

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

CAPÍTULO 8

DINÂMICA DO CORPO RÍGIDO

Parte 3

1. Introdução

Neste capítulo do curso exploraremos os sistemas de vetores ‘quantidade de aceleração’, dos quais deriva uma grandeza física de natureza torsorial – o par composto pelas grandezas físicas ‘quantidade de aceleração resultante’ e ‘momento da quantidade de aceleração resultante’, essenciais à formulação dos dois teoremas fundamentais da Dinâmica do Corpo Rígido – o Teorema da Resultante e o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento. O uso concomitante desses teoremas na resolução dos problemas de Dinâmica do Corpo Rígido é o elemento característico do Método de Newton-Euler, assunto dominante nos tópicos que seguem.

2. Redução de um sistema de vetores quantidade de aceleração

Consideremos um sistema material \mathcal{S} constituído por partículas P_i , de massas m_i , que, em um dado instante, estão animadas de acelerações \vec{a}_i , sendo, portanto, portadoras das **quantidades de aceleração** $m_i \vec{a}_i$ (Fig.1-a). Adotando-se um polo O arbitrário que, no instante considerado, está animado de velocidade \vec{v}_O , pode-se reduzir o sistema original de vetores quantidade de aceleração ao par vetorial $\{\vec{\mathcal{A}}, \vec{\mathcal{M}}_O\}$, em que

$$\vec{\mathcal{A}} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \quad (2-1)$$

é a **quantidade de aceleração resultante**, enquanto

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \vec{a}_i \quad (2-2)$$

é o **momento da quantidade de aceleração resultante** no polo O .

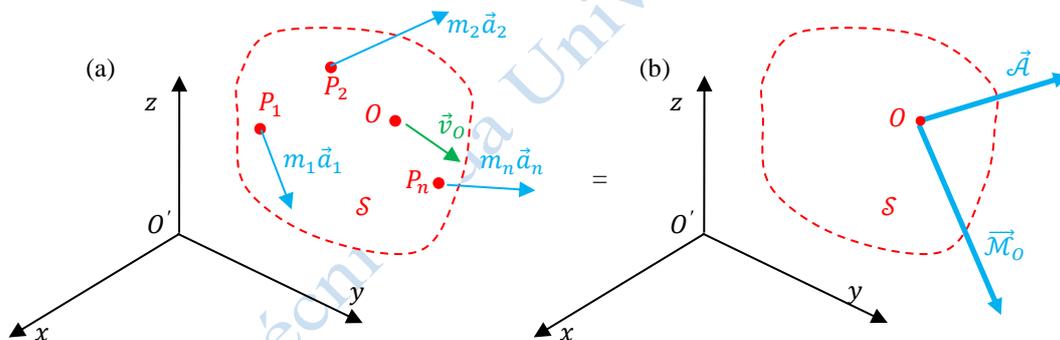


Figura 1. Redução de um sistema de vetores quantidade de aceleração de um sistema material.

Mostraremos, a seguir, que $\vec{\mathcal{A}}$ e $\vec{\mathcal{M}}_O$ podem ser expressos em função dos vetores quantidade de movimento resultante (\vec{Q}) e momento da quantidade de movimento resultante em O (\vec{H}_O).

Com esse propósito, notemos inicialmente que, para sistemas materiais com massa invariante no tempo, pode-se escrever:

$$\vec{\mathcal{A}} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{d\vec{Q}}{dt} \quad (2-3)$$

ou seja, **o vetor quantidade de aceleração resultante é a derivada do vetor quantidade de movimento resultante.**

Por outro lado, derivando-se o vetor momento da quantidade de movimento, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{H}_O}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dP_i}{dt} - \frac{dO}{dt} \right) \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \vec{a}_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^n \vec{v}_O \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \vec{a}_i \\
 &= -\vec{v}_O \wedge \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \vec{a}_i = \\
 &= -\sum_{i=1}^n \vec{v}_O \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \vec{a}_i = \\
 &= -\vec{v}_O \wedge \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \vec{a}_i = -\vec{v}_O \wedge \vec{Q} + \vec{M}_O \quad (2-4)
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\vec{M}_O = \frac{d}{dt} \vec{H}_O + \vec{v}_O \wedge \vec{Q} \quad (2-5)$$

Portanto, *o vetor momento da quantidade de aceleração resultante é a soma da derivada do vetor momento da quantidade de movimento resultante com a parcela $\vec{v}_O \wedge \vec{Q}$, em que \vec{v}_O é a velocidade do polo de redução considerado.*

3. Equipolência entre os sistemas de vetores quantidade de aceleração e força

Destaquemos, agora, que as partículas P_i do sistema material S estão submetidas à ação de forças externas $\{\vec{F}_i^{ext}, P_i\}$ e forças internas $\{\vec{F}_{ij}^{int}, (P_i, P_j)\}$ e, por decorrência, adquirem acelerações \vec{a}_i , conforme esquematizado na Fig.2.

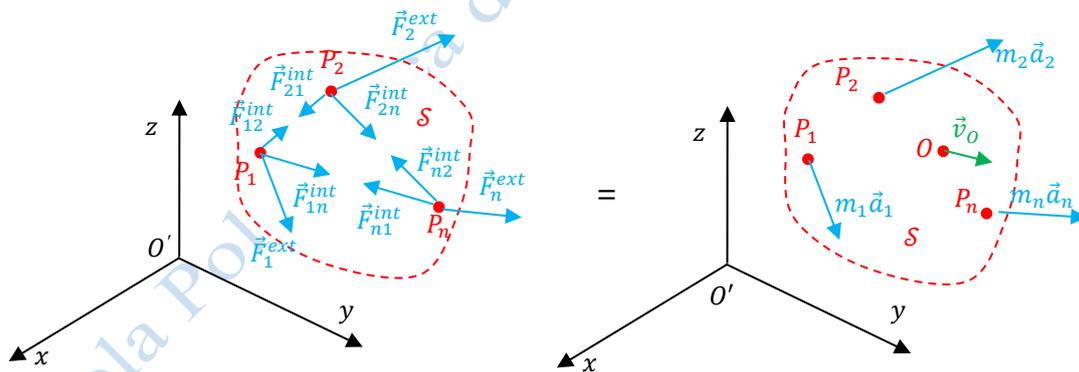


Figura 2. Equipolência entre o sistema de forças e o sistema de vetores quantidade de aceleração.

O princípio de ação e reação assegura que as forças internas agentes entre as partículas P_i e P_j têm mesma magnitude e são diretamente opostas ($\vec{F}_{ij}^{int} = -\vec{F}_{ji}^{int}$). Conseqüentemente, as forças internas atuantes no sistema material S constituem um sistema nulo, de modo que podemos escrever:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{ext} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \quad (3-1)$$

ou seja,

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \frac{d\vec{Q}}{dt} \quad (3-2)$$

que é equivalente a

$$\vec{R} = m\vec{a}_G \quad (3-3)$$

As equações anteriores, (3-2) e (3-3), sintetizam o **Teorema da Resultante**, também chamado de **Teorema do Movimento do Centro de Massa**: o centro de massa G de um sistema material \mathcal{S} se move como se em G estivesse concentrada toda a massa de \mathcal{S} , e em G agisse a resultante \vec{R} das forças externas aplicadas a \mathcal{S} .

Como corolário do Teorema da Resultante, verificamos que, *se a resultante das forças externas aplicadas a \mathcal{S} for nula, a quantidade de movimento de \mathcal{S} se conserva e o seu centro de massa mantém-se em equilíbrio ou realiza movimento retilíneo e uniforme.*

A prova desse corolário é imediata, pois, se $\vec{R} = \vec{0}$, podemos escrever:

$$m\vec{a}_G = \vec{0} \Rightarrow \frac{d^2\vec{G}(t)}{dt^2} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_G(t) = \vec{v}_0 \Rightarrow \frac{d\vec{G}(t)}{dt} = \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{G}(t) = \vec{G}_0 + \vec{v}_0 \cdot t \quad (\text{c.q.d.})$$

Logo, o centro de massa realiza movimento retilíneo uniforme ou se mantém em equilíbrio caso sua velocidade inicial \vec{v}_0 seja nula.

Retornando ao sistema material \mathcal{S} ilustrado na Fig.3, notamos que, introduzindo-se a expressão da 2ª Lei de Newton no cálculo do momento do sistema de forças externas em um ponto arbitrário O , tem-se:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \vec{a}_i \quad (3-4)$$

Lembrando que

$$\sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \vec{a}_i = \vec{M}_O \quad (3-5)$$

ou seja,

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O \quad (3-6)$$

resulta, da equação (2-5), que:

$$\vec{M}_O = \frac{d}{dt} \vec{H}_O + \vec{v}_O \wedge \vec{Q} \quad (3-7)$$

A equação acima sintetiza o **Teorema do Momento da Quantidade de Movimento** para um sistema material, que assim se enuncia: *o momento resultante das forças externas atuantes em um sistema material \mathcal{S} , com relação a um polo arbitrário O que se move com velocidade \vec{v}_O , é igual à derivada do momento da quantidade de movimento de \mathcal{S} acrescido do produto vetorial de \vec{v}_O pela quantidade de movimento \vec{Q} de \mathcal{S} .*

Os sistemas de vetores força $\{\vec{F}_i, P_i\}$ e de vetores quantidade de aceleração $\{m_i \vec{a}_i, P_i\}$ são equipolentes e podem ser reduzidos a uma resultante e a um momento resultante em um polo O arbitrário, ou seja,

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{A} \\ \vec{M}_O = \vec{M}_O \end{cases} \quad (3 - 8)$$

em que \vec{A} e \vec{M}_O se descrevem em função dos elementos de redução \vec{Q}, \vec{H}_O do sistema de vetores quantidade de movimento $\{m_i \vec{v}_i, P_i\}$, conforme estabelecido nas equações (2-3) e (2-5). A Fig.3 ilustra esses fatos.

