MAT0230 - Geometria e Desenho Geométrico I - Turma 42

1ª Prova - 10 de novembro de 2023

Nome : ______________________________

Número USP : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Professor: Severino Toscano do Rego Melo

1	
2	
3	
Total	

Questão 1) (3 pts) Considere a seguinte interpretação da geometria de incidência: os pontos são os elementos do conjunto $S := \{A, B, C, D\}$, as retas são os seguintes subconjuntos de S:

$$\{A, B\},\ \{A, C\},\ \{A, D\} \text{ e } \{B, C, D\}.$$

(a) Mostre que todos os axiomas de incidência são satisfeitos.

(b) Mostre que neste modelo não existem retas paralelas.

a) (I1) Mostremos que para cada par de pontos, existe uma única reta que passa por eles:

- A, B: $\{A, B\}$ é a única que passa por ambos
- A, C: $\{A, C\}$ é a única que passa por ambos
- A, D: $\{A, D\}$ é a única que passa por ambos
- B, C: $\{B, C, D\}$ é a única que passa por ambos
- B, D: $\{B, C, D\}$ é a única que passa por ambos
- C, D: $\{B, C, D\}$ é a única que passa por ambos.

Como se esgotaram as possibilidades, mostramos que para quaisquer dois pontos, existe uma única reta passando por eles.

(I2) Devemos mostrar que dada uma reta, existem pelo menos dois pontos que estão nela. Neste caso as retas foram definitas como conjuntos de dois ou três elementos onde seus elementos são os pontos que estão nelas. Logo, para qualquer reta existem pelo menos dois pontos nela.

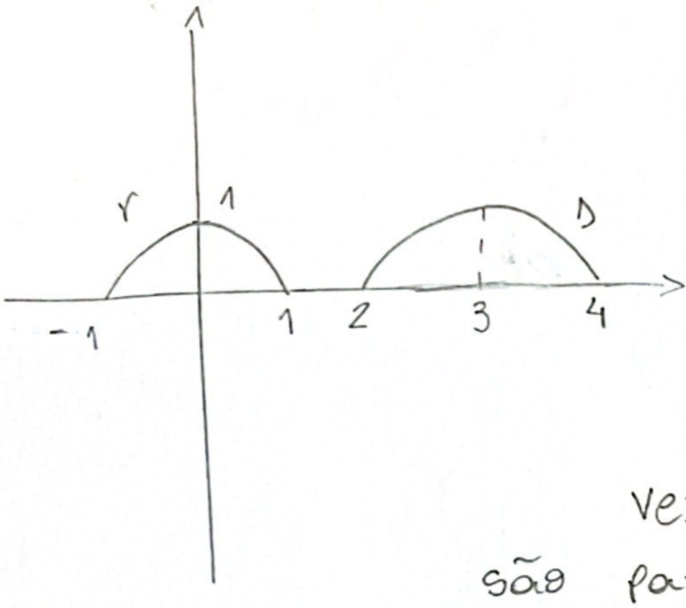
(I3) Devemos mostrar que existem pelo menos três pontos não colineares. Considerando a reta $\{A, B\}$, os pontos A e B estão nela mas C não está. Por I1, $\{A, B\}$ é a única reta que contém A e B, logo, não existe nenhuma reta que contenha A, B e C simultâneamente. Portanto, A, B e C não são colineares.

b) Devemos mostrar que para cada par de retas, existe um ponto que está em ambas:

- $\{A, B\}$ e $\{A, C\}$: A está em ambas
- $\{A, B\}$ e $\{A, D\}$: A está em ambas
- $\{A, B\}$ e $\{B, C, D\}$: B está em ambas
- $\{A, C\}$ e $\{A, D\}$: A está em ambas
- $\{A, C\}$ e $\{B, C, D\}$: C está em ambas
- $\{A, D\}$ e $\{B, C, D\}$: D está em ambas

Como se esgotaram as possibilidades, mostramos que todas as retas são duas a duas concorrentes entre si, portanto, não existem retas paralelas.

Questão 2 (2 pts) Seja r a reta $\{(x,y);\ x^2+y^2=1,\ y>0\}$ no Plano de Poincaré, e considere o ponto $P=(3,1)$. Mostre que existe mais de uma paralela a r passando por P.



