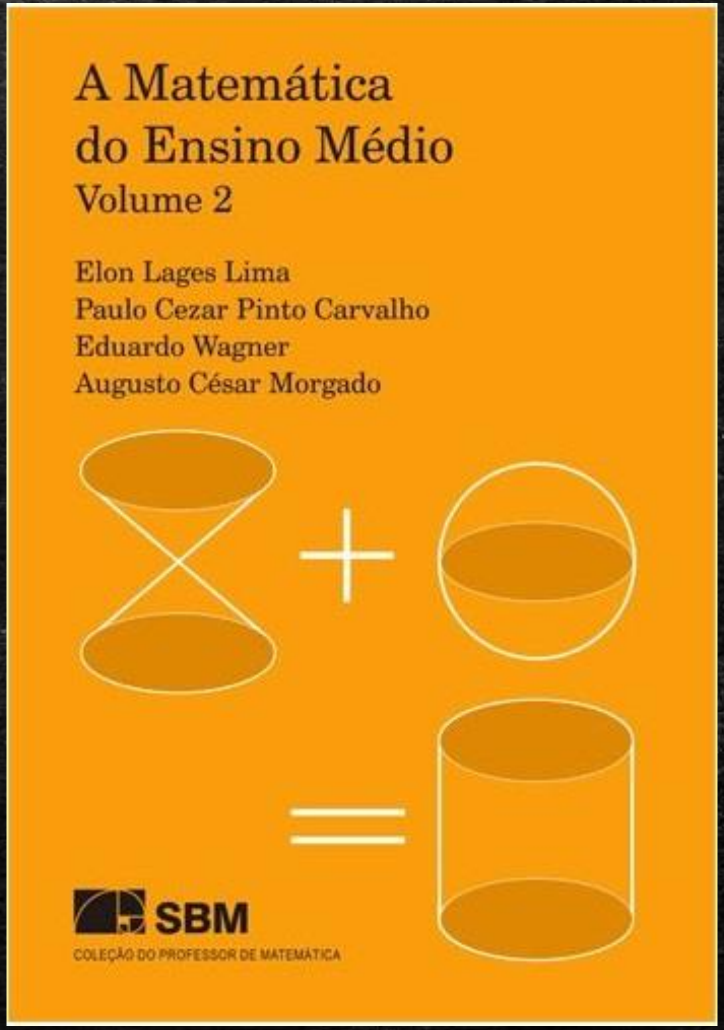
Volumes

O objetivo é desenvolver o estudo do volume das principais figuras espaciais.

- Conceito de Volume
- Volume do Cubo
- Paralelepípedo Reto-Retângulo
- Princípio de Cavalieri

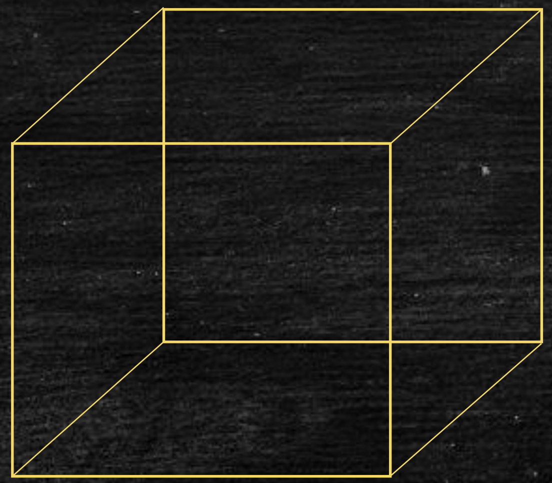
Volumes

- Prisma
- Cilindro
- Pirâmide
- Cone
- Esfera



Volumes

Entendemos um cubo como sendo uma figura espacial formada por seis quadrados, todos com lados de mesma medida, conforme ilustra a figura abaixo.



Volumes

Intuitivamente, o volume de um sólido é o espaço por ele ocupado.

