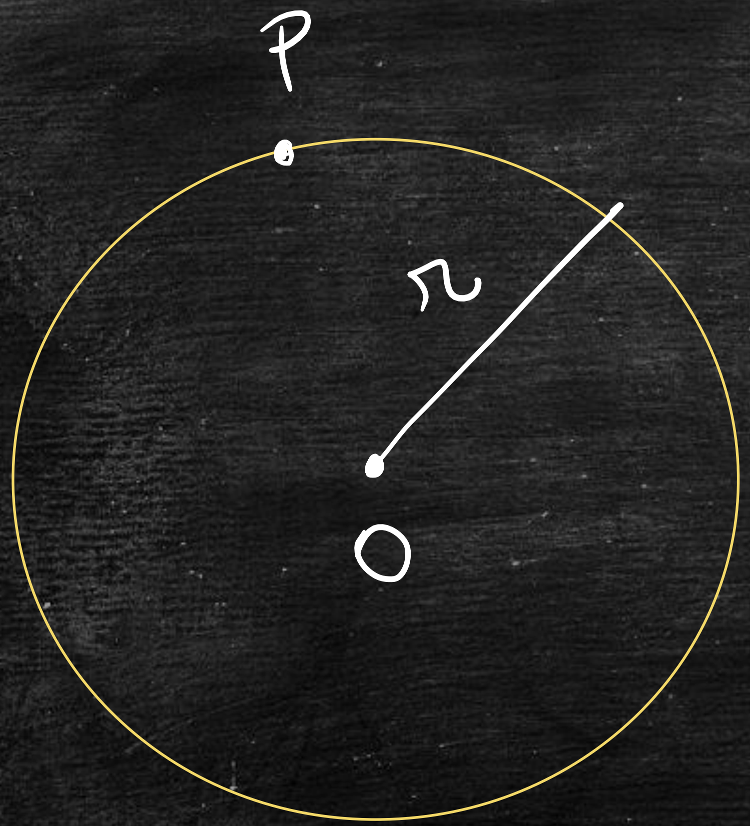
Áreas

- Área de uma circunferência de raio r.

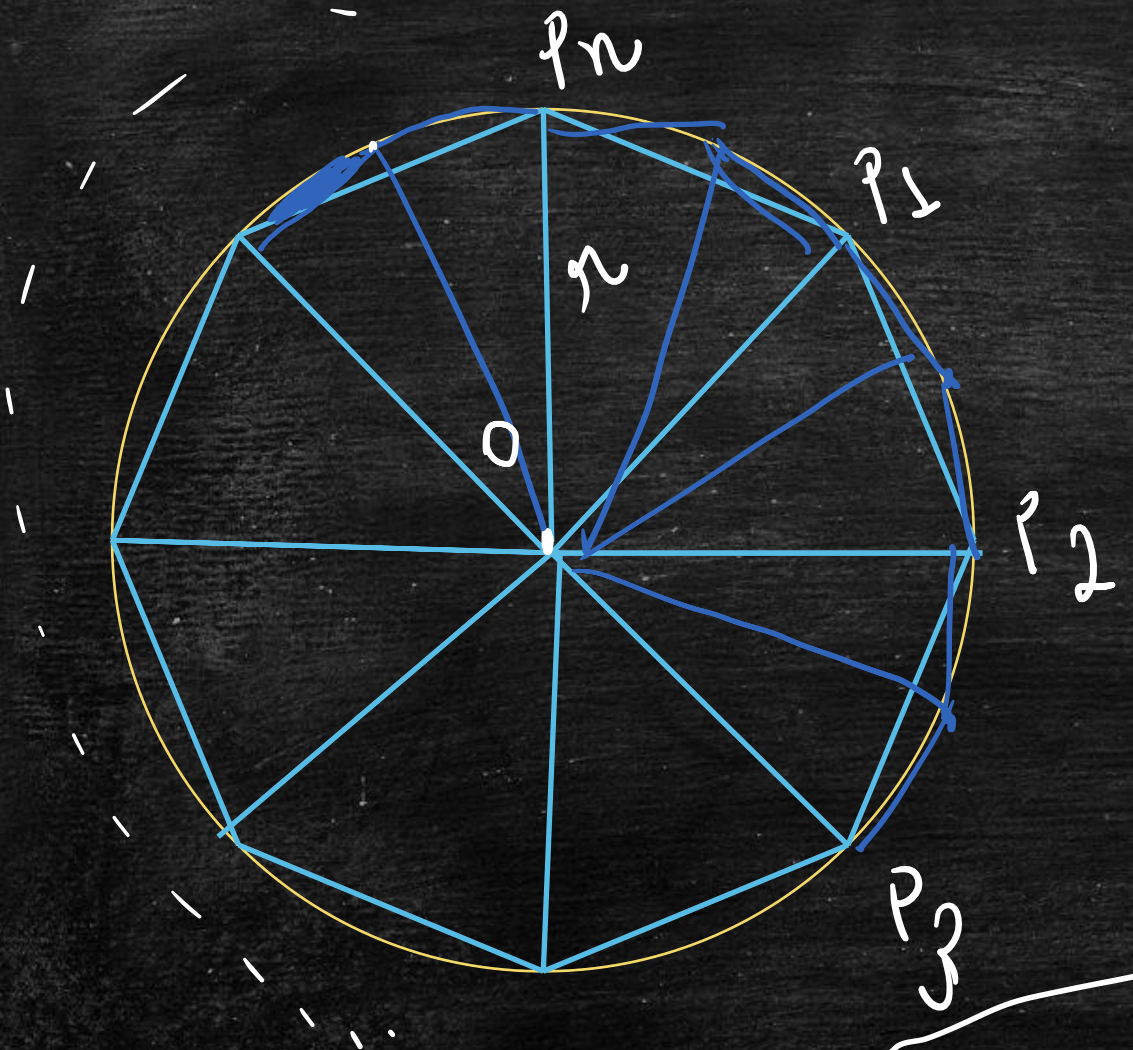
Dados um ponto O e um número $r > 0$, a circunferência de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos do plano que distam r de O.