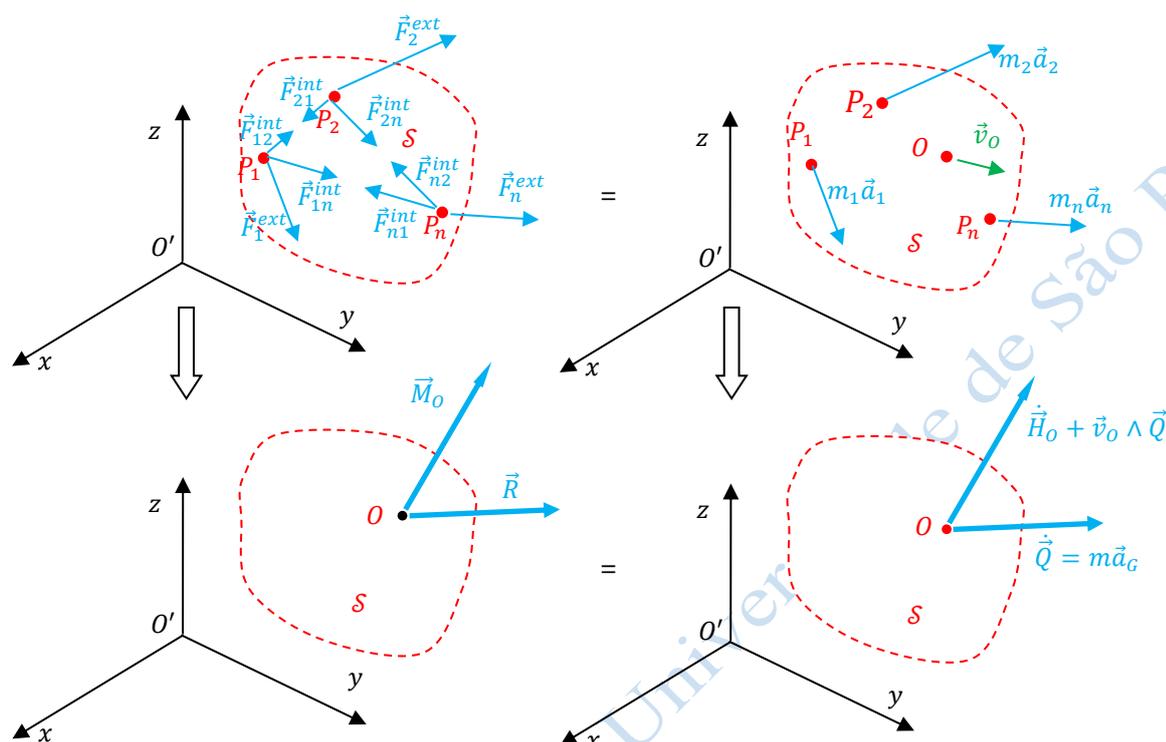


Figura 3. Redução dos sistemas de vetores força e quantidade de aceleração.

Sinteticamente, podemos expressar o Teorema da Resultante e o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento como uma igualdade entre dois torçores – o **torçor de ação** e o **torçor dinâmico**, isto é:

$$\{\vec{R}, \vec{M}_O\} = \{\vec{A}, \vec{M}_O\} \quad (3 - 9)$$

4. Derivada absoluta de um vetor descrito em um sistema de referência que se translada em relação a um sistema de referência fixo

Seja $O_1 x_1 y_1 z_1$ um sistema de referência fixo e seja $Oxyz$ um sistema de referência que realiza movimento de translação (Fig.4). Seja $\vec{B} = \vec{B}(t)$ um vetor variável no tempo, descrito no referencial móvel $Oxyz$; \vec{B} , portanto, é um vetor **relativo a $Oxyz$** .

Avaliemos a variação temporal de \vec{B} segundo os pontos de vista de dois observadores – um solidário ao referencial fixo, outro ao móvel.

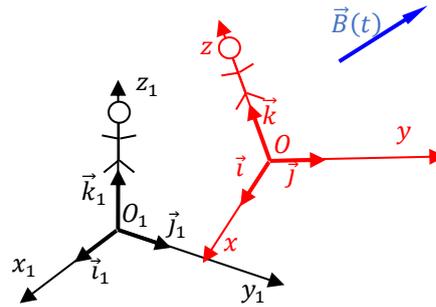


Figura 4. Variação de vetor descrito em referencial móvel em translação.

Como \vec{B} é descrito no referencial móvel, tem-se:

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k} \quad (4-1)$$

Para o observador solidário a $Oxyz$, os versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são invariantes. Logo, para esse observador, a variação de \vec{B} é dada por:

$$\left. \frac{d\vec{B}}{dt} \right|_{Oxyz} = \dot{B}_x \vec{i} + \dot{B}_y \vec{j} + \dot{B}_z \vec{k} \quad (4-2)$$

Notemos que, para o observador $O_1x_1y_1z_1$, os versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ também são invariantes, uma vez que o sistema de referência $Oxyz$ realiza movimento de translação. Logo, para o referido observador ligado a $O_1x_1y_1z_1$, a variação de \vec{B} é dada por:

$$\left. \frac{d\vec{B}}{dt} \right|_{O_1x_1y_1z_1} = \dot{B}_x \vec{i} + \dot{B}_y \vec{j} + \dot{B}_z \vec{k} \quad (4-3)$$

Portanto, quando o sistema de referência móvel $Oxyz$ realiza um movimento de translação em relação a um referencial fixo $O_1x_1y_1z_1$, as variações temporais de uma função vetorial $\vec{B}(t)$ descrita na base do sistema móvel (relativa à base móvel), observadas por observadores em $O_1x_1y_1z_1$ e em $Oxyz$ são iguais, ou seja:

$$\left. \frac{d\vec{B}}{dt} \right|_{O_1x_1y_1z_1} = \left. \frac{d\vec{B}}{dt} \right|_{Oxyz} \quad (4-4)$$

Ilustraremos a aplicação da equação (4-2) admitindo que \vec{B} coincida com o raio vetor $(P - O)$ de um ponto P móvel em relação ao referencial $Oxyz$, ou seja:

$$\vec{B} = (P - O) = x_P \vec{i} + y_P \vec{j} + z_P \vec{k} \quad (4-5)$$

De acordo com a equação (4-4), a velocidade **relativa** de P medida no referencial $Oxyz$ é igual à velocidade **relativa** de P medida no referencial $O_1x_1y_1z_1$, ou seja:

$$\left. \frac{d(P - O)}{dt} \right|_{O_1x_1y_1z_1} = \vec{v}_P^{rel} \Big|_{O_1x_1y_1z_1} = \left. \frac{d(P - O)}{dt} \right|_{Oxyz} = \vec{v}_P^{rel} \Big|_{Oxyz} = \dot{x}_P \vec{i} + \dot{y}_P \vec{j} + \dot{z}_P \vec{k} \quad (4-6)$$

5. Derivada absoluta de um vetor descrito em um sistema de referência móvel que realiza movimento de rotação em relação a um sistema de referência fixo

Seja $O_1x_1y_1z_1$ um sistema de referência fixo e $Oxyz$ um sistema de referência que realiza movimento de rotação em torno do ponto O com vetor rotação instantânea $\vec{\Omega}$ conhecido a cada instante. Seja $\vec{B} = \vec{B}(t)$ uma função vetorial descrita no referencial $Oxyz$ (logo, **relativa** a $Oxyz$).

Avaliemos a variação temporal de \vec{B} segundo os pontos de vista de dois observadores – um solidário ao referencial fixo, outro ao móvel (Fig.5).

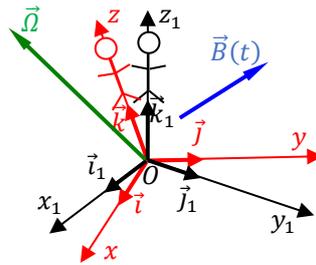


Figura 5. Variação de função vetorial descrita em um referencial em rotação em torno de um ponto fixo.