Por ser uma medida, necessitamos de uma unidade de medida e um número real para quantificar essa medida.

Adotamos como 1 unidade de volume (1 u.v.) ao volume de um cubo de aresta cuja medida é 1 u.c. (unidade de comprimento).

Volumes

Se a unidade de comprimento for cm, então a unidade de volume será cm^3.

O volume de um sólido S deve ser o número de vezes que um cubo unitário cabe dentro de S.

Mas como esse sólido pode ter uma forma bastante irregular, vamos obter alguns métodos para obter fórmulas para o cálculo de volumes dos sólidos simples.

Volumes

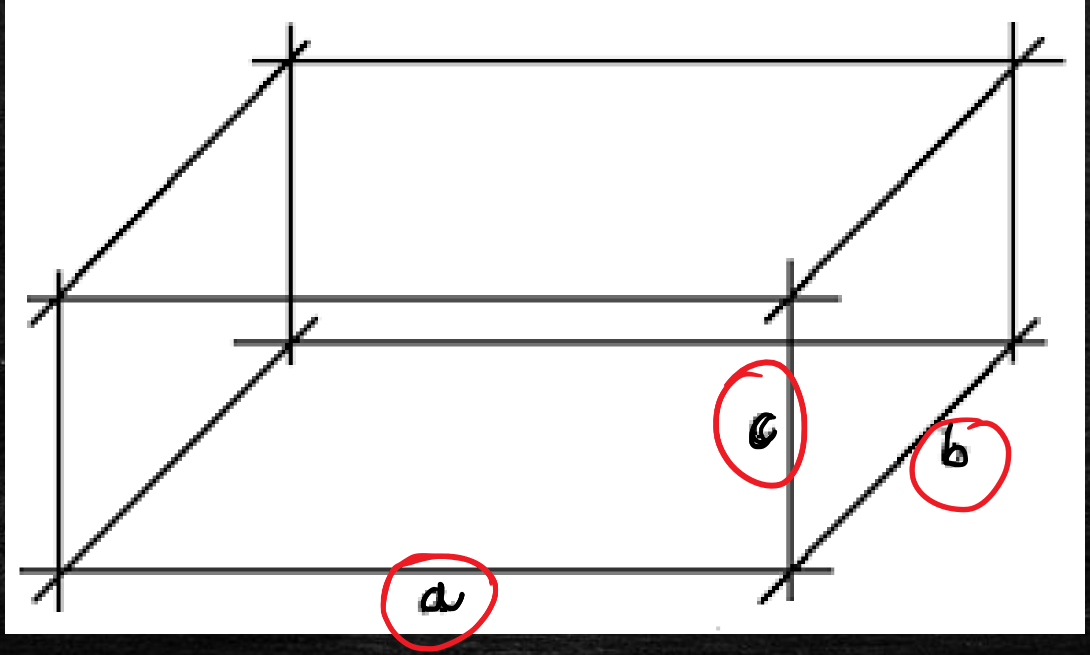
Considerando agora um cubo de aresta de medida $\ell \in \mathbb{R}$, pode-se provar, de forma análoga à que fizemos para um quadrado de lado $\ell \in \mathbb{R}$ (método da exaustão), que seu volume é ℓ^3u.v.

$$V(C_\ell) = \ell^3 \text{ u.v.}$$

Próximo sólido a ser considerado: paralelepípedo reto retângulo ou paralelepípedo reto ou bloco retangular.

Volumes

Um paralelepípedo reto retângulo é uma figura espacial formada por 6 retângulos, dois a dois congruentes, conforme a figura abaixo.



c é a altura do paralelepípedo.

Imagem: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/modulo3/conteudo/conteudos32.htm

Volumes

É possível provar, de forma análoga à feita para um retângulo cujos lados medem a e b (método da exaustão), que seu volume é abc u.v.

