Segunda prova de Álgebra Linear I

Denis de Assis Pinto Garcia

27 de novembro de 2023

Exercício 1.

Seja
$$W := \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 3x+2y+z=0, \text{ e } x+2y+3t=0\}.$$

(a) Determine uma base de W.

(b) Estenda a base de W que você obteve no item (a) a uma base de $\mathbb{R}^4$.

(c) Use o item (b) para determinar um subespaço U de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{R}^4 = W \oplus U$.

Resolução.

(a) Como
$$\begin{cases} x+2y+3t &= 0 \\ 3x+2y+z &= 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y+3t &= 0 \\ -4y+z-9t &= 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x &= -2y-3t \\ z &= 4y+9t \end{cases},$$
$$\begin{aligned} W &= \{(-2y-3t, y, 4y+9t, t) : y,t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2,1,4,0)+t(-3,0,9,1) : y,t \in \mathbb{R}\} \\ &= [(-2,1,4,0),(-3,0,9,1)]. \end{aligned}$$
E, como $B_W := \{(-2,1,4,0),(-3,0,9,1)\}$ é LI (pois $(-2,1,4,0)$ e $(-3,0,9,1)$ são ambos não nulos, e $(-2,1,4,0)$ não é múltiplo de $(-3,0,9,1)$), disso resulta que B_W é uma base de W.

(b) Como
$$A := \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1^{(1)} := L_2 \\ L_2^{(1)} := L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2^{(2)} := L_4^{(1)} \\ L_4^{(2)} := L_2^{(1)}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\substack{L_3^{(3)} := L_3^{(2)} - 4L_1^{(2)} \\ L_4^{(3)} := L_4^{(2)} + 2L_1^{(2)}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\substack{L_3^{(4)} := L_3^{(3)} - 9L_2^{(3)} \\ L_4^{(4)} := L_4^{(3)} + 3L_2^{(3)}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\substack{L_3^{(5)} := L_4^{(4)} \\ L_4^{(5)} := L_3^{(4)}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & -9 \end{pmatrix} =: A',$$
o conjunto $B := \{(-2,1,4,0),(-3,0,9,1),(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$, cujos elementos são os vetores em $\mathbb{R}^4$ que correspondem às colunas de A que deram origem a colunas de A' que possuem pivô, é uma base de $\mathbb{R}^4$ que contém B_W.

(c) Seja

$$U \coloneqq [B \setminus B_W] = \big[(1,0,0,0),(0,1,0,0)\big].$$

Como B é uma base de $\mathbb{R}^4$,

$$\mathbb{R}^4 = [B] = \big[B_W \cup (B \setminus B_W)\big] = [B_W] + [B \setminus B_W] = W + U.$$

Sendo assim, para concluirmos que $\mathbb{R}^4 = W \oplus U$, é suficiente mostrarmos que $W \cap U = \{(0,0,0,0)\}$ — o que, por sua vez, resume-se a observarmos que

$$\dim(W \cap U) = \dim(W) + \dim(U) - \dim(\underbrace{W+U}_{=\mathbb{R}^4}) = 2+2-4 = 0.$$

Exercício 2.

As afirmações a seguir são **VERDADEIRAS** ou **FALSAS**? Justifique! Demonstre as afirmações que forem verdadeiras. Quando a afirmação for falsa, exiba um exemplo mostrando que a afirmação é falsa.

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(a) Sejam $u, v, w \in V$. O conjunto $\{u, v, w\}$ é LI se, e somente se, os subconjuntos $\{u, v\}$, $\{u, w\}$ e $\{v, w\}$ são LI.

(b) Se V tem um conjunto gerador com n vetores, então nenhum subconjunto de V com menos do que n vetores pode gerar V.

(c) Suponha que $\dim(V) = n$. Sejam U e W subespaços de V tais que $\dim(U) + \dim(W) > n$. Então $U \cap W \neq \{0_V\}$.

