Sobre a integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$

Como a função $f(x) = e^{-x^2}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, é uma função par, vale que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.
Dessa forma, vamos estudar primeiramente a integral $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$, que denotaremos por I.

$$\boxed{I = \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx}$$

Antes de calcular o valor da integral designada por I, vamos verificar que ela é convergente, isto é, que tal valor existe e é um número real.

Temos que

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_{0}^{1} e^{-x^2}dx + \int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

Como a função $f(x) = e^{-x^2}$ é contínua no intervalo $[0, 1]$, a integral $\displaystyle\int_{0}^{1} e^{-x^2}dx$ existe, pois é integral de Riemann de uma função contínua. Vamos analisar a integral $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Como $x \geq 1$, vale que $x \leq x^2$, e portanto, $(-x^2) \leq (-x)$, de maneira que $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Por sua vez, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^{-x}dx = \frac{1}{e}$. Pelo critério de comparação para integrais impróprias,como esta integral é convergente, vale o mesmo para $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.
Concluimos que a integral I converge.

Vamos calcular o seu valor.

Como $I = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$, vale que

$$I^2 = I.I = (\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx).(\int_{0}^{+\infty} e^{-y^2}dy)$$

Por sua vez,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \lim_{a\longrightarrow+\infty} \int_{0}^{a} e^{-x^2}dx \\ \\ \displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-y^2}dy = \lim_{b\longrightarrow+\infty} \int_{0}^{b} e^{-y^2}dy \end{cases}$$

e temos, então,

$$I.I = (\lim_{a\longrightarrow+\infty} \int_{0}^{a} e^{-x^2}dx).(\lim_{b\longrightarrow+\infty} \int_{0}^{b} e^{-y^2}dx) =$$

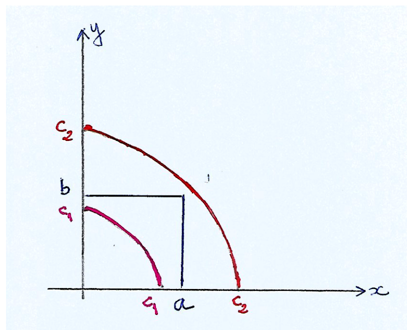
$$\lim_{a,b \longrightarrow +\infty} \int_0^a (\int_0^b e^{-x^2}.e^{-y^2} dy) dx =$$

$$\lim_{a,b \longrightarrow +\infty} \int\int_D e^{-x^2-y^2} dxdy$$

sendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a,\, 0 \leq y \leq b\}$.

Dados $a, b > 0$, considere $0 < c_1 \leq \ min\{a,b\}$ e $c_2 \geq \sqrt{a^2+b^2}$.

Seja $\left\{ \begin{array}{l} D_{c_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq c_1\} \\ D_{c_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq \ c_2 \end{array} \right.$



Então $D_{c_1} \subseteq D \subseteq D_{c_2}$.

Como a função integranda é positiva, vale que

$$\int\int_{D_{c_1}} e^{-x^2-y^2} dxdy \ \leq \ \int\int_D e^{-x^2-y^2} dxdy \ \leq \ \int\int_{D_{c_2}} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

Vamos calcular $\int\int_{D_{c_1}} e^{-x^2-y^2} dxdy$ usando coordenadas polares.

$$D_{c_1} : \left\{ \begin{array}{l} x = rcos\theta \\ y = rsen\theta \end{array} \right. \qquad \text{com } 0 \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2} \ \text{ e } \ 0 \leq r \leq c_1.$$

$$\int\int_{D_{c_1}} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{c_1} e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{2}(\frac{e^{-c_1^2}}{-2} - \frac{1}{-2}) = \pi \frac{1-e^{-c_1^2}}{4}$$

Analogamente, obtemos

$$\int\int_{D_{c_1}} e^{-x^2-y^2} dxdy = \pi \frac{1-e^{-c_2^2}}{4}$$

Logo,

$$\lim_{c_1 \longrightarrow +\infty} \pi \frac{1-e^{-c_1^2}}{4} \leq \lim_{a,b \longrightarrow +\infty} \int\int_D e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \lim_{c_2 \longrightarrow +\infty} \pi \frac{1-e^{-c_2^2}}{4}$$

e resulta que $I^2 = \dfrac{\pi}{4}$. Sendo assim, $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Como $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, concluimos que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.