Outra conclusão que podemos tirar é que o volume de um paralelepípedo reto retângulo é dado pela expressão

$$V = \underbrace{\text{área da base}}_{a \cdot b} \times \underbrace{\text{altura}}_{\cdot\ c}.$$

O Princípio de Cavalieri

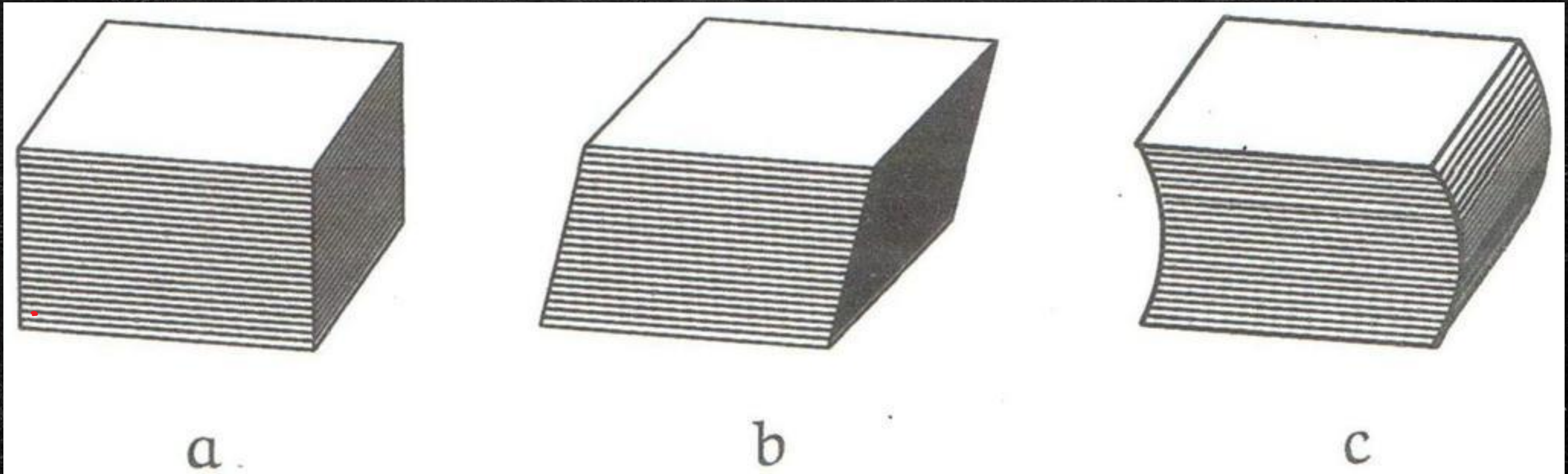


Imagem: https://docplayer.com.br/67930828-Uso-do-principio-de-cavalieri-no-calculo-de-areas-e-de-volumes.html

O Princípio de Cavalieri

Considere dois sólidos A e B apoiados em um mesmo plano α_0. Se todo plano paralelo a α_0 secciona os dois sólidos em figuras planas de mesma área, então esses sólidos possuem o mesmo volume.

