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y > 0\}$.

$$A=(-1,1) \text{ e } B=(0,1) \Rightarrow (-1-p)^2 + 1^2 = r^2 = (0-p)^2 + 1^2$$
$$\Rightarrow 1 + 2p + p^2 + 1 = p^2 + 1$$
$$\Rightarrow 1 + 2p = 0 \Rightarrow \boxed{p = -\frac{1}{2}}$$

Aqui a ideia é já considerar como se A e B estivessem numa mesma semi-circunferência, a fim de encontrar "p" e "r" tais que isso realmente seja verdade...

$$p = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-1+\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = r^2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4} + 1 = r^2 \Rightarrow \boxed{r = \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Ignore r...
encontre p...
encontre r ☺

② Utilize "p" e "r" da reta, bem como a noção de régua para calcular a distância entre os respectivos pontos.

$$AB = \left| \ln\left(\frac{0-(-\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{5}}{2}}{1}\right) - \ln\left(\frac{-1-(-\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{5}}{2}}{1}\right) \right| = \left| \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \right|$$

$$= \left| \ln\left(\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right) \right| = \left| \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right) \right| = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right) //$$

③ Agora, basta repetir os passos ① e ② com os demais pontos e comparar suas distâncias...

$$B=(0,1) \text{ e } C=(1,1) \Rightarrow (0-p)^2+1^2=r^2=(1-p)^2+1^2$$
$$\Rightarrow p^2+1=1-2p+p^2+1$$
$$\Rightarrow 1-2p=0 \Rightarrow \boxed{p=\frac{1}{2}}$$

$$p=\frac{1}{2} \Rightarrow \left(0-\frac{1}{2}\right)^2+1^2=r^2$$
$$\Rightarrow r^2=\frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{r=\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

mesma conta que em AB

- $$BC=\left|\ln\left(\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}{1}\right)-\ln\left(\frac{0-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}{1}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right| = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right)$$

$$A=(-1,1) \text{ e } C=(1,1) \Rightarrow (-1-p)^2+1^2=r^2=(1-p)^2+1^2$$
$$\Rightarrow \cancel{1}+2p+\cancel{p^2}+\cancel{1}=\cancel{1}-2p+\cancel{p^2}+\cancel{1}$$
$$\Rightarrow 4p=0 \Rightarrow \boxed{p=0}$$

$$p=0 \Rightarrow (-1-0)^2+1^2=r^2$$
$$\Rightarrow r^2=1+1 \Rightarrow \boxed{r=\sqrt{2}}$$

- $$AC=\left|\ln\left(\frac{1-0+\sqrt{2}}{1}\right)-\ln\left(\frac{-1-0+\sqrt{2}}{1}\right)\right| = \left|\ln(1+\sqrt{2})-\ln(-1+\sqrt{2})\right| = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$AB=BC$, mas $AB \neq AC$ de modo que $\Delta ABC$ não é equilátero.

**∴ Falsa**

c) O $\Delta ABC$ é apenas isósceles.

↳ $AB=BC$ e $AB \neq AC$, logo, o $\Delta ABC$ é apenas isósceles.

**∴ Verdadeira**

Determine a equação da reta que contém A e C.

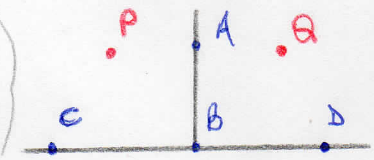
↳ $(x-p)^2+y^2=r^2 \longrightarrow (x-0)^2+y^2=(\sqrt{2})^2$, isto é, $\boxed{x^2+y^2=2}$.

Q4) Num plano onde valem os 5 postulados dados, seja $P \in int(\angle ABC)$ e $Q \in int(\angle ABD)$ onde $D-B-C$. Prove que $A \in int(\angle PBQ)$.

DEFINIÇÃO: Dado o ângulo $\angle AOB$, seja $H_1$ o lado da reta $\overleftrightarrow{OA}$ que contém $B$ e seja $H_1'$ o lado da reta $\overleftrightarrow{OB}$ que contém $A$, define-se $H_1 \cap H_1' = int(\angle AOB)$.

→ Esboçando o enunciado...

Agora, vamos aos argumentos!




Desenhe na seguinte ordem: $A$, $B$ e $C$ tais que exista $\angle ABC$, $P$ tal que $P \in int(\angle ABC)$, $D$ tal que $D-B-C$ e $Q$ tal que $Q \in int(\angle ABD)$.

$P \in int(\angle ABC)$ implica que $A$ e $C$ estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BP}$.

Sejam $H_1$ e $H_2$ os lados de $\overleftrightarrow{BP}$, considere $H_1$ o lado que contém $A$ e $H_2$ o que contém $C$.

$C-B-D$ sendo que $C \in H_2$ e $B \in \overleftrightarrow{BP}$ implica que $D \in H_1$.

$A, D \in H_1$ e $B \in \overleftrightarrow{BP}$, logo, $int(\angle ABD) \in H_1$, e consequentemente, $Q \in H_1$.

Analogamente, $Q \in int(\angle ABD)$ implica que $A$ e $D$ estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BQ}$.

Sejam $H_1'$ e $H_2'$ os lados de $\overleftrightarrow{BQ}$, considere $H_1'$ o lado que contém $A$ e $H_2'$ o que contém $D$.

$D-B-C$ sendo que $D \in H_2'$ e $B \in \overleftrightarrow{BQ}$ implica que $C \in H_1'$.

$A, C \in H_1'$ e $B \in \overleftrightarrow{BQ}$, logo, $int(\angle ABC) \in H_1'$, e consequentemente, $P \in H_1'$.

Dado o ângulo $\angle PBQ$, sendo $H_1$ o lado da reta $\overleftrightarrow{BP}$ que contém $Q$ e sendo $H_1'$ o lado da reta $\overleftrightarrow{BQ}$ que contém $P$, definiu-se $H_1 \cap H_1' = int(\angle PBQ)$.

$A \in H_1$ e $A \in H_1'$, logo, $A \in H_1 \cap H_1'$, e portanto, $A \in int(\angle PBQ)$.