(d) Se $S \subseteq V$ é um subconjunto LI de V, então todo subconjunto de S é LI.

Resolução.

(a) A afirmação é falsa.[1] Com efeito, se $V = \mathbb{R}^2$, $u = (1,0)$, $v = (0,1)$, e $w = (1,1)$, então, embora $\{u, v\}$, $\{u, w\}$ e $\{v, w\}$ sejam LI, $\{u, v, w\}$ é LD (pois, nesse caso, $1 \cdot u + 1 \cdot v + (-1) \cdot w = (0,0)$).

(b) A afirmação é falsa. De fato, se $V = \mathbb{R}^2$, então tanto $G \coloneqq \big\{(1,0),(0,1),(1,1)\big\}$ quanto $B \coloneqq \big\{(1,0),(0,1)\big\}$ geram V — pois, para quaisquer x e y em $\mathbb{R}$, $(x,y) = x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1) + 0 \cdot (1,1)$ —, e, no entanto, B possui menos elementos do que G.

(c) A afirmação é verdadeira. Com efeito, como $\dim(U + W) \leq \dim(V) = n$ (pois $U + W$ é um subespaço de V), e como, por hipótese, $\dim(U) + \dim(W) > n$,

$$\dim(U \cap W) = \underbrace{\dim(U) + \dim(W)}_{>n} - \dim(U+W) > n - \dim(U+W) \geq 0,$$

e, consequentemente, $U \cap W \neq \{0_V\}$.

(d) A afirmação é verdadeira. Para demonstrá-la, suponhamos que S seja um subconjunto LI de V, e que A seja um subconjunto qualquer de S. Como, por hipótese, S é LI, sabemos que, se k pertence a $\{1,2,3,\ldots\}$, se $a_1, \ldots, a_k$ pertencem a $\mathbb{R}$, e se $v_1, \ldots, v_k$ são vetores dois a dois distintos de S tais que $a_1v_1 + \ldots + a_kv_k = 0_V$, então, necessariamente, $a_1 = \ldots = a_k = 0$. Sendo assim, como cada elemento de A é também um elemento de S, podemos concluir, em particular, que, se k pertence a $\{1,2,3,\ldots\}$, se $a_1, \ldots, a_k$ pertencem a $\mathbb{R}$, e se $v_1, \ldots, v_k$ são vetores dois a dois distintos de A tais que $a_1v_1 + \ldots + a_kv_k = 0_V$, então, necessariamente, $a_1 = \ldots = a_k = 0$. Logo, A é LI.

[1] É verdade que, se $\{u, v, w\}$ é LI, então $\{u, v\}$, $\{u, w\}$ e $\{v, w\}$ são LI, mas $\{u, v, w\}$ pode ser LD mesmo que $\{u, v\}$, $\{u, w\}$ e $\{v, w\}$ sejam LI.

Exercício 3.

Seja $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear definida por

$$T(x,y,z,t) = (x+y+2z, 2x+3y+5z-t, x+2y+3z-t, y+z-t).$$

Determine uma base de $\ker(T)$ e uma base de $\operatorname{Im}(T)$.

Resolução.

Como, para cada $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} T(x,y,z,t) &= (x+y+2z, 2x+3y+5z-t, x+2y+3z-t, y+z-t) \\ &= x(1,2,1,0) + y(1,3,2,1) + z(2,5,3,1) + t(0,-1,-1,-1), \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im}(T) = \big[(1,2,1,0),(1,3,2,1),(2,5,3,1),(0,-1,-1,-1)\big].$$