O Princípio de Cavalieri

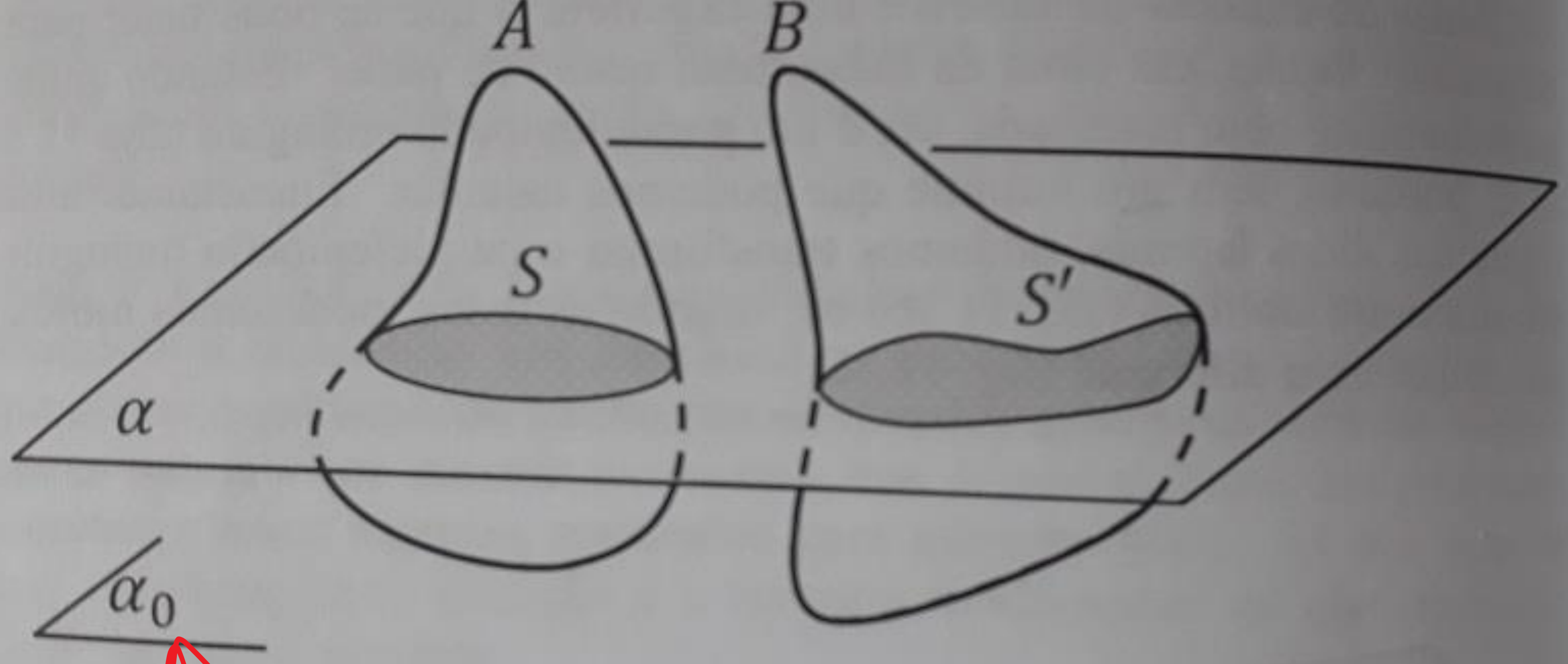


Figura 11.4