Como \vec{B} é descrito no referencial móvel, tem-se:

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k} \quad (5-1)$$

Para o observador solidário a $Oxyz$, os versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são invariantes. Logo, para esse observador, a variação de \vec{B} é dada por:

$$\left. \frac{d\vec{B}}{dt} \right|_{Oxyz} = \dot{B}_x \vec{i} + \dot{B}_y \vec{j} + \dot{B}_z \vec{k} \quad (5-2)$$

Para o observador $O_1x_1y_1z_1$, os versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ variam ao longo do tempo, uma vez que o sistema de referência $Oxyz$ realiza movimento de rotação em torno de O . Logo, para o referido observador ligado a $O_1x_1y_1z_1$, a variação de \vec{B} é dada por:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{B}}{dt} \right|_{O_1x_1y_1z_1} &= \dot{B}_x \vec{i} + \dot{B}_y \vec{j} + \dot{B}_z \vec{k} + B_x \dot{\vec{i}} + B_y \dot{\vec{j}} + B_z \dot{\vec{k}} = \\ &= \dot{B}_x \vec{i} + \dot{B}_y \vec{j} + \dot{B}_z \vec{k} + B_x \vec{\Omega} \wedge \vec{i} + B_y \vec{\Omega} \wedge \vec{j} + B_z \vec{\Omega} \wedge \vec{k} = \\ &= \dot{B}_x \vec{i} + \dot{B}_y \vec{j} + \dot{B}_z \vec{k} + \vec{\Omega} \wedge (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) \end{aligned} \quad (5-3)$$

Substituindo-se (5-1) e (5-2) na expressão acima, chega-se a:

$$\left. \frac{d\vec{B}}{dt} \right|_{O_1x_1y_1z_1} = \left. \frac{d\vec{B}}{dt} \right|_{Oxyz} + \vec{\Omega} \wedge \vec{B} \quad (5-4)$$

Para ilustrar a aplicação da equação (5-4), considere-se determinar a derivada do vetor rotação instantâneo de um corpo rígido, ou seja, da função $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$. Em tal caso, tem-se:

$$\left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{O_1x_1y_1z_1} = \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{Oxyz} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} = \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{Oxyz} \quad (5-5)$$

Conclui-se, portanto, que a aceleração rotacional de um corpo rígido medida por um observador ligado a um referencial fixo é igual à que é medida por um observador ligado ao corpo rígido. Esse

fato pode ser melhor compreendido quando se adota a interpretação de Poncelet (Garnier, 1949) para o movimento geral de um corpo rígido, expressa através do seguinte enunciado: **o movimento mais geral de um corpo rígido corresponde ao rolamento sem deslizamento do axoide móvel sobre o axoide fixo.**

Na Fig.6, ilustra-se o movimento de rotação de um corpo que gira em torno de um ponto fixo O . Nota-se que, em virtude de não ocorrer escorregamento entre os axóides móvel e fixo, o vetor rotação instantâneo do corpo rígido descreve trajetórias de igual perímetro em tempos iguais em ambos os referenciais $Ox_1y_1z_1$ e $Oxyz$.

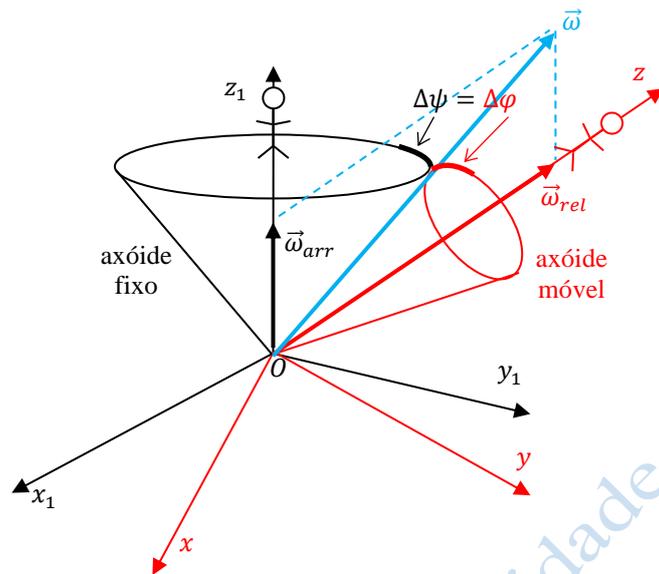


Figura 6. Variação temporal do vetor rotação instantânea de um corpo rígido vista por dois observadores.

6. Expressão do Teorema da Resultante para um corpo rígido

Vimos que, para um sistema material qualquer, o Teorema da Resultante é expresso pela equação

$$\vec{R} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = m\vec{a}_G \quad (6-1)$$

onde \vec{R} representa a resultante das forças externas que agem sobre o sistema (pois o sistema de forças internas é nulo), \vec{Q} é a quantidade de movimento resultante do sistema e \vec{a}_G a aceleração absoluta do seu centro de massa. Identicamente, a equação (6-1) expressa o Teorema da Resultante para o caso de o sistema material ser um corpo rígido (Fig.7).

Adotando-se O como polo de redução, a quantidade de movimento resultante é dada por

$$\vec{Q} = m[\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (G - O)] \quad (6-2)$$

e a aceleração do centro de massa do corpo se expressa como

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)] \quad (6-3)$$

Portanto, em um corpo rígido, o Teorema da Resultante pode ser escrito como:

$$\vec{R} = m\vec{a}_G = m\{\vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)]\} \quad (6-4)$$

Alternativamente, poderíamos ter obtido a expressão anterior mediante derivação do vetor quantidade de movimento resultante \vec{Q} , ou seja:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \left. \frac{d\vec{Q}}{dt} \right|_{O_1x_1y_1z_1} = m \left. \frac{d}{dt} [\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (G - O)] \right|_{O_1x_1y_1z_1} \\ \Rightarrow \vec{R} &= m\vec{a}_O + m \left. \frac{d}{dt} [\vec{\omega} \wedge (G - O)] \right|_{Oxyz} + m\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)]\end{aligned}\quad (6-5)$$

Notando-se que $(G - O)$ é invariante para um observador ligado ao referencial $Oxyz$, chega-se a:

$$\vec{R} = m\vec{a}_O + m\dot{\vec{\omega}} \wedge (G - O) + m\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)] \quad (6-6)$$

expressão idêntica à (6-3), como era de se esperar.

7. Expressão do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento para um corpo rígido

Nesta sessão particularizaremos a expressão (3-7), representativa do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento, para o caso em que o sistema material corresponde a um corpo rígido \mathcal{S} . Tomaremos por referência a Fig.7, na qual se destacam o sistema de forças externas $\{\vec{F}_i, P_i\}$ agentes em \mathcal{S} , bem como os elementos de redução $\{\vec{\omega}, \vec{v}_O\}$ do seu campo de velocidades e $\{\vec{Q}, \vec{H}_O\}$ de seu campo de momentos da quantidade de movimento.

Utilizando-se os sistemas de referência fixo $O_1x_1y_1z_1$ e móvel $Oxyz$, derivamos a expressão do momento da quantidade de movimento de \mathcal{S} , dada por

$$\vec{H}_O = (G - O) \wedge m\vec{v}_O + [J_O] \cdot [\omega] \quad (7-1)$$

Considerando-se, inicialmente, a parcela $(G - O) \wedge m\vec{v}_O$, vimos que ela pode ser interpretada como o momento da quantidade de movimento de uma **partícula ideal**, com massa igual à do corpo rígido e que se move com a velocidade do polo O . Derivando-se esse termo, tem-se:

$$\begin{aligned}\left. \frac{d}{dt} [(G - O) \wedge m\vec{v}_O] \right|_{O_1x_1y_1z_1} &= \left(\frac{d\vec{G}}{dt} - \frac{d\vec{O}}{dt} \right) \wedge m\vec{v}_O + (G - O) \wedge m \frac{d\vec{v}_O}{dt} \\ \Rightarrow \left. \frac{d}{dt} [(G - O) \wedge m\vec{v}_O] \right|_{O_1x_1y_1z_1} &= \vec{v}_G \wedge m\vec{v}_O + (G - O) \wedge m\vec{a}_O\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left. \frac{d}{dt} [(G - O) \wedge m\vec{v}_O] \right|_{O_1x_1y_1z_1} = -\vec{v}_O \wedge \vec{Q} + (G - O) \wedge m\vec{a}_O \quad (7-2)$$

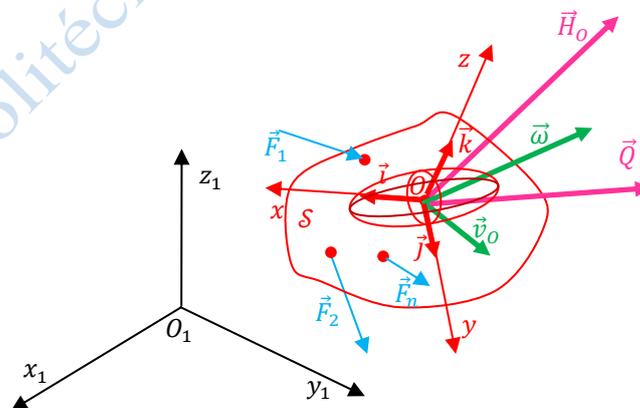


Figura 7. Corpo rígido movendo-se sob a ação de um sistema de forças.

Derivando-se, em seguida, o vetor $\{[J_O] \cdot [\omega]\}$ em relação ao referencial $O_1x_1y_1z_1$, notemos que ele está descrito no referencial móvel $Oxyz$. Logo, podemos aplicar nesse caso a equação (5-4), de modo que:

$$\left. \frac{d}{dt} \{[J_O][\omega]\} \right|_{O_1x_1y_1z_1} = \left. \frac{d}{dt} \{[J_O][\omega]\} \right|_{Oxyz} + \vec{\omega} \wedge \{[J_O][\omega]\} \quad (7-3)$$

É fundamental destacar que, do ponto de vista de um observador ligado ao referencial $Oxyz$, a matriz de inércia $[J_O]$ do corpo é invariante, ou seja:

$$\left. \frac{d}{dt} [J_O] \right|_{Oxyz} = [0] \quad (7-4)$$

Portanto, a equação (7-3) se escreve como:

$$\left. \frac{d}{dt} \{[J_O][\omega]\} \right|_{O_1x_1y_1z_1} = [J_O][\dot{\omega}] + \vec{\omega} \wedge \{[J_O][\omega]\} \quad (7-5)$$

Combinando-se as equações (7-2) e (7-5), tem-se:

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{H}_O \right|_{O_1x_1y_1z_1} = -\vec{v}_O \wedge \vec{Q} + (G - O) \wedge m\vec{a}_O + [J_O][\dot{\omega}] + \vec{\omega} \wedge \{[J_O][\omega]\} \quad (7-6)$$

Substituindo-se (7-6) em (3-7), abaixo replicada,

$$\vec{M}_O = \left. \frac{d}{dt} \vec{H}_O \right|_{O_1x_1y_1z_1} + \vec{v}_O \wedge \vec{Q} \quad (7-7)$$

resulta

$$\vec{M}_O - \vec{v}_O \wedge \vec{Q} = -\vec{v}_O \wedge \vec{Q} + (G - O) \wedge m\vec{a}_O + [J_O][\dot{\omega}] + \vec{\omega} \wedge \{[J_O][\omega]\}$$

Dessa forma, obtém-se, finalmente

$$\vec{M}_O = (G - O) \wedge m\vec{a}_O + [J_O][\dot{\omega}] + \vec{\omega} \wedge \{[J_O][\omega]\} \quad (7-8)$$

que é a expressão do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento para um corpo rígido.