Seja s a reta $\{(x,y);(x-3)^2+y^2=1,\ y>0\}$

Vejamos que $P \in s$:

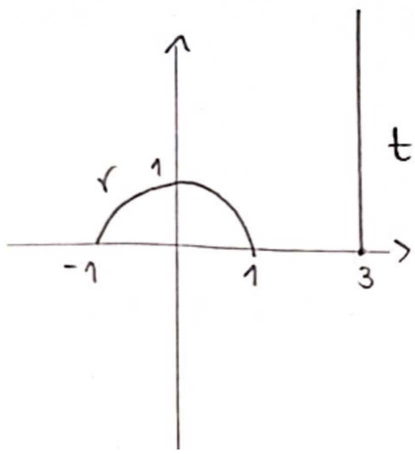
$(3-3)^2+1^2=1$

$1=1$ ✓

Vejamos que r e s são paralelas: se (x,y) está em r, então $|x|\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$. Se (x,y) está em s, então $|x-3|\leq 1 \Rightarrow 2\leq x\leq 4$. As desigualdades não podem ser satisfeitas ao mesmo tempo, logo $\nexists\,(x,y)$ t.q. $(x,y)\in r$ e $(x,y)\in s$

$\therefore\ r \parallel s$ ✓

Seja t a reta: $\{(x,y):\ x=3,\ y>0\}$. Notemos que $-1\leq x\leq 1\ \forall (x,y)\in r$, logo, $x\neq 3\ \forall (x,y)\in r$ e, portanto, $\nexists\,(x,y)$ t.q. $(x,y)\in t$ e $(x,y)\in r$. $\therefore\ r\parallel t$ ✓



Scanned with CamScanner

Questão 3) (5 pts) Sejam r e s duas retas concorrentes que se cruzam no ponto A, sejam B e C pontos em r tais que $A * B * C$, sejam D e E pontos em s tais que $A * D * E$.

(a) Faça uma figura que ilustre a situação descrita.

Justifique cada uma das afirmações seguintes, preferencialmente citando definições, axiomas ou proposições das Notas de Aula.

(b) A e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{CD}$, A e D estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BE}$.

(c) A e E estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{CD}$, A e C estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BE}$.

(d) B e E estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{CD}$, C e D estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BE}$.

(e) Existe M em $\overleftrightarrow{CD}$ tal que $B * M * E$, existe N em $\overleftrightarrow{BE}$ tal que $C * N * D$.

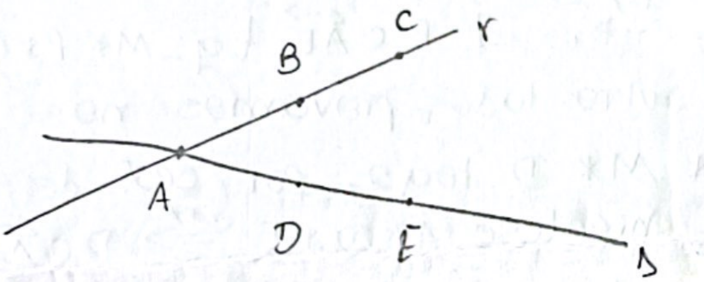
(f) $M = N$.

(g) M pertence ao interior de $\angle CAE$.

(h) A e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{CE}$, B e M estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{CE}$.

(i) M pertence ao interior de $\angle ACE$.

a)



b) Supondo $A \not\sim_{CD} B \overset{def}{\Rightarrow} \exists X \in \overleftrightarrow{CD}$ t.q. $A * X * B \overset{def}{\Rightarrow}$ $X \in \overleftrightarrow{CD}$ e $X \in \overleftrightarrow{AB}$. Por outro lado, $C \underset{def}{\in} \overleftrightarrow{CD}$ e $C \underset{hip}{\in} \overleftrightarrow{AB}$ logo, pela prop 2.2, $X = C \Rightarrow A * C * B$, abs. pela hip.

