1. Seja $V = P_2(\mathbb{R})$, e considere os seguintes subespaços de V

$$S_1 = \{p(t) \in P_2(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}$$

$$S_2 = \{p(t) \in P_2(\mathbb{R}) : p(-1) = 0)\}.$$

(a) (1 ponto) Determine uma base e a dimensão de $S_1 \cap S_2$.

(b) (1 ponto) Mostre que todo polinômio $p \in P_2(\mathbb{R})$ pode ser escrito como uma soma $p = q_1 + q_2$ onde $q_1 \in S_1$ e $q_2 \in S_2$.

(c) (1 ponto) A decomposição do item anterior é única? Justifique sua resposta com uma demonstração caso seja única ou com um contra-exemplo caso não seja única.

a) $S_1 \cap S_2 = \{ p(t) \in P_2(\mathbb{R}) : p(1) = 0 = p(-1) \}$

$p(t) \in S_1 \cap S_2 \subseteq P_2(\mathbb{R}) \Rightarrow p(t) = ax^2 + bx + c$ tq $\begin{cases} p(1) = a+b+c = 0 \\ p(-1) = a-b+c = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow b = 0,\ a = -c$. Logo, $p(t) = ax^2 - a = a(x^2-1)$.

Assim, $S_1 \cap S_2 = [x^2-1]$, $\{x^2-1\}$ é base de $S_1 \cap S_2$ e $\dim S_1 \cap S_2 = 1$ //

b) Mostremos que $S_1 + S_2 = P_2(\mathbb{R})$.

$q_1(t) \in S_1 \Rightarrow q_1(t) = a(t^2-1) + b(t-1) \Rightarrow S_1 = [t^2-1, t-1]$

$q_2(t) \in S_2 \Rightarrow q_2(t) = c(t^2-1) + d(t+1) \Rightarrow S_2 = [t^2-1, t+1]$

$S_1 + S_2 = [t^2+1, t+1, t-1]$. Provemos que esse conj. é base para $S_1 + S_2$.

$\alpha(t^2-1) + \beta(t-1) + \gamma(t+1) = 0 \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = -\gamma,\ -\alpha - \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \beta = \gamma = 0.$

Logo, $\{t^2-1, t+1, t-1\}$ é base de $S_1 + S_2 \Rightarrow \dim S_1 + S_2 = \dim P_2(\mathbb{R}) \Rightarrow S_1 + S_2 = P_2(\mathbb{R})$.

Portanto, se $p(t) \in P_2(\mathbb{R}) = S_1 + S_2$, então

$$p(t) = \underbrace{a(t^2-1) + b(t+1)}_{\in S_2} + \underbrace{c(t-1)}_{\in S_1} = \underbrace{(a+1)(t^2-1) + c(t-1)}_{\in S_1} + \underbrace{-(t^2-1) + b(t+1)}_{\in S_2} = q_1(t) + q_2(t).$$

c) Não, como feito na linha acima.

Ex: $p(t) = \underbrace{(t^2-1) + 2(t+1)}_{q_2(t)} + \underbrace{3(t-1)}_{q_1(t)}$ [redacted]

Mas $p(t) = \underbrace{\frac{1}{2}(t^2-1) + 2(t+1)}_{\tilde{q}_2(t) \in S_2,\ q_2(t) \neq \tilde{q}_2(t)} + \underbrace{\frac{1}{2}(t^2-1) + 3(t-1)}_{\tilde{q}_1 \in S_1,\ q_1(t) \neq \tilde{q}_1(t)}$

2. Considere a transformação linear dada por

$$T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a+d, a+b+c, b+c+d, a).$$

(a) (1 ponto) Encontre uma base e a dimensão do núcleo de T (lembre que o núcleo de T é o subespaço $N(T) = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : T(A) = 0\}$).

(b) (1 ponto) T é sobrejetora? Justifique sua resposta!