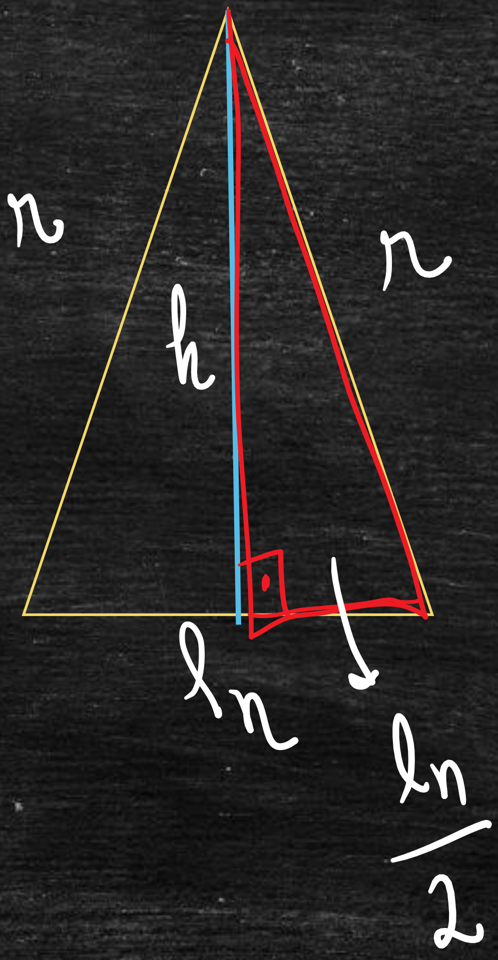


$d(P, O) = r$

O objetivo é verificar que dados duas circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ com raios r e r', respectivamente, os respectivos comprimentos c e c' de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ cumprem a condição