8. Simplificações da expressão do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento de um corpo rígido

A equação (7-8) se simplifica nos casos a seguir:

(a) O polo O é um ponto fixo ($\vec{a}_O = \vec{0}$), de modo que

$$\vec{M}_O = [J_O][\dot{\omega}] + \vec{\omega} \wedge \{[J_O][\omega]\} \quad (8-1)$$

(b) O polo O coincide com o centro de massa G , resultando

$$\vec{M}_G = [J_G][\dot{\omega}] + \vec{\omega} \wedge \{[J_G][\omega]\} \quad (8-2)$$

(c) A aceleração do polo O tem a direção do vetor $(G - O)$, conforme se apresenta no clássico problema de um disco que realiza movimento plano de rolamento sem escorregamento sobre uma superfície plana rugosa (Fig.8); em tal caso,

$$\vec{M}_O = [J_O][\dot{\omega}] + \vec{\omega} \wedge \{[J_O][\omega]\} \quad (8-3)$$

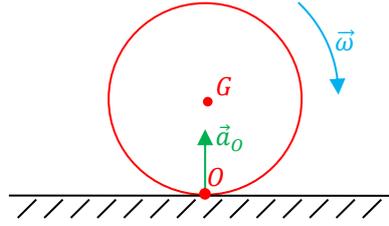


Figura 8. Disco rolando sem escorregar sobre uma reta.

- (d) O corpo rígido, de forma arbitrária, realiza movimento plano (Fig.9). Em tal caso, $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ e $\vec{\dot{\omega}} = \dot{\omega} \vec{k}$, de modo que a equação (7-8) adquire a forma

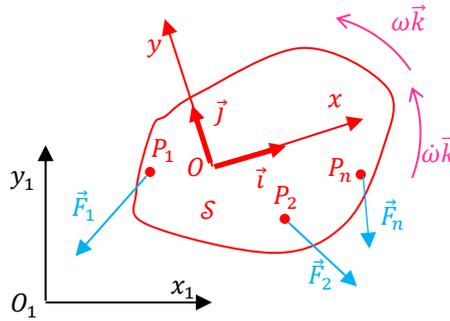


Figura 9. Corpo rígido realizando movimento plano sob a ação de forças externas.

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= (G - O) \wedge m \vec{a}_O + \begin{bmatrix} J_{Ox} & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oxy} & J_{Oy} & -J_{Oyz} \\ -J_{Oxz} & -J_{Oyz} & J_{Oz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \omega \vec{k} \wedge \left\{ \begin{bmatrix} J_{Ox} & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oxy} & J_{Oy} & -J_{Oyz} \\ -J_{Oxz} & -J_{Oyz} & J_{Oz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \right\} \\ \Rightarrow \vec{M}_O &= (G - O) \wedge m \vec{a}_O + (-J_{Oxz} \dot{\omega} \vec{i} - J_{Oyz} \dot{\omega} \vec{j} + J_{Oz} \dot{\omega} \vec{k}) + \omega \vec{k} \wedge (-J_{Oxz} \omega \vec{i} - J_{Oyz} \omega \vec{j} + J_{Oz} \omega \vec{k}) \\ \Rightarrow \vec{M}_O &= (G - O) \wedge m \vec{a}_O + (-J_{Oxz} \dot{\omega} \vec{i} - J_{Oyz} \dot{\omega} \vec{j} + J_{Oz} \dot{\omega} \vec{k}) + (-J_{Oxz} \omega^2 \vec{j} + J_{Oyz} \omega^2 \vec{i}) \\ \Rightarrow \vec{M}_O &= (G - O) \wedge m \vec{a}_O + (J_{Oyz} \omega^2 - J_{Oxz} \dot{\omega}) \vec{i} - (J_{Oxz} \omega^2 + J_{Oyz} \dot{\omega}) \vec{j} + J_{Oz} \dot{\omega} \vec{k} \end{aligned} \quad (8-4)$$

- (e) O corpo rígido é assimilável a uma figura plana e essa se move em seu próprio plano; nesse caso,

$$J_{Oxz} = J_{Oyz} = 0 \quad (8-5)$$

de modo que a equação (8-5) adquire a forma

$$\vec{M}_O = (G - O) \wedge m \vec{a}_O + J_{Oz} \dot{\omega} \vec{k} \quad (8-6)$$

Na equação acima comparece um único termo da matriz de inércia – no caso, o momento de inércia J_{Oz} , relativo ao eixo Oz . Porém, já vimos que, para figuras planas situadas no plano Oxy ,

$$J_{Oz} = J_{Ox} + J_{Oy} \quad (8-7)$$

independentemente de quais forem os eixos x, y adotados, uma vez que J_{Oz} depende apenas das distâncias r_i das massas m_i ao eixo z .

Conclui-se, portanto, que o movimento de S , neste caso, pode ser descrito utilizando-se quaisquer sistemas de eixos Oxy , **sejam eles ligados a S ou não**. A Fig.10 procura ilustrar esse fato.

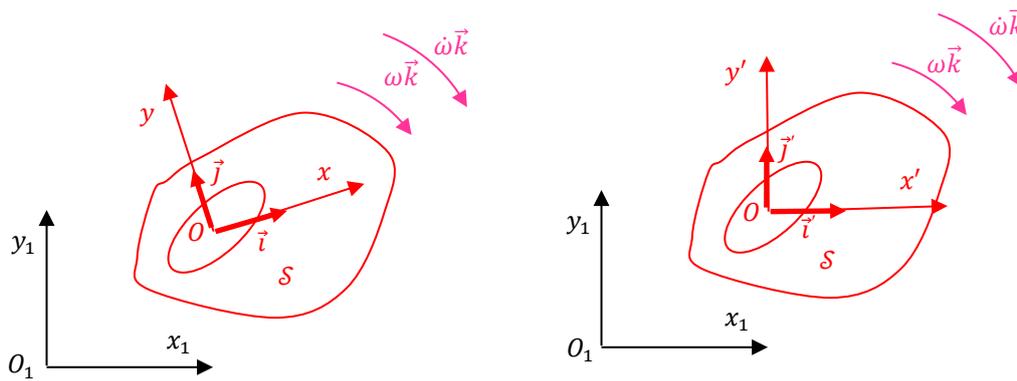


Figura 10. Invariância do momento de inércia J_{Oz} de uma figura plana: os valores de J_{Oz} descritos em Oxy (a) e em $Ox'y'$ (b) são iguais.

- (f) O corpo rígido realiza movimento de translação. Nesse caso, conforme ilustrado na Fig.11, o corpo rígido S se translada sob a ação de um sistema de forças externas de resultante \vec{R} . Seu campo de acelerações é uniforme, podendo ser representado por um vetor livre \vec{a} . Naturalmente, os vetores rotação instantânea e aceleração rotacional instantânea são ambos nulos, ou seja, $\vec{\omega} = \vec{0}$ e $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$.

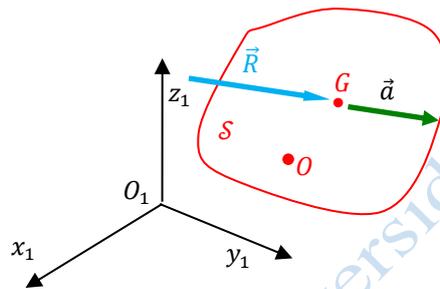


Figura 11. Corpo rígido em translação.

Nessas condições, a equação (7-8) adquire a forma:

$$\vec{M}_O = (G - O) \wedge m\vec{a} = (G - O) \wedge \vec{R} \quad (8 - 8)$$

indicando que o momento do sistema de forças externas aplicadas a S é igual ao da sua resultante supondo-se que esta seja localizada sobre o centro de massa de S .

Conseqüentemente, se se adotar como polo o centro de massa G , a equação (8-9) se transforma em:

$$\vec{M}_G = \vec{0} \quad (8 - 9)$$

ou seja, se um corpo rígido realiza movimento de translação, o momento das forças externas em relação ao seu centro de massa é necessariamente nulo.

Além disso, da expressão do momento da quantidade de movimento de um corpo rígido, ou seja,

$$\vec{H}_O = (G - O) \wedge m\vec{v}_O + [J_O] \cdot [\omega] \quad (8 - 10)$$

concluimos que

$$\vec{H}_G = (G - G) \wedge m\vec{v}_G = \vec{0} \quad (8 - 11)$$

ou seja, se um corpo rígido realiza movimento de translação, o momento da quantidade de movimento desse corpo em relação ao seu centro de massa é necessariamente nulo.

