22/11/23

Energia Relativística

Num referencial inercial todas as leis físicas continuam sendo válidas. Nesse sentido, a taxa de variação temporal da energia cinética (T) de uma partícula, é:

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt} \quad , \quad \vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Então:
$$\frac{dT}{dt} = \vec{v}\cdot m_0 \frac{d}{dt}\left[\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]$$

$$= \vec{v}\, m_0 \left[\frac{\frac{d\vec{v}}{dt}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \vec{v}\cdot\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right]$$

$$= \vec{v}\, m_0 \left[\frac{\frac{d\vec{v}}{dt}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \vec{v}\cdot\left(+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\left(-\frac{2v}{c^2}\right)\cdot\frac{dv}{dt}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right]$$

$$= \vec{v}\, m_0 \left[\frac{\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{v}{c^2}\right)\frac{dv}{dt}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right]$$

$|\vec{v}| = v$

$$= \frac{m_0\, v \frac{dv}{dt}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\, v\frac{dv}{dt}$$

Então: $\frac{dT}{dt} = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \, v \frac{dv}{dt}$

Se prestarmos atenção:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \left(\frac{-2v}{c^2}\right) \frac{dv}{dt}$$

Então: $\frac{d}{dt}\left(\frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv}{dt}$

Substituindo:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \, v \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{dE}{dt} \rightarrow \text{energia total}$$

Então: $\overset{\text{energia total}}{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m(v) c^2 \Rightarrow T = E - \text{const.}$

Qual é a constante?

Quando a partícula está em repouso: $v = 0 \Rightarrow T = 0$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{0^2}{c^2}}} \Rightarrow E_0 = m_0 c^2 \text{ (const.)}$$

Assim: $T = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right]$

$\mathcal{E}$: $\quad E = \underbrace{m_0c^2}_{\text{const (energia de repouso)}} + T$

Escrevendo energia em função do momento:

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{p^2}{c^2} = \frac{m_0^2 \frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{p^2}{c^2} = \frac{m_0^2\frac{v^2}{c^2} + (m_0^2 - m_0^2)}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left(\frac{v^2}{c^2} - 1 + 1\right)$$

$$\frac{p^2}{c^2} = \underbrace{\frac{m_0^2\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}}}_{=-m_0^2} + \frac{m_0^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \left(\frac{E}{c^2}\right)^2 \Rightarrow \frac{p^2}{c^2} = \left(\frac{E}{c^2}\right)^2 - m_0^2$$

Assim: $\quad p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2c^2$

Comparando $\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ com $E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$: $\vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{v}$

Para $m_0 \neq 0$ tanto $|\vec{p}|$ quanto E crescem indefinidamente quando $v \to c$, então ela não atinge c.

E se $m_0 = 0$?

partículas com $m_0 = 0$ se move com a velocidade da luz (c)

$m_0 = 0 \Rightarrow \{ |\vec{v}| = c$ e $|\vec{p}| = \frac{E}{c} \}$.

não faz sentido falar de "massa de repouso".

e p/ o caso do fóton?

Radiação eletromagnética transporta energia e momento.

Densidade de momento transportada: $\vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2} \rightarrow$ densidade de corrente de energia

No caso da onda plana no vácuo:

$\vec{S} = c\,U\,\hat{u} \equiv U\vec{c}$. $\rightarrow$ densidade de energia.

Então: $\vec{g} = \frac{U}{c}\hat{u} \; \{ |g| = \frac{U}{c} \}$

$\hookrightarrow$ equivale à $m_0 = 0 \{ |\vec{v}| = c$ e $|\vec{p}| = \frac{E}{c} \}$ em termos de densidade.

Ex: pressão de radiação.