Termo-Estatística

Prof. Thales Souza Freire

29 de novembro de 2023

Q 1. Nos Exercício-A9, A10 e A11, foi estudada a dinâmica de um gás ideal monoatômico em um tubo unidimensional. Para esse mesmo sistema, imagine que uma partícula é observada inicialmente no centro do cilindro, tomando como $x = 0$. Considere que, para os propósitos deste experimento, o tubo tenha comprimento infinito. Devido à isometria do espaço no eixo x, a partícula sofre colisões, em intervalos $\boldsymbol{\tau}$, que resultam na mesma probabilidade de se deslocar em ambos os sentidos, com um livre caminho médio igual a $\boldsymbol{l}$.

(a) Escreva a distribuição de Gaussiana $P(x,t)$ para o movimento aleatório da partícula no tubo, identificando a relação entre o $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ e σ_x^2 com o número médio de colisões que direcionam a partícula para a direita (passos para a direita) $\langle n \rangle$.

(b) Calcule o tempo que a partícula terá se difundido até cobrir o equivalente ao comprimento L $(-L/2 \leq x \leq L/2)$ do tubo. Use o $2\sigma_x$ como estimativa para isso.

(c) considere que existe um fluxo de partículas da esquerda pra direita, resultando em $p = 2q$, ou seja, a probabilidade de se deslocar para a direita é $2\times$ maior do que para a esquerda. Faça novamente o que foi pedido no item (a) para este caso, e calcule o tempo para a posição média da partícula se deslocar até atingir $x = L/2$

(d) no caso do item (c), em quanto tempo a partícula se difunde por um comprimento L? Qual o intervalo de posição, neste caso, $(\langle x \rangle \pm L/2)$?

Q_1. a) $P(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\sigma_x^2}}$, $x = l(n-m) = l(2n-N)$

$\langle x\rangle = 2l\langle n\rangle - lN = lN(p-q)$

Como $p=q \Rightarrow \langle x\rangle = 0$ e $\sigma_x^2 = 4l^2Npq$ (Dedução feita em aula)

$= l^2 N$, para $q=p=\frac{1}{2}$

Como $t = N\tau \Rightarrow N = \frac{t}{\tau} \Rightarrow \sigma_x^2 = l^2\frac{t}{\tau}$

$$\Rightarrow P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi l^2 \frac{t}{\tau}}} e^{-x^2/2l^2t/\tau}$$

como $D = \frac{l^2}{2\tau} \Rightarrow \sigma_x^2 = 2Dt$

$$\therefore P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-x^2/4Dt}$$

b) $2\sigma_x = L \Rightarrow 4\sigma_x^2 = L^2 \Rightarrow 4\frac{l^2}{\tau}t = L^2 \Rightarrow t = \frac{L^2}{l^2}\frac{\tau}{4}$

c) Neste caso, $p+q=1 \Rightarrow 3q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$ e $p = \frac{2}{3}$

$$p-q = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \langle x\rangle = lN(p-q) = \frac{1}{3}Nl = \frac{1}{3}l\frac{t}{\tau}$

$\Rightarrow \sigma_x^2 = 4l^2Npq = \frac{8}{9}l^2N = \frac{8}{9}l^2\frac{t}{\tau} = \frac{16}{9}Dt$

$$\Rightarrow P(x,t) = \sqrt{\frac{9}{32\pi D t}} \exp\left[\frac{(x-\frac{1}{3}l\frac{t}{\tau})^2}{\frac{16}{9}Dt}\right]$$

$$\langle x \rangle = \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} l \frac{t}{\tau} = \frac{L}{2} \Rightarrow t = \frac{3}{2} \frac{L}{l} \tau$$

d) $$2\sigma_x = L \Rightarrow 4\sigma_x^2 = L^2 \Rightarrow \frac{16}{9} l^2 \frac{t}{\tau} = L^2 \Rightarrow t = \frac{9}{16} \frac{L^2}{l^2} \tau$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{3} l \frac{t}{\tau} = \frac{1}{3} l \cdot \frac{9}{16} \frac{L^2}{l^2} = \frac{3}{16} \frac{L^2}{l}$$

$$-\frac{L}{2} \quad \frac{3L^2}{16 l} \quad +\frac{L}{2}$$

$$\frac{L(3L-8l)}{16 l} \qquad \frac{L(3L+8l)}{16 l}$$

$$\pm \frac{L}{2}$$

$$\frac{L(3L \pm 8l)}{16 l} = \frac{3L^2}{16 l} \pm \frac{8 L l}{16 l}$$