MAT0121 - Cálculo Diferencial e Integral II - 2023
Lista 6

1. Curvas e Superfícies em $\mathbb{R}^3$

1. Determine uma parametrização de cada uma das seguintes curvas.

a) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4 \text{ e } z = xy\}$

b) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4x^2 + y^2 \text{ e } y = x^2\}$

c) $C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } z = 1 + y\right\}$

d) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9 \text{ e } x + y = 2z\}$

e) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \text{ e } z = 2y\}$

f) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z = 1 \text{ e } 2x + 2y + z = 1\}$

g) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, x^2 + y^2 - z^2 = 4 \text{ e } z = x + y\}$

h) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 = 9 \text{ e } 4x + 4y = z^2\}$

2. Sejam I um intervalo aberto e $\alpha, \beta, \gamma : I \to \mathbb{R}^3$ curvas deriváveis.

a) Considere $f : I \to \mathbb{R}$ e $\Gamma : I \to \mathbb{R}^3$ dadas por $f(t) = \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle$ e $\Gamma(t) = \alpha(t) \times \beta(t)$. Mostre que $f'(t) = \langle \alpha'(t), \beta(t) \rangle + \langle \alpha(t), \beta'(t) \rangle$ e $\Gamma'(t) = \alpha'(t) \times \beta(t) + \alpha(t) \times \beta'(t)$ para todo $t \in I$.

b) Use o item anterior e a Regra da Cadeia para obter expressões para as derivadas do produto misto $[\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)] = \langle \alpha(t), \beta(t) \times \gamma(t) \rangle$ e da norma $\|\alpha(t)\| = \sqrt{\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle}$.

3. Determine e esboce a superfície de nível c da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, onde:

a) $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ e $c = 1$

b) $f(x, y, z) = x^2 - e^y + z^2$ e $c = 0$

c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = 0$

d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = -1$

e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = 1$

f) $f(x, y, z) = x^2 - y^2$ e $c = 1$

g) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ e $c = 1$

h) $f(x, y, z) = x - y^2 - 4z^2$ e $c = 0$

4. Encontre os pontos do hiperboloide $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ nos quais a reta normal ao hiperboloide é paralela à reta que passa pelos pontos $(3, -1, 0)$ e $(5, 3, 6)$.

5. Seja $a > 0$ e considere o plano tangente à superfície $xyz = a$ num ponto do primeiro octante. Mostre que o tetraedro formado por este plano e os planos coordenados tem volume independente do ponto de tangência.

6. Mostre que o elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto $(1, 1, 2)$ (isto é, as duas superfícies se interceptam e têm o mesmo plano tangente em $(1, 1, 2)$).

7. Determine uma equação da reta tangente à intersecção do gráfico da função $f(x, y) = x^3 + y^3 + 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $(1, 1, 4)$.

8. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva derivável tais que $\nabla f(1, 0) = (2, 1)$ e $\gamma'(t) \neq (0, 0, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha que a imagem de γ esteja contida na intersecção do gráfico de f com a superfície $S : x^3 + xy^3 + yz + z^3 = 0$ e que o ponto $(1, 0, -1)$ pertença à imagem de γ. Determine uma equação da reta tangente à imagem de γ em $(1, 0, -1)$.

9. Determine a equação da esfera que tangencia a superfície $(x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} - (z-1)^2 = 0$ nos pontos $(2,2,2)$ e $(2,2,0)$.

10. **(MAT0121 - 2021)** Considere as superfícies $S_1 : x^2 + 10y^2 = z^2$ e $S_2 : z = \sqrt{x^2 + y^2 + 144}$. Verifique as seguintes afirmações:

a) O plano tangente a S_1 no ponto $(3,4,13)$ passa pela origem.

b) Os pontos da reta tangente à curva $S_1 \cap S_2$ em $(3,4,13)$ têm segunda coordenada igual a 4.

c) S_1 e S_2 não se tangenciam em nenhum ponto.

11. **(MAT0121 - P3 2021)** Considere as superfícies $S_1 : x^2 z + y^2 z = 2$ e $S_2 : x^2 + 2xy + y^2 + 4z = 8$.

a) Determine os pontos em que S_1 e S_2 se tangenciam.

b) Considere a curva $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 2x + y^2 + 2y = 0 \text{ e } xy + z = 1\}$ e seja r a reta que passa pelos pontos encontrados no item anterior. Determine os pontos de C nos quais a reta tangente a C é paralela à reta r.