(c) (1 ponto) Considere o vetor

$$v = (m, 1, -1, m) \in \mathbb{R}^4.$$

Determine $m \in \mathbb{R}$ tal que $v \in \operatorname{Im}(T)$ (ou seja, tal que v pertence a imagem de T).

a) $A \in N(T) \Rightarrow T(A) = T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+d,\ a+b+c,\ b+c+d,\ a) = 0 = (0,0,0,0)$

$\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + d = 0 \\ a+b+c = 0 \\ b+c+d = 0 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow d = 0,\ b = -c.$$

$\therefore A \in N(T) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N(T) = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]$. $\dim N(T) = 1$ //

b) Pelo Teo. Núcleo e da Imagem,

$\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \dim N(T) + \dim \operatorname{Im}(T) \Rightarrow \dim \operatorname{Im}(T) = 4 - 1 = 3 \neq \dim \mathbb{R}^4$.

Portanto, T não é sobrejetora.

c) $v = (m, 1, -1, m) \in \mathbb{R}^4$. Se $v \in \operatorname{Im} T$, então $\exists A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tq $T(A) = T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = v$.

Assim,

$$(m, 1, -1, m) = T(A) = (a+d,\ a+b+c,\ b+c+d,\ a)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+d = m \\ a+b+c = 1 \\ b+c+d = -1 \\ a = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b+c = 1-m \\ b+c = -1 \Rightarrow b = -1-c \\ a = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = m \\ d = 0 \\ b = -1-c \\ 1-m = -1 \end{cases} \Rightarrow m = 2 //$$

3. Seja $V = P_3(\mathbb{R})$ o espaço dos polinômios de grau menor ou igual à 3, com a soma e produto por escalar usual. Seja $W = \mathcal{M}_{2\times 2}$ o espaço das matrizes 2 por 2, com a soma e produto por escalar usual.

Considere os subespaços vetorias abaixo:

$$S_1 = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) : p(-1) = 0\} \subset V, \quad S_2 = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : A = A^t\} \subset W,$$

onde A^t denota a matriz transposta de A.

(a) (1 ponto) Encontre uma base e determine a dimensão de S_1. Justifique sua resposta.

(b) (1 ponto) Encontre uma base e determine a dimensão de S_2. Justifique sua resposta.

(c) (1 ponto) Determine um isomorfismo $T : S_1 \to S_2$. Justifique sua resposta.

desconsiderar

(d) (1 ponto) Estenda o isomorfismo do item anterior para um isomorfismo $\tilde{T} : V \to W$. (Dica: estenda as bases de S_1 e S_2 para bases de V e W respectivamente).

a) Vide exercício 1. b), $S_1 = [(t^2-1), (t+1)]$, em que $\{t^2-1, t+1\}$ é base e $\dim S_1 = 2$.//

De fato, $\alpha(t^2-1) + \beta(t+1) = 0 \Rightarrow \alpha t^2 + \beta t + (-\alpha+\beta)\cdot 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 0 = \beta$. X

b) $A \in S_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A = A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow b = c$. Assim,

$$S_2 = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right\}$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Logo, $S_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$.

Provemos que esse conjunto é L.I.:

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Portanto, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ é base de S_2 e $\dim S_2 = 3$//

a) $p(x) \in S_1 \Rightarrow p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e $p(-1) = -a + b - c + d = 0 \Rightarrow a = b - c + d$.

Assim, $p(x) = (b-c+d)x^3 + bx^2 + cx + d = b(x^3+x^2) + c(-x^3+x) + d(x^3+1)$

$\Rightarrow S_1 = [x^3+x^2, -x^3+x, x^3+1]$. Provemos que esse conjunto é L.I.:

$$\alpha(x^3+x^2) + \beta(-x^3+x) + \gamma(x^3+1) = 0 \Rightarrow (\alpha-\beta+\gamma)x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Logo, $\{x^3+x^2, -x^3+x, x^3+1\}$ é base de S_1 e $\dim S_1 = 3$//

c) Seja $T: S_1 \longrightarrow S_2$

$$p(x) = a(x^3+x^2) + b(x^3+x) + c(x^3+1) \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Pelos itens anteriores, claramente T está bem definida em seu domínio e contradomínio.

1) Provemos que T é linear: $p(t), q(t) \in S_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\cdot\ T(p(t)+q(t)) = T((a+d)(x^3+x^2)+(b+e)(-x^3+x)+(c+f)(x^3+1)) = \begin{pmatrix} a+d & b+e \\ b+e & c+f \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix} = T(p(t)) + T(q(t))$ //

$\cdot\ T(\lambda p(t)) = T(\lambda a(x^3+x^2)+\lambda b(-x^3+x)+\lambda c(x^3+1)) = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda c \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \lambda T(p(t))$ //

2) T é injetora: $N(T) = \{p(t) \in S_1 : T(p(t)) = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$

Seja $p(t) \in N(T)$. Assim, $T(p(t)) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a=b=c=0 \Rightarrow p(t)=0$.