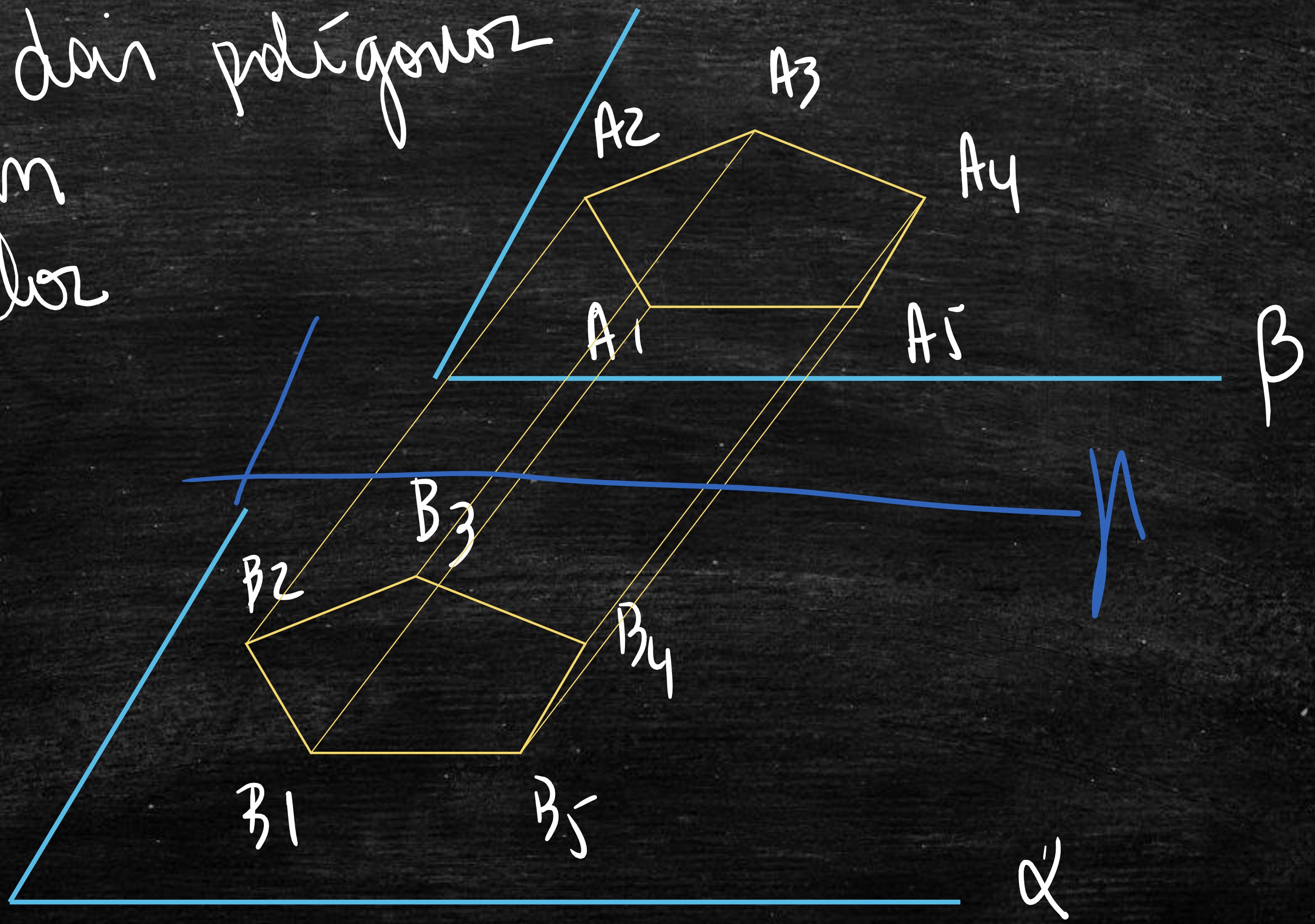
Imagem: A Matemática do Ensino Médio, Volume 2