Analogamente, se $A \not\sim_{BE} D \Rightarrow \exists X \in \overleftrightarrow{BE}$ t.q. $A * X * D \Rightarrow$ $X \in \overleftrightarrow{BE}$ e $X \in \overleftrightarrow{AD}$. Mas $E \in \overleftrightarrow{BE}$ e $E \in \overleftrightarrow{AD} \Rightarrow X = E \Rightarrow$ $\Rightarrow A * E * D$, abs. $\therefore A \sim_{CD} B$ e $A \sim_{BE} D$

c) $D \in \overleftrightarrow{CD}$ por def. e $A * D * E$ por hip, logo, $A \not\sim_{CD} E$

$B \in \overleftrightarrow{BE}$ por def. e $A * B * C$ por hip, logo, $A \not\sim_{BE} C$

d) Supondo $B \sim_{CD} E$, como $E \not\sim_{CD} A$, $\overset{Prop\ 4.7}{\Rightarrow} B \not\sim_{CD} A$ absurdo pois já provamos que $A \sim_{CD} B$

Analogamente, se $C \sim_{BE} D$ e como $A \not\sim_{BE} C$, então $A \not\sim_{BE} D$ absurdo.

$\therefore B \not\sim_{CD} E$ e $C \not\sim_{BE} D$

e) $B \underset{CD}{\sim} E \overset{def}{\Rightarrow} \exists\, M \in \overleftrightarrow{CD}$ t.q. $B * M * E$

$C \underset{BE}{\not\sim} D \overset{def}{\Rightarrow} \exists\, N \in \overleftrightarrow{BE}$ t.q. $C * N * D$

f) $M \in \overleftrightarrow{CD}$ por definição e como $B * M * E$, então $M \in \overleftrightarrow{BE}$ por definição de reta. Por outro lado, $N \in \overleftrightarrow{BE}$ por definição e como $C * N * D$, então $N \in \overleftrightarrow{CD}$. Logo, pela prop 2.2, $M = N$.

g) Mostremos que (I) $M \underset{AE}{\sim} C$ e (II) $M \underset{AC}{\sim} E$

(I) Supondo que $M \underset{AE}{\not\sim} C \overset{def}{\Rightarrow} \exists\, P \in \overleftrightarrow{AE}$ t.q. $M * P * C$ $\overset{def}{\Rightarrow} P \in \overleftrightarrow{AE}$ e $P \in \overleftrightarrow{MC}$. Por outro lado, provamos nos itens e e f que $C * M * D$, logo, por def. de reta, $D \in \overleftrightarrow{MC}$ e pela hipótese $A * D * E \overset{def}{\Rightarrow} D \in \overleftrightarrow{AE}$. Logo, pela prop 2.2, $D = P \Rightarrow M * D * C$, absurdo pois já provamos no item (e) que $C * M * D$, Logo, $\underline{M \underset{AE}{\sim} C}$.

(II) (obs.: Esse item poderia ser feito de forma análoga ao (I), mas irei fazer de outro jeito) Pela hipótese, temos que $A * B * C \overset{def}{\Rightarrow} B \in \overleftrightarrow{AC}$. Por outro lado sabemos que $E \notin \overleftrightarrow{AC}$ pois $\angle CAE$ é um ângulo. Além disso, provamos no item (e) que $B * M + E$ $\overset{def}{\Rightarrow} M \in \overrightarrow{BE}$. Logo, pelo lema 4.13, $\underline{M \underset{AC}{\sim} E}$

Portanto, pela definição de interior de ângulo, $M \in$ int. $\angle CAE$.

Use esta página como rascunho ou como espaço para continuar as soluções das questões.

h) $A \underset{CE}{\sim} B$: Sabemos que $B \notin \overleftrightarrow{CE}$ pois, caso contrário, B seria intersecção de $\overleftrightarrow{CE}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, mas, por definição, C também é intersecção das retas, logo, pela prop 2.2, teríamos que $B=C$, absurdo pela hipótese. Além disso, como $A*B*C$ pela hipótese, então $A \in \overrightarrow{CB}$ por definição. Logo, pelo lema 4.13, $A \underset{CE}{\sim} B$

$B \underset{CE}{\sim} M$: Já mostramos que $B \notin \overleftrightarrow{CE}$, além disso, pelo item (e) temos que $B*M*E \overset{def}{\Longrightarrow} M \in \overrightarrow{EB}$. Logo, pelo lema 4.13, $B \underset{CE}{\sim} M$.

i) Mostremos que (I) $M \underset{CE}{\sim} A$ e (II) $M \underset{AC}{\sim} E$

(I) Provamos no item (h) que $B \underset{CE}{\sim} M$ e $B \underset{CE}{\sim} A$, logo, pela prop. 4.7, $M \underset{CE}{\sim} A$.

(II) Já provamos no item (g).

Portanto, $M \in \operatorname{int} \angle ACE$