As duas afirmações acima não podem ser utilizadas para se construir a **falsa** inferência a seguir, riscada a propósito: “*se o momento do sistema de forças em relação ao centro de massa de um corpo rígido for nulo, então esse corpo realiza movimento de translação*” (**Falso**).

Na verdade, quando o momento do sistema de forças em relação ao centro de massa de um corpo rígido é nulo, tem-se

$$\vec{M}_G = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{H}_G(t)}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{H}_G(t) = \vec{H}_{G0} \quad (8 - 12)$$

ou seja, a inferência que pode ser feita é a seguinte: *se um corpo rígido está sujeito a um sistema de forças cujo momento resultante em seu centro de massa é nulo, o momento da quantidade de movimento desse corpo se conserva.*

Um corpo rígido que se movimenta com as características salientadas acima realiza um **movimento por inércia**, também chamado de **movimento espontâneo** ou ‘**a la Poinsot**’, exibido pelos giroscópios equilibrados e pelos satélites em navegação inercial. Essa classe de movimentos será analisada no Capítulo 9 dessa série de apostilas.

9. O método de Newton-Euler

O Teorema da Resultante é um dos resultados da obra de Newton, ao passo que o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento se deve essencialmente ao gênio de Euler. O uso concomitante desses dois teoremas, bem como das equações da Cinemática, caracteriza o assim chamado **Método de Newton-Euler**, o qual permite resolver duas grandes categorias de problemas da dinâmica do corpo rígido, quais sejam:

- **Problema direto:** Conhecidas as forças e momentos que atuam em um corpo rígido \mathcal{S} , determinar a evolução temporal de seu centro de massa e da orientação de \mathcal{S} .
- **Problema inverso:** Conhecidas as evoluções temporais do centro de massa de um corpo rígido \mathcal{S} , bem como da orientação de \mathcal{S} , determinar as forças e momentos requeridos para tal.

A resolução do problema direto sempre exige a integração de um sistema de equações diferenciais de segunda ordem, em geral não lineares. O exemplo da Fig.12-a é bastante ilustrativo: o movimento do bloco de massa m que se move sobre uma superfície plana sem atrito sujeito à ação de uma força $F(t)$ é governado pelo Teorema da Resultante, ou seja, pela equação

$$F(t) = ma_G \quad (9 - 1)$$

Desenvolvendo-se a equação acima, obtém-se

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F(t)}{m} \quad (9 - 2)$$

que, uma vez integrada para condições cinemáticas iniciais conhecidas, produzirá a lei de movimento do bloco, ou seja, uma função da forma $x = x(t)$.

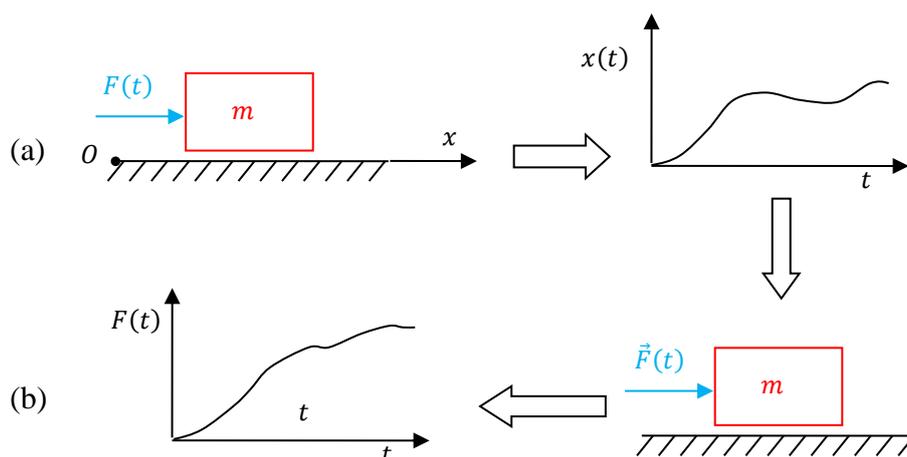


Figura 11. Classes de problemas de dinâmica do corpo rígido: (a) problema direto; (b) problema inverso. (Obs: os gráficos de $x(t)$ e de $F(t)$ são meramente esquemáticos).

A resolução do problema inverso, por sua vez, requer apenas a derivação temporal das coordenadas que descrevem a evolução do centro de massa e a orientação do corpo, acompanhada da substituição dessas derivadas nas expressões do Teorema da Resultante e do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento. No exemplo ilustrado da Fig.11-b, a força requerida para obrigar o bloco a se mover de acordo com a lei $x = x(t)$ é uma função $F(t)$ dada por:

$$F(t) = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (9 - 3)$$

Além das duas classes de problemas mencionados acima, existe uma terceira categoria de problemas que apresenta traços comuns aos dois tipos de problemas discutidos anteriormente: trata-se dos **problemas mistos**. Nesses casos, conhecem-se as forças externas que agem sobre cada corpo não ao longo do tempo, mas **apenas em um dado instante**; além disso, desconhecem-se as forças de ligação nesse instante.

Sistemas Multicorpos se enquadram perfeitamente nessa classe de problemas. Seu enunciado típico seria o seguinte: “*Em um dado instante conhecem-se: a) o estado cinemático de um sistema de corpos rígidos vinculados; b) as forças e momentos externos aplicados a esses corpos. No entanto, são desconhecidas as forças vinculares agentes nesses corpos. Escrever as equações diferenciais que governam o movimento do sistema multicorpos e determinar as forças vinculares pertinentes*”.

Para resolver essa classe de problemas, de acordo com o método de Newton-Euler, os seguintes passos são requeridos:

- construir o diagrama de corpo livre de cada corpo do sistema, de modo a explicitar as forças vinculares agentes nas ligações entre eles, bem como as que eles mantêm com o meio externo;
- escrever as equações do Teorema da Resultante e do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento para cada um dos corpos;
- escrever as equações cinemáticas que vinculam os movimentos dos corpos do sistema;
- introduzir os vínculos cinemáticos pertinentes nas equações diferenciais que governam o movimento dos corpos, ou seja, nas equações dos teoremas da resultante e do momento da quantidade de movimento;
- integrar o conjunto de equações diferenciais para condições cinemáticas iniciais conhecidas.

10. Procedimento geral para a resolução do problema direto

Utilizando-se a expressão vetorial do teorema da resultante, ou seja,

$$\vec{R} = m\vec{a}_G \quad (10 - 1)$$

e a expressão vetorial do teorema do momento da quantidade de movimento de um sólido, ou seja,

$$\vec{M}_O = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_G & y_G & z_G \\ a_{Ox} & a_{Oy} & a_{Oz} \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} J_{Ox}^P & 0 & 0 \\ 0 & J_{Oy}^P & 0 \\ 0 & 0 & J_{Oz}^P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \wedge \left\{ \begin{bmatrix} J_{Ox}^P & 0 & 0 \\ 0 & J_{Oy}^P & 0 \\ 0 & 0 & J_{Oz}^P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \right\} \quad (10 - 2)$$

obtêm-se 3 equações diferenciais de segunda ordem e 3 equações diferenciais de primeira ordem, todas elas escalares, conforme indicado abaixo:

$$\begin{aligned} R_x(t) &= m\ddot{x}_G \\ R_y(t) &= m\ddot{y}_G \\ R_z(t) &= m\ddot{z}_G \end{aligned} \quad (10 - 3)$$

$$\begin{aligned} M_{Ox}(t) &= y_G a_{Oz} - z_G a_{Oy} + J_{Ox}^P \dot{\omega}_x + (J_{Oz}^P - J_{Oy}^P) \omega_y \omega_z \\ M_{Oy}(t) &= z_G a_{Ox} - x_G a_{Oz} + J_{Oy}^P \dot{\omega}_y + (J_{Ox}^P - J_{Oz}^P) \omega_z \omega_x \\ M_{Oz}(t) &= x_G a_{Oy} - y_G a_{Ox} + J_{Oz}^P \dot{\omega}_z + (J_{Oy}^P - J_{Ox}^P) \omega_x \omega_y \end{aligned} \quad (10 - 4)$$

As expressões (10-3) correspondem às equações de Newton, enquanto que (10-4) corresponde às equações de Euler. Notemos que:

- Para o segundo conjunto de equações, os eixos do sistema de referência móvel coincidem com os eixos principais de inércia do corpo no polo O .
- A resultante \vec{R} do sistema de forças e a resultante do momento da quantidade de movimento do corpo no polo O , \vec{M}_O , são funções vetoriais dependentes do tempo, mas **conhecidas a priori**. No caso mais geral, essas funções dependem também da posição do centro de massa, da velocidade do centro de massa, da orientação do corpo e da variação temporal de sua orientação;
- A aceleração do polo O pode ser expressa em termos da aceleração de G , do vetor rotação absoluta $\vec{\omega}$ e do vetor aceleração rotacional absoluta $\dot{\vec{\omega}}$, ou seja,

$$\vec{a}_O = \vec{a}_G + \dot{\vec{\omega}} \wedge (O - G) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O - G)] \quad (10 - 5)$$

Para resolver o sistema de equações diferenciais (10-3) e (10-4), é necessário que, em um dado instante t_0 , sejam conhecidos:

- a posição do centro de massa do corpo;
- a velocidade do centro de massa do corpo;
- o vetor rotação absoluta do corpo.