Sendo assim, como

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2^{(1)} := L_2 - 2L_1 \\ L_3^{(1)} := L_3 - L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3^{(2)} := L_3^{(1)} - L_2^{(1)} \\ L_4^{(2)} := L_4^{(1)} - L_2^{(1)}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: A',$$

o conjunto $\big\{(1,2,1,0),(1,3,2,1)\big\}$, cujos elementos são os vetores em $\mathbb{R}^4$ que correspondem às colunas de A que deram origem a colunas de A' que possuem pivô, é uma base de $\operatorname{Im}(T)$. Vamos, agora, encontrar uma base de $\ker(T)$. Para isso, observemos, inicialmente, que $\ker(T)$ é o conjunto solução do sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 0 \\ 2x+3y+5z-t & = & 0 \\ x+2y+3z-t & = & 0 \\ y+z-t & = & 0 \end{array} \right. . \tag{$*$}$$

Como

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 0 \\ 2x+3y+5z-t & = & 0 \\ x+2y+3z-t & = & 0 \\ y+z-t & = & 0 \end{array} \right. \underset{2}{\sim} \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 0 \\ y+z-t & = & 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y-2z \\ t & = & y+z \end{array} \right. ,$$

disso resulta que

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \big\{(-y-2z, y, z, y+z) : y,z \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{y(-1,1,0,1) + z(-2,0,1,1) : y,z \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big[(-1,1,0,1),(-2,0,1,1)\big] \end{aligned}$$

— a partir do que concluímos, em vista do fato de que $\big\{(-1,1,0,1),(-2,0,1,1)\big\}$ é LI (pois $(-1,1,0,1)$ e $(-2,0,1,1)$ são não nulos, e $(-1,1,0,1)$ não é múltiplo de $(-2,0,1,1)$), que $\big\{(-1,1,0,1),(-2,0,1,1)\big\}$ é uma base de $\ker(T)$.

Exercício 4.

(a) Sejam V e W espaços vetoriais, seja $T \in L(V,W)$, e sejam $v_1, \dots, v_k \in V$ tais que $\big\{T(v_1), \dots, T(v_k)\big\}$ é LI. Prove que $\{v_1, \dots, v_k\}$ é LI.

(b) Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (ay+bz, -ax+cz, -bx-cy),$$

em que a, b e c não são todos nulos. Mostre que $\dim\big(\ker(T)\big) = 1$.

[2] A matriz dos coeficientes do sistema ($*$) é justamente a matriz A, que escalonamos anteriormente e que é equivalente a A'.

(c) Prove que não existe nenhuma transformação linear injetora de $\mathbb{R}^{40}$ em $\mathbb{R}^{10}$.

(d) Seja $T \in L(\mathbb{R}^4)$ definida por $T(x, y, z, t) = (0, 0, x, y)$. Verifique que $\ker(T) = \mathrm{Im}(T)$. Se V é um espaço vetorial de dimensão **ímpar**, pode existir $T \in L(V)$ tal que $\ker(T) = \mathrm{Im}(T)$?

Resolução.

(a) Sejam $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ tais que $a_1v_1 + \ldots + a_kv_k = 0_V$. Como $a_1v_1 + \ldots + a_kv_k = 0_V$, resulta da linearidade de T que

$$a_1T(v_1) + \ldots + a_kT(v_k) = T(a_1v_1 + \ldots + a_kv_k) = T(0_V) = 0_W.$$

Logo, como, por hipótese, $\big\{T(v_1), \ldots, T(v_k)\big\}$ é LI, podemos concluir que $a_1 = \ldots = a_k = 0$. E, como $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ tais que $a_1v_1 + \ldots + a_kv_k = 0_V$ são completamente arbitrários, disso decorre, por fim, que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é LI.

(b) Como, para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$T(x, y, z) = (ay + bz, -ax + cz, -bx - cy) = x(0, -a, -b) + y(a, 0, -c) + z(b, c, 0),$$

$\mathrm{Im}(T) = \big[(0, -a, -b), (a, 0, -c), (b, c, 0)\big]$. Vamos mostrar que $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$. Como

$$\dim\big(\ker(T)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 3 - \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big),$$

disso resultará que $\dim\big(\ker(T)\big) = 1$. Para concluirmos que $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$, analisaremos, separadamente, o caso em $a = b = 0$, o caso em que $a = 0 \neq b$ e o caso em que $a \neq 0$ e mostraremos que, em qualquer um dos casos, existe uma base de $\mathrm{Im}(T)$ com exatamente dois elementos.