Logo, $N(T) = \{0\}$ e, portanto, T é injetora //

3) T é sobrejetora: Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem,

$$\dim S_2 = \dim S_1 = \cancel{\dim N(T)}^{\,0} + \dim Im(T) = \dim Im T \ //$$

Portanto, T é um isomorfismo de S_1 em S_2 (entre S_1 e S_2) //

d) $B_1 = \{x^3+x^2, -x^3+x, x^3+1\}$ base de S_1 e $B_2 = \{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ base de S_2.

Pelo Teorema de completamento de base, note que $B_V = B_1 \cup \{x^3\}$ e $B_W = B_2 \cup \{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ são bases de V e W (Verifique). Sabendo que uma transformação linear está completamente ~~definida~~ determinada quando expressa em uma base do domínio, construamos então $\tilde{T}: V \longrightarrow W$ tal que

$$\tilde{T}: V \longrightarrow W$$

$$(x^3+x^2) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-x^3+x \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x^3+1 \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^3 \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, $\tilde{T}$ é linear (Verifique). Ainda,

$p(t) \in N(\tilde{T}) \Rightarrow \tilde{T}(p(t)) = \tilde{T}(a(x^3+x^2)+b(-x^3+x)+c(x^3+1)+dx^3) = \begin{pmatrix} a & b+d \\ b & c \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a=b=c=d=0$
$\Rightarrow p(t)=0$.

Logo, $N(\tilde{T}) = \{0\}$ e $\dim W = \dim V = \cancel{\dim N(\tilde{T})}^{\,0} + \dim Im(\tilde{T}) = \dim Im(\tilde{T})$. $\tilde{T}$ é isomorfismo.

4. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita. Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta com uma demonstração em caso de afirmação verdadeira, ou um contra-exemplo em caso de afirmação falsa.

(a) (1 ponto) Se $F : V \to W$ é uma aplicação linear para a qual existe uma aplicação linear $G : W \to V$ satisfazendo $F \circ G = Id_W$ então G é injetora.

(b) (1 ponto) Se $F : V \to W$ é uma aplicação linear para a qual existe uma aplicação linear $G : W \to V$ satisfazendo $F \circ G = Id_W$ então F é sobrejetora.

(c) (1 ponto) Se $F : V \to W$ é uma aplicação linear para a qual existe uma aplicação linear $G : W \to V$ satisfazendo $F \circ G = Id_W$ então F e G são isomorfismos.

(d) (1 ponto) Se $F : V \to W$ é uma aplicação linear e $\dim V \leq \dim W$ então F é injetora.

V, W espaços vetoriais, $\dim V = n$, $\dim W = m$.

a) Seja $u \in N(G)$. Assim,

$$G(u) = 0_V \Rightarrow F(G(u)) = F(0_V) \overset{\text{F linear, hipótese}}{\Rightarrow} u = 0_V.$$ Logo, G é injetora.

b) Seja $u \in W$. Assim,

$$u = (F \circ G)(u) = F(\overbrace{G(u)}^{\in V}).$$ Logo, sendo $v = G(u) \in V$, $F(v) = u \Rightarrow u \in \operatorname{Im} F$, e F é sobrej.

X c) Dos itens a) e b), $\dim N(G) = 0$ e $\dim \operatorname{Im} F = \dim W$. Pelo TNI,

$\dim W =$ → desconsiderar raciocínio.

c) A afirmação é falsa. Tomemos $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x,y)$. $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \mapsto (x,y,0)$.

Assim,
$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{G} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (x,y,0) \longmapsto (x,y) \Rightarrow F \circ G = Id_{\mathbb{R}^2}.$$

É claro que F e G são lineares (verifique), mas não são isomorfismos, pois $\dim \mathbb{R}^3 \neq \dim \mathbb{R}^2$.

d) A afirmação é falsa. O contraexemplo é a transformação nula, isto é,

$T : v \in V \longmapsto 0_W \in W$, que é linear (verifique), mas altamente não injetora.