Exceptuando-se alguns poucos casos, por sinal muito importantes, que serão discutidos no Capítulo 9, a resolução dessas equações diferenciais requer a aplicação de métodos de integração numérica. Uma vez integradas, obtêm-se a evolução temporal da posição e da velocidade do centro de massa do corpo e do seu vetor rotação instantânea, ou seja, as funções:

$$\begin{aligned} \vec{G} &= \vec{G}(t) \\ \vec{v}_G &= \vec{v}_G(t) \\ \vec{\omega} &= \vec{\omega}(t) \end{aligned} \quad (10 - 6)$$

É importante salientar que a integração das equações de Euler (10-4) **não** dá origem à lei que rege a evolução temporal da orientação do corpo rígido. A solução das equações de Euler é a função vetorial $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ que, combinada com a lei de variação da velocidade de G (segunda equação 10-6), permite determinar a evolução do eixo helicoidal instantâneo do corpo a partir da equação

$$H(t) = G(t) + \frac{\vec{\omega}(t) \wedge \vec{v}_G(t)}{|\vec{\omega}(t)|^2} + \frac{\vec{\omega}(t)}{|\vec{\omega}(t)|} \quad (10 - 7)$$

A forma mais simples de se obter a evolução temporal da orientação de um corpo rígido consiste em utilizar a abordagem lagrangeana. Integrando-se as equações de Lagrange, obtém-se, de forma imediata, a evolução temporal dos ângulos de Euler. Esse é um assunto muito importante e que será abordado em capítulos posteriores desta série de apostilas.

11. O ponto de vista de d'Alembert

De acordo com a segunda lei de Newton, o movimento de uma partícula material de massa invariável m , sujeita à ação de uma força \vec{F} (Fig.12-a), é descrito pela equação

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (11 - 1)$$

em que \vec{a} é a aceleração da partícula medida em um referencial inercial.

Todavia, escrevendo-se a equação anterior na forma proposta por d'Alembert¹, qual seja,

$$\vec{F} - m\vec{a} = \vec{0} \quad (11 - 2)$$

examina-se o problema em consideração segundo o ponto de vista de um observador ligado a um sistema de referência não-inercial (Fig.12-b), de modo que, para este, **a partícula material se mantém em equilíbrio sob a ação de uma força externa \vec{F} e de uma força de inércia $-\vec{m}\vec{a}$.**

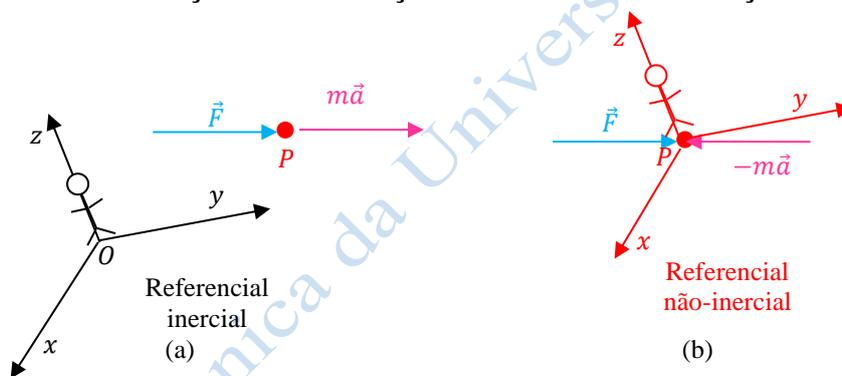


Figura 12. Pontos de vista de: (a) Newton; (b) d'Alembert.

O ponto de vista de d'Alembert pode ser adotado, vantajosamente, no estudo do comportamento dinâmico de um sistema de partículas materiais sujeitas à ação de forças externas. Conforme destacado na Fig.13, *em um sistema material arbitrário em movimento, o conjunto de forças externas e de forças de inércia (forças fictícias) constitui um sistema nulo.*

A proposição anterior justifica a aplicação dos métodos da Estática na resolução de problemas de Dinâmica do corpo rígido pertencentes à categoria dos problemas inversos e mistos, ou seja, daqueles em que se busca identificar forças e binários (reativos ou vinculares) agentes no sistema de corpos em um dado instante.

¹ Importante matemático e filósofo do século XVIII, que se dedicou ao estudo de problemas fundamentais da Mecânica, como o clássico problema dos três corpos e o das cordas vibrantes, dentre outros.

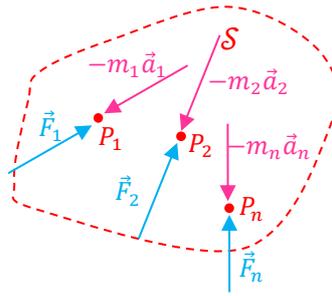


Figura 13. Sistema material sob a ação de forças externas e forças de inércia.

12. Exemplos de aplicação do Método de Newton-Euler em problemas de movimento plano

Nas próximas sessões resolveremos alguns problemas elementares da Dinâmica do Corpo Rígido mediante a aplicação do Método de Newton-Euler. Com o intuito de enfatizar as características do método em si, focalizaremos apenas problemas em que os corpos realizam movimento plano.

Nos itens 12.1 e 12.2 são resolvidos problemas **diretos**, enquanto que nos itens 12.3 e 12.4 discutem-se problemas **mistos**.

12.1 Bloco realizando movimento plano sob ação de força variável no tempo

Sabendo que um bloco de massa m desliza sobre um plano sem atrito, sob a ação de uma força $\vec{F}(t)$ variável no tempo (Fig.14), pede-se determinar sua trajetória.

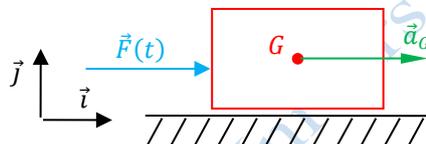


Figura 14. Bloco movendo-se sob a ação de força variável no tempo.

Do Teorema da Resultante tem-se:

$$F(t) = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F(t)}{m} \quad (12.1 - 1)$$

A primeira integral da equação acima é obtida a partir de:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{F(t)}{m} \quad (12.1 - 2)$$

ou seja,

$$dv = \frac{F(t)}{m} dt \Rightarrow v = \frac{1}{m} \int F(t) dt + C_1 \quad (12.1 - 3)$$

em que C_1 é uma constante de integração determinada a partir das condições iniciais. Sabendo-se, por exemplo que a velocidade do bloco no instante inicial ($t = 0$) é v_0 , a equação (12.1-3) adquire a forma:

$$v = v_0 + \frac{1}{m} \int F(t) dt \quad (12.1 - 4)$$

Integrando-se, a seguir, a equação acima, obtém-se:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} \int F(t) dt \Rightarrow dx = v_0 dt + \left[\frac{1}{m} \int F(t) dt \right] dt$$

$$\Rightarrow x = v_0 t + \int \left[\frac{1}{m} \int F(t) dt \right] dt + C_2 \quad (12.1 - 5)$$

Conhecendo-se a posição x_0 do bloco no instante inicial, obtém-se, finalmente, a trajetória do seu centro de massa, dada por:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int \left[\int F(t) dt \right] dt \quad (12.1 - 6)$$

No case de a força $\vec{F}(t)$ ser constante ($\vec{F}(t) = F\vec{i}$), o bloco irá adquirir uma aceleração constante

$$a = \frac{F}{m} \quad (12.1 - 7)$$

e as expressões (12.1-4) da velocidade e (12.1-6) da posição do seu centro de massa assumirão, respectivamente, as formas

$$v = v_0 + at \quad (12.1 - 8)$$

e

$$x = x_0 + v_0 t + a \frac{t^2}{2} \quad (12.1 - 9)$$

características do movimento retilíneo uniformemente variado.

12.2 Sistema material sob a ação de forças externas com resultante nula na direção horizontal

Dois cubos de arestas a e massas m e $2m$ estão apoiados sobre um prisma reto ABC de aresta $BC = 8a\sqrt{2}$ e massa M conforme indicado na Fig.15. Supondo-se que não haja atrito entre o prisma e o solo, determinar o seu deslocamento quando o cubo de massa $2m$ atingir o plano horizontal.

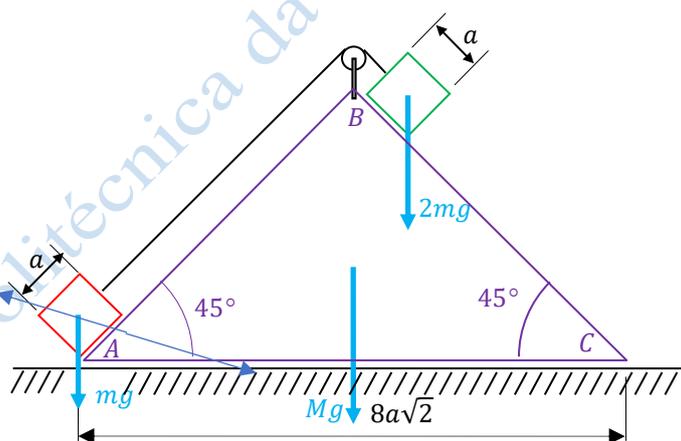


Figura 15. Estado inicial de sistema material composto por um prisma de massa M e dois cubos de massas m e $2m$.

Notemos que no sistema material da Fig.15 as forças de contato entre os cubos e o prisma constituem pares equilibrados de forças internas e as forças de contato entre o prisma e o solo são verticais. Portanto, nesse sistema agem apenas forças externas verticais, de modo que o Teorema da Resultante, segundo a direção horizontal, se expressa como:

$$(M + m + 2m)a_{Gx} = 0 \quad (12.2 - 1)$$

de onde se infere que

$$a_{Gx} = \frac{d^2 Gx}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{dv_{Gx}}{dt} = 0 \Rightarrow v_{Gx} = C_1 \quad (12.2 - 2)$$

Como o sistema estava originalmente em repouso, conclui-se que

$$C_1 = v_{Gx0} = 0 \quad (12.2 - 3)$$

de modo que

$$v_{Gx} = \frac{dGx}{dt} = 0 \Rightarrow G_x = C_2 \quad (12.2 - 4)$$

ou seja, a posição horizontal do centro de massa do sistema material constituído pelo prisma e pelos dois cubos se conserva durante o seu movimento.