Caso em que $a = b = 0$.

Se $a = b = 0$, então $c \neq 0$ (pois, por hipótese, a, b e c não são todos nulos), e $\mathrm{Im}(T) = \big[(0, 0, -c), (0, c, 0)\big]$. Logo, nesse caso, $\big\{(0, 0, -c), (0, c, 0)\big\}$ é uma base de $\mathrm{Im}(T)$.[3]

Caso em que $a = 0 \neq b$.

Se $a = 0$, e $b \neq 0$, então

$$\mathrm{Im}(T) = \big[(0, 0, -b), (0, 0, -c), (b, c, 0)\big] = \big[(0, 0, -b), (b, c, 0)\big]$$

(pois, como $b \neq 0$, $(0, 0, -c) = \frac{c}{b}(0, 0, -b)$). Portanto, nesse caso, $\big\{(0, 0, -b), (b, c, 0)\big\}$ é uma base de $\mathrm{Im}(T)$.[4]

Caso em que $a \neq 0$.

Se $a \neq 0$, então, como

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1^{(1)} := L_2 \\ L_2^{(1)} := L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} -a & 0 & c \\ 0 & a & b \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1^{(2)} := -\frac{1}{a}L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} := \frac{1}{a}L_2^{(1)}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_3^{(3)} := L_3^{(2)} + bL_1^{(2)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & -c & -\frac{bc}{a} \end{pmatrix} \underset{L_3^{(4)} := L_3^{(3)} + cL_2^{(3)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: A',$$

o conjunto $\big\{(0, -a, -b), (a, 0, -c)\big\}$, cujos elementos são os vetores em $\mathbb{R}^3$ que correspondem às colunas de A que deram origem a colunas de A' que possuem pivô, é uma base de $\mathrm{Im}(T)$.

[3] É fácil ver que, se $c \neq 0$, então $\big\{(0, 0, -c), (0, c, 0)\big\}$ é LI.

[4] Como, por hipótese, $b \neq 0$, $\big\{(0, 0, -b), (b, c, 0)\big\}$ é LI.

(c) Se $T\colon \mathbb{R}^{40} \to \mathbb{R}^{10}$ é uma transformação linear, então $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) \leq \dim(\mathbb{R}^{10}) = 10$. Logo, nesse caso,

$$\dim\big(\ker(T)\big) = \underbrace{\dim(\mathbb{R}^{40})}_{=40} - \underbrace{\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big)}_{\leq 10} \geq 40 - 10 = 30 > 0,$$

e, por conseguinte, T não é injetora.

(d) **Primeira parte.**

Como, para cada $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$T(x, y, z, t) = (0, 0, x, y) = x(0, 0, 1, 0) + y(0, 0, 0, 1),$$

$\operatorname{Im}(T) = \big[(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\big]$. Sendo assim, como, para cada $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$T(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0,$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\ker(T) &= \big\{(0, 0, z, t) : z, t \in \mathbb{R}\big\} \\
&= \big\{z(0, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1) : z, t \in \mathbb{R}\big\} \\
&= \big[(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\big] \\
&= \operatorname{Im}(T).
\end{aligned}$$

Segunda parte.

Se $\dim(V)$ é ímpar, não existe $T \in L(V)$ tal que $\ker(T) = \operatorname{Im}(T)$. Isso porque, se $T \in L(V)$ fosse tal que $\ker(T) = \operatorname{Im}(T)$, então

$$\dim(V) = \dim\big(\ker(T)\big) + \dim(\operatorname{Im}(T)\big) = \dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) + \dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) = 2\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big),$$

e, portanto, nesse caso, $\dim(V)$ seria par.