$$\boxed{\frac{c}{2r} = \frac{c'}{2r'}} \quad (= \pi)$$





$$h^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 = r^2$$

$$h^2 = r^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2$$

$$h = \sqrt{r^2 - \frac{l_n^2}{4}}$$

$$\text{área}\,(T_n) = \frac{l_n}{2} \cdot \sqrt{r^2 - \frac{l_n^2}{4}}.$$

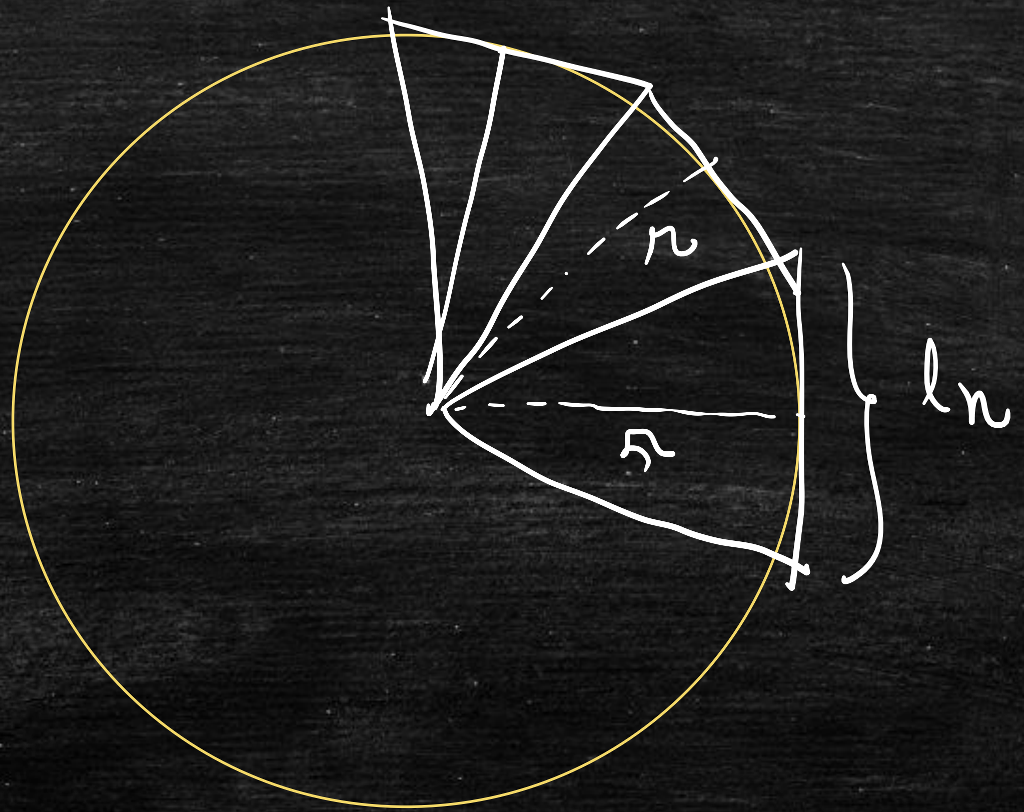
a área do polígono formado por n triângulos T_n

é dada por $n \cdot \frac{l_n}{2} \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}$.