Tomando-se por referência a Fig.15, a posição horizontal do centro de massa do sistema, é calculada a partir de

$$(M + 3m)x_G = m \cdot 0 + M \cdot 4a\sqrt{2} + 2m \left(4a\sqrt{2} + a \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

obtendo-se

$$x_G = \frac{(4M + 9m)a\sqrt{2}}{2m + M} \quad (12.2 - 5)$$

Considerando-se, em seguida, a configuração final do sistema, ilustrada na Fig.16, tem-se:

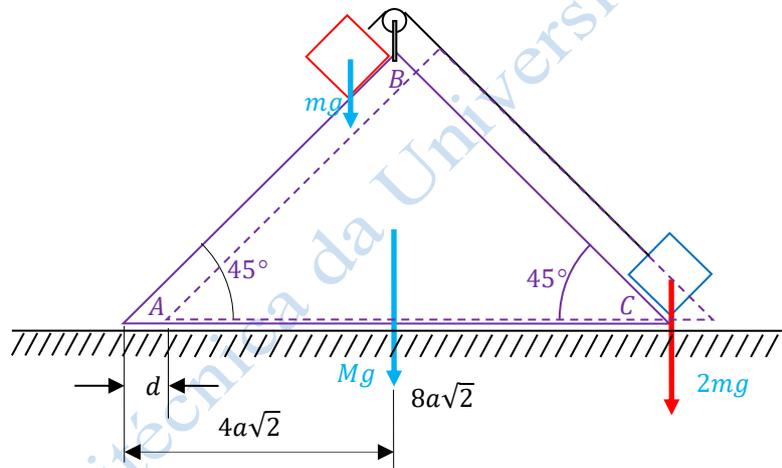


Figura 16. Estado final do sistema material composto por um prisma de massa M e por dois cubos de massas m e $2m$.

$$(3m + M)x_G = m \left(4a\sqrt{2} - a \frac{\sqrt{2}}{2} - d \right) + M(4a\sqrt{2} - d) + 2m(8a\sqrt{2} - d)$$

de onde resulta

$$x_G = \frac{m}{M + 3m} \left(4a\sqrt{2} - a \frac{\sqrt{2}}{2} - d \right) + \frac{M}{M + 3m} (4a\sqrt{2} - d) + \frac{2m}{M + 3m} (8a\sqrt{2} - d) \quad (12.2 - 6)$$

Igualando-se as expressões (12.2-5) e (12.2-6) determina-se o deslocamento realizado pelo prisma quando o bloco de massa $2m$ atingir o plano horizontal, ou seja,

$$d = \frac{21ma\sqrt{2}}{2M + 6m} \quad (12.2 - 7)$$

12.3 Dois corpos planos vinculados deslocando-se em seu próprio plano

O enunciado seguinte corresponde ao sistema de corpos rígidos vinculados ilustrado na Fig.17.

Um torque $T = M_2 g R / 4$ é aplicado ao eixo Az do disco de centro A , massa M_1 e raio R , inicialmente em repouso. A barra AB , de massa $M_2 = 3M_1/2$ e comprimento $\ell = R\sqrt{5}/2$ tem a extremidade B apoiada no plano horizontal enquanto a outra é articulada em A . Sabendo-se que o disco rola sem escorregar e que o coeficiente de atrito entre a barra e o plano horizontal é $\mu = 0,5$, pede-se determinar: (a) a aceleração angular do disco; (b) as forças atuantes na barra AB e no disco.

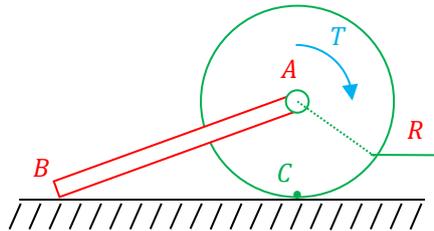


Figura 17. Movimento plano de disco vinculado a uma barra articulada em seu centro.

Para resolver o problema enunciado acima, adotaremos o ferramental da Estática, ou seja, construiremos os diagramas de corpo livre do disco (Fig.18-a) e da barra (Fig.18-b) e, tomando-os por referência, escreveremos as equações do movimento desses corpos, baseadas no Teorema da Resultante e no Teorema do Momento da Quantidade de Movimento. Acrescentaremos a esse conjunto de equações os vínculos cinemáticos que restringem os movimentos da barra e do disco e introduziremos as leis de atrito de escorregamento onde forem pertinentes. Ao final, resolveremos o sistema de equações resultante de modo a responder às questões propostas.

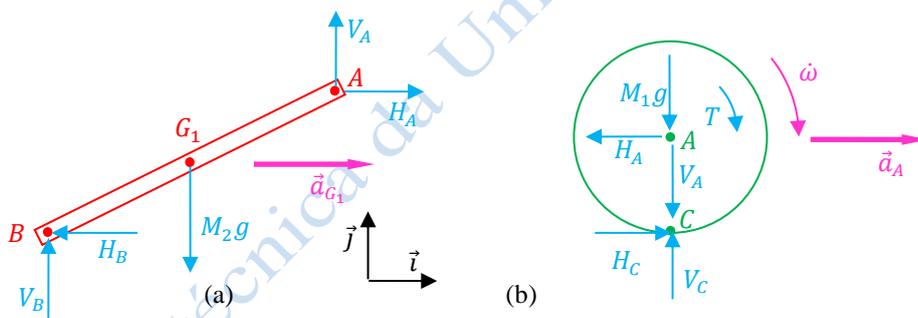


Figura 18. Diagrama de corpo livre: (a) da barra; (b) do disco.

Para a barra AB , o Teorema da Resultante fornece as seguintes equações:

$$H_A - H_B = M_2 a_{G_1} \quad (12.3 - 1)$$

$$V_A + H_B - M_2 g = 0 \quad (12.3 - 2)$$

Aplicando-se o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento à barra AB , referente ao polo B , obtém-se:

$$(G_1 - B) \wedge M_2 \vec{a}_B + J_{Bz} \dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_B \quad (12.3 - 3)$$

Como a barra realiza movimento de translação tem-se:

$$\begin{aligned}\omega &= 0 \\ \dot{\omega} &= 0\end{aligned}\quad (12.3 - 4)$$

Notando-se que o comprimento do lado BC do triângulo ABC vale

$$\ell = \sqrt{\left(\frac{R\sqrt{5}}{2}\right)^2 - R^2} = \frac{R}{2}\quad (12.3 - 5)$$

a equação do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento para a barra AB adquire a forma

$$\left(\frac{R}{4}\vec{i} + \frac{R}{2}\vec{j}\right) \wedge M_2 a_{G_1} \vec{i} = \left(-H_A R - M_2 g \frac{R}{4} + V_A \frac{R}{2}\right) \vec{k}$$

resultando

$$H_A + \frac{1}{4} M_2 g - \frac{1}{2} V_A = \frac{1}{2} M_2 a_{G_1}\quad (12.3 - 6)$$

Considerando-se, a seguir, o diagrama de corpo livre do disco, a aplicação do Teorema do Resultante fornece as equações:

$$H_C - H_A = M_1 a_A\quad (12.3 - 7)$$

$$V_C - M_1 g - V_A = 0\quad (12.3 - 8)$$

Por sua vez, o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento, aplicado ao polo C , dá origem à equação

$$J_{Cz}(-\dot{\omega}) = -T + H_A R$$

resultando

$$J_{Cz} \dot{\omega} = T - H_A R\quad (12.3 - 9)$$

A equação cinemática que vincula o movimento da barra ao do disco é

$$a_{G_1} = a_A\quad (12.3 - 10)$$

enquanto que a que vincula o movimento do disco à pista, é

$$a_A = \dot{\omega} R\quad (12.3 - 11)$$

uma vez que C coincide com o centro instantâneo de rotação do disco e o ponto A descreve uma trajetória retilínea segundo a direção horizontal.

Finalmente, utilizamos as leis de atrito de deslizamento para expressar a força horizontal de contacto da barra com a pista:

$$H_B = \mu V_B = 0,5 V_B\quad (12.3 - 12)$$

Dessa forma, obtém-se um sistema de 9 equações linearmente independentes a 9 incógnitas, a saber:

$$H_A, V_A, H_B, V_B, H_C, V_C, a_{G_1}, a_A, \dot{\omega}$$

sistema esse que, uma vez resolvido, produz os seguintes resultados:

$$\dot{\omega} = \frac{M_2 g}{6(2M_1 + M_2)R}\quad (12.3 - 13)$$

$$a_A = a_{G_1} = \frac{M_2 g}{6(2M_1 + M_2)}\quad (12.3 - 14)$$

$$\vec{H}_A = \left[\frac{M_2 g}{8} + \frac{3M_2^2 g}{8(6M_1 + 3M_2)} \right] \vec{i} + \left[\frac{3M_2 g}{4} + \frac{M_2^2 g}{4(6M_1 + 3M_2)} \right] \vec{j} \quad (12.3 - 15)$$

$$\vec{H}_B = \left[\frac{M_2 g}{8} - \frac{M_2^2 g}{8(6M_1 + 3M_2)} \right] \vec{i} + \left[\frac{M_2 g}{4} - \frac{M_2^2 g}{4(6M_1 + 3M_2)} \right] \vec{j} \quad (12.3 - 16)$$

$$\vec{H}_C = \left[\frac{M_2 g}{8} + \frac{3M_2^2 g}{8(6M_1 + 3M_2)} + \frac{M_1 M_2 g}{6(2M_1 + M_2)} \right] \vec{i} + \left[M_1 g + \frac{3M_2 g}{4} + \frac{M_2^2 g}{4(6M_1 + 3M_2)} \right] \vec{j} \quad (12.3 - 17)$$

É importante frisar que (12.3-13) e (12.3-14) são as duas equações diferenciais que governam o movimento do sistema do disco e da barra. Note-se que ambas as acelerações angular e linear são constantes, ou seja, o disco irá realizar movimento circular uniformemente acelerado e o seu centro de massa irá realizar movimento retilíneo uniformemente acelerado.

