

MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2023

10a. lista de exercícios

1. Determine os valores máximo e o mínimo da função $f(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 + yz + z^2$ na esfera $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

2. Determine os pontos da hipersuperfície de $\mathbb{R}^3$ definida por $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ que é mais próximo da origem.

3. Analisando a restrição da função

$$g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = x \cdot y,$$

à esfera $|x|^2 + |y|^2 = 1$ demonstre, pelo método do multiplicador de Lagrange, a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

4. Se $p, q > 0$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, mostre que o mínimo de

$$f(x, y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \quad x, y > 0$$

sujeito a $xy = 1$ é igual a 1.

5. Usando o exercício anterior mostre que se a e b são números não negativos e p e q são como acima, então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Em que condições vale a igualdade?

6. Seja P_2 o conjunto dos polinômios reais de grau ≤ 2 e defina $J : P_2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$J(f) = \int_0^1 f(x)^2 dx.$$

Defina também Q como sendo o subconjunto dos elementos de P_2 que valem um quando $x = 1$. Mostre que J tem mínimo em Q e calcule o ponto onde o mínimo é assumido.

- - - - - o o o - - - - -