a área da circunferência será dada pelo seguinte limite

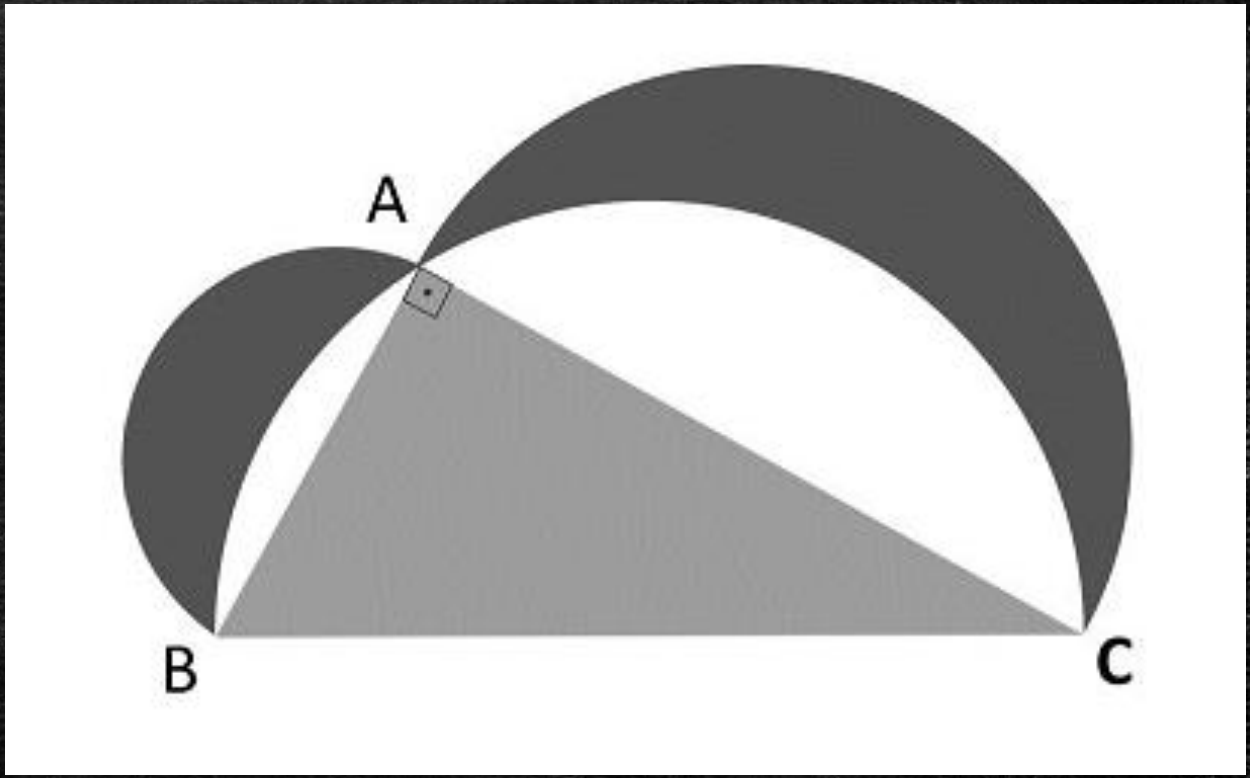
$$\lim_{n \to \infty} \left(\underbrace{n \frac{l_n}{2}}_{\to \frac{2\pi r}{2}} \cdot \sqrt{r^2 - \underbrace{\left(\frac{l_n}{2}\right)^2}_{\to 0}} \right) = \frac{2\pi r}{2} \cdot \sqrt{r^2} = \pi r^2$$

$l_n \to 0$ $\qquad$ $\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{n} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{l_n} \to 2\pi r$