12.4 Ruptura abrupta de vínculo que mantém corpo rígido em equilíbrio

A barra homogênea AB , de massa m e comprimento ℓ , é articulada em A e sustentada por uma corda BC na extremidade B , conforme indicado na Fig.19. Determinar o valor da reação na extremidade A no instante preciso em que se corta a corda BC .

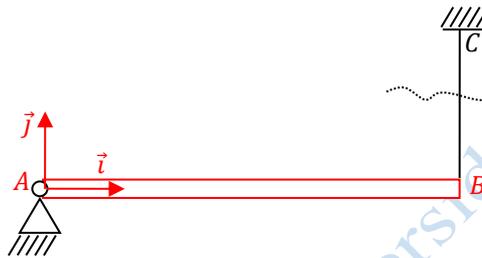


Figura 19. Movimento de corpo imediatamente após a ruptura de um vínculo que o mantinha em equilíbrio.

Tomando-se por referência o diagrama de corpo livre da barra AB (Fig.20), correspondente ao instante de ruptura do vínculo BC , escrevemos as equações que governam o seu movimento, a saber:

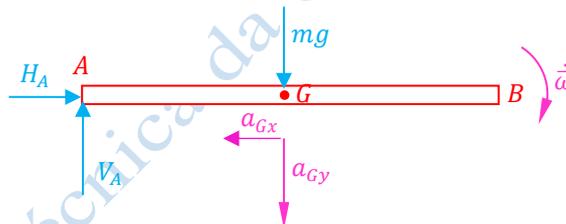


Figura 20. Diagrama de corpo livre da barra AB .

$$H_A = -ma_{Gx} \quad (12.4 - 1)$$

$$V_A - mg = -ma_{Gy} \quad (12.4 - 2)$$

$$M_A = -mg \frac{\ell}{2} = -J_{Az} \dot{\omega} = -\frac{m\ell^2}{3} \dot{\omega} \quad (12.4 - 3)$$

Da equação (12.4-3) obtém-se

$$\dot{\omega} = \frac{3g}{2\ell} \quad (12.4 - 4)$$

Cabendo notar que, na expressão acima, o sinal de $\dot{\omega}$ é concordante com o indicado na Fig.20, ou seja

$$\dot{\vec{\omega}} = -\frac{3g}{2\ell} \vec{k} \quad (12.4 - 5)$$

Como, no instante considerado, a velocidade angular da barra AB é

$$\omega = 0 \quad (12.4 - 6)$$

vê-se, claramente, que a barra realiza um ato instantâneo de repouso.

Assim, a aceleração do centro de massa da barra é dada por:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\omega} \vec{k} \wedge (G - A) + \omega \vec{k} \wedge [\omega \vec{k} \wedge (G - O)] = -\frac{3g}{2\ell} \vec{k} \wedge \frac{\ell}{2} \vec{i} = -\frac{3g}{4} \vec{j} \quad (12.4 - 7)$$

Introduzindo-se (12.4-7) em (12.4-1) e (12.4-2) obtêm-se as componentes da reação em A :

$$V_A - mg = -m \frac{3g}{4} \Rightarrow V_A = \frac{mg}{4} \quad (12.4 - 8)$$

$$H_A = 0 \quad (12.4 - 9)$$

É importante frisar que, uma vez rompido o vínculo que mantinha a barra em equilíbrio, essa passará a realizar um movimento pendular em torno do ponto A .

13. Movimento de um sólido de revolução

Neste tópico examinaremos o caso em o que o corpo rígido \mathcal{S} se assimila a um sólido de revolução com densidade homogênea. Na Fig.21, mostra-se um tal corpo, bem como 3 sistemas de referência, a saber:

- $OXYZ$, sistema de referência fixo;
- $Gx_a y_a z_a$, sistema de referência arrastante, apresentando as seguintes características: a) móvel em relação a $OXYZ$; b) ligado ao centro de massa G ; c) o eixo y_a sempre coincide com o eixo de simetria de \mathcal{S} ; d) os eixos desse sistema **não** são solidários a \mathcal{S} ;
- $Gxyz$, sistema de referência móvel em relação a $OXYZ$ e **solidário** ao sólido de revolução \mathcal{S} .

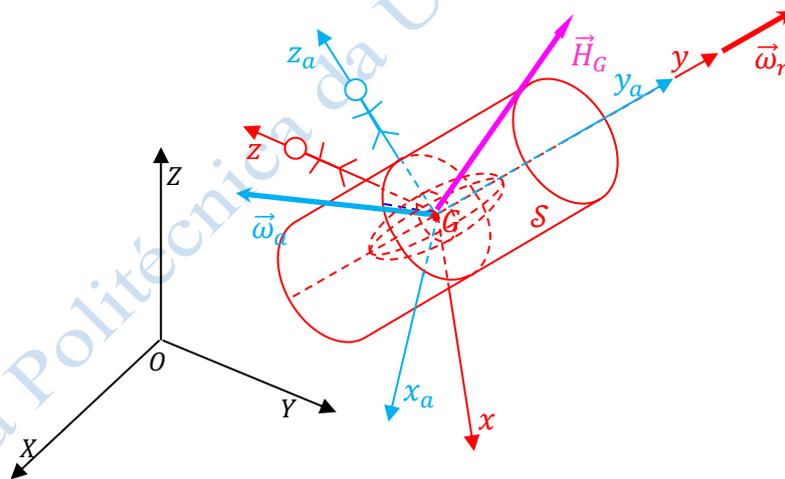


Figura 21. Movimento de sólido de revolução.

Na mesma figura, os vetores rotação indicados correspondem a:

- $\vec{\omega}_a$, vetor rotação do sistema de referência arrastante (logo, exercendo o papel de **vetor rotação de arrastamento** do corpo), pertencente ao plano $Gx_a z_a \perp y$, tal que, ao longo do movimento, os eixos y_a e y sempre coincidem.
- $\vec{\omega}_r$, vetor rotação do corpo relativamente ao referencial arrastante $Gx_a y_a z_a$; trata-se, portanto, do **vetor rotação relativa** do corpo.

É importante observar que, devido ao fato de o sólido ser de revolução e ter densidade homogênea, o elipsoide de inércia do corpo é de revolução, com eixo de simetria coincidente com o do corpo. Portanto, sua seção pelo plano $Gx_a z_a$ é uma circunferência (Fig.22), de modo que, ao longo dos eixos radiais Gx_a , Gz_a , Gx , Gz , bem como de quaisquer outros eixos $G\vec{u}$ contidos no plano $Gx_a z_a$, o momento de inércia é invariante para um observador ligado a $Gx_a y_a z_a$.

Feitas as considerações anteriores, retomemos, agora, o problema de obter a derivada do vetor \vec{H}_G em relação ao referencial fixo $OXYZ$. Conforme já discutido anteriormente, pelo fato de esse vetor ser descrito como

$$[H_G] = [J_G][\omega] \quad (13 - 1)$$

é essencial que se utilizem dois sistemas de referência, um fixo, $OXYZ$, e outro móvel, tal que, para um observador ligado a esse referencial móvel, $[J_G]$ seja invariante no tempo.

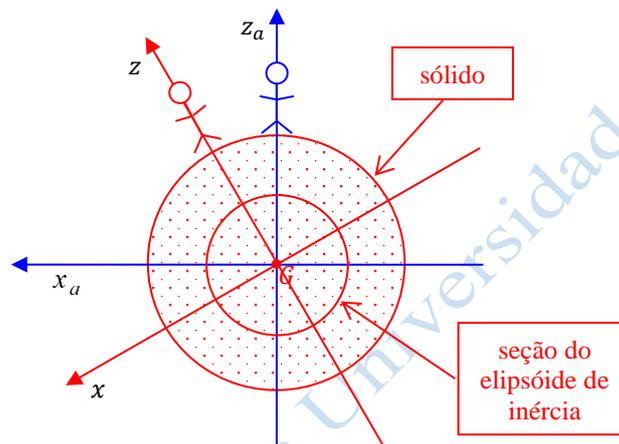


Figura 22. Seção radial do elipsoide de inércia de \mathcal{S} , vista por observadores ligados a $Gx_a y_a z_a$ e a $Gxyz$.

Até então vínhamos utilizando como referencial móvel um referencial $Gxyz$ solidário ao corpo, de modo que, nessas condições, o teorema do momento da quantidade de movimento se expressava como:

$$\left. \frac{d\vec{H}_G}{dt} \right|_{OXYZ} = \left. \frac{d\vec{H}_G}{dt} \right|_{Gxyz} + \vec{\omega} \wedge \vec{H}_G = [J_G][\dot{\omega}] + \vec{\omega} \wedge \{[J_G][\omega]\} \quad (13 - 2