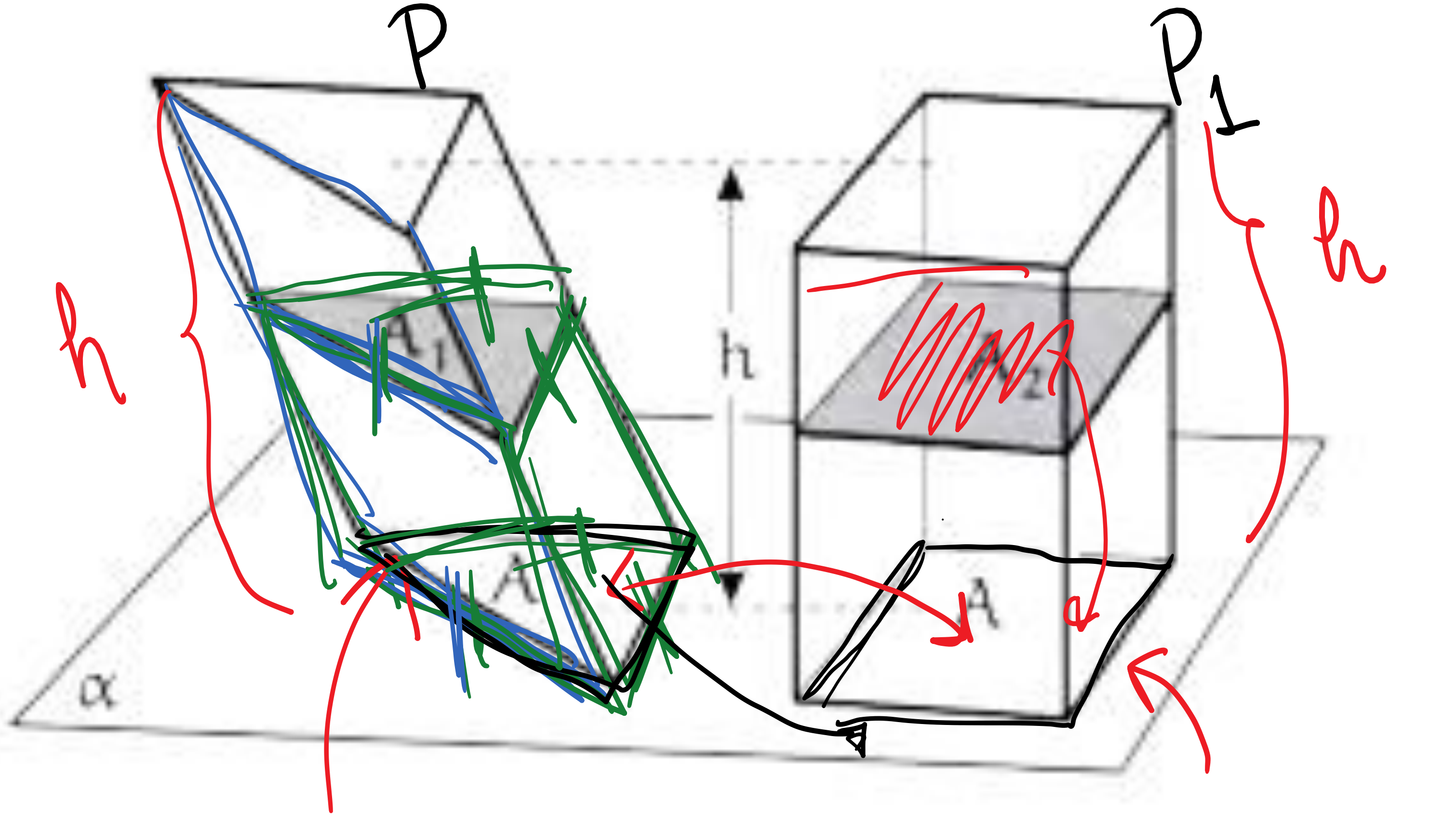
Prisma

Consideramos dois polígonos congruentes, em planos paralelos

Planos α e β,

onde $\alpha \parallel \beta$





Fazendo-se uma secção paralela ao plano α, obtemos uma figura congruente à base, logo

Imagem: A Matemática do Ensino Médio, Volume 2

possui área igual à área da base.

Volume do Prisma

- O prisma original P possui como base um polígono de área A, e esse prisma possui altura h.
- Construímos, no plano α um quadrado de área A, que será a base de um paralelepípedo reto retângulo de altura h, que chamaremos de P_1.
- Cada seção transversal paralela a α gera em P uma figura congruente à base de P.
- De maneira análoga, cada seção transversal paralela a α

Volume do Prisma

- gera em P_1 uma figura congruente à base de P_1. Como o quadrado foi construído de forma a ter mesma área A da base de P, concluímos que toda seção transversal paralela ao plano α corta ambos os prismas P e P_1 em figuras de mesma área.
- Como ambos os prismas possuem mesma altura, segue do Princípio de Cavalieri que ambos os prismas possuem mesmo volume.
- Como já sabemos que volume do paralelepípedo reto-retângulo é dado por *área da base x altura*

Volume do Prisma

- Concluímos que o volume do prisma P é dado pela fórmula

$$V_p = (área\ da\ base) \cdot altura$$