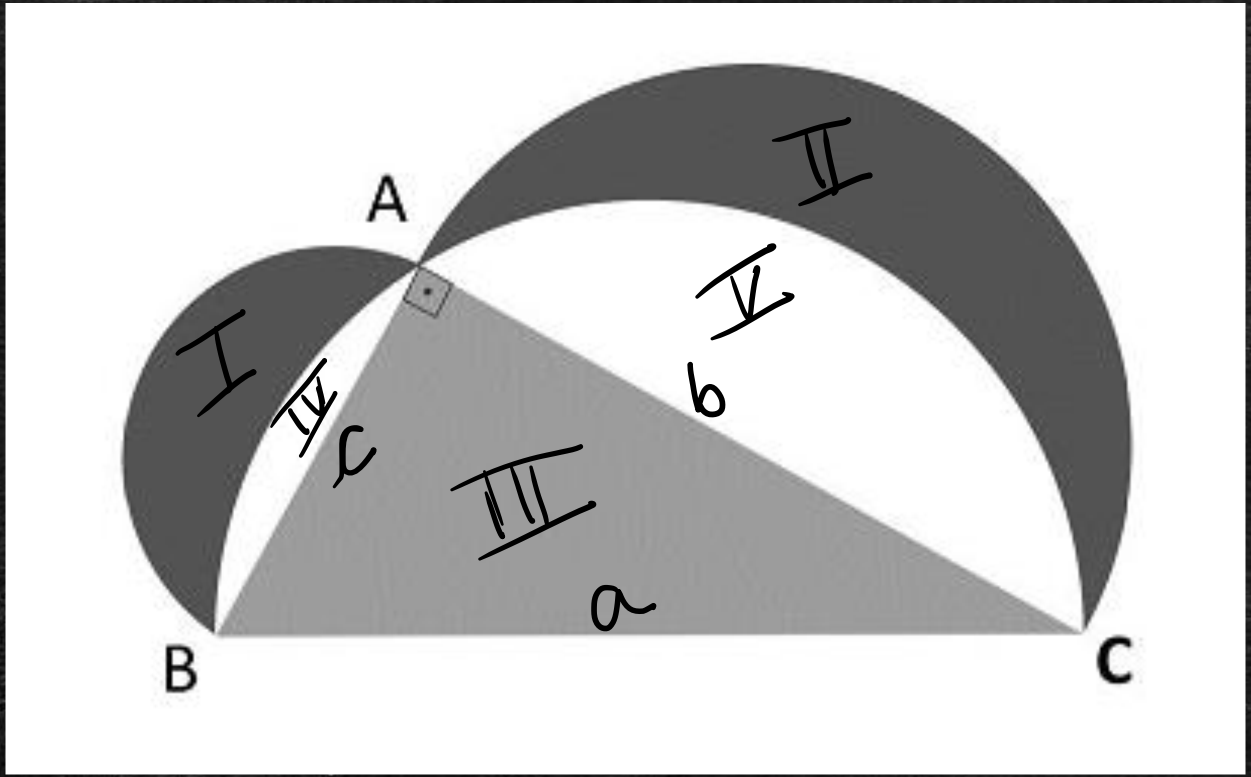


Exercício

Na figura ao lado, o triângulo ABC é retângulo e as semicircunferências têm diâmetro AB, BC e AC. Mostre que a área sombreada (mais escura) é igual à área do triângulo ABC.



lúnulas de Hipócrates



$$\mathrm{I}+\mathrm{IV} = \pi\left(\frac{c}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi c^2}{8}$$

$+$

$$\mathrm{II}+\mathrm{V} = \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi b^2}{8}$$

$$\mathrm{III} = \frac{bc}{2}$$

$$\mathrm{III}+\mathrm{IV}+\mathrm{V} = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi a^2}{8}$$

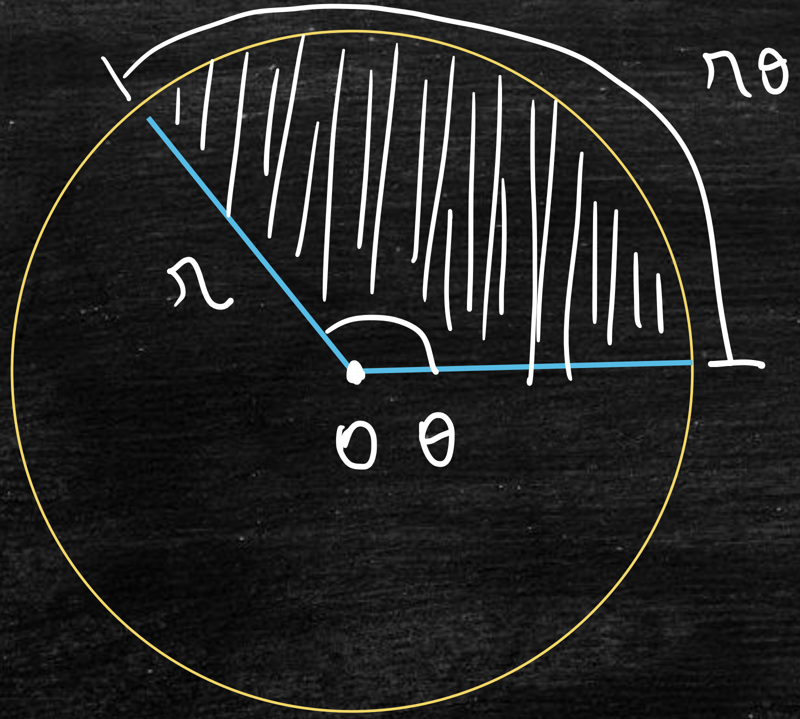
$$\overset{?}{}\ \mathrm{I}+\mathrm{II} = \mathrm{III}$$

$$= \mathrm{I}+\mathrm{II}+\cancel{\mathrm{IV}}+\cancel{\mathrm{V}} = \frac{\pi c^2}{8}+\frac{\pi b^2}{8} = \frac{\pi}{8}(c^2+b^2) = \frac{\pi a^2}{8}$$

$$= \mathrm{III}+\cancel{\mathrm{IV}}+\cancel{\mathrm{V}}$$

Áreas

- Área de um setor circular de raio r e ângulo interno θ.



$$\pi r^2 \;—\; 2\pi$$

$$A \;—\; \theta$$

$$A \cdot 2\pi = \pi r^2 \cdot \theta$$

$$A = \frac{\cancel{\pi} r^2 \cdot \theta}{2\cancel{\pi}} = \frac{r^2\theta}{2}$$

importante: θ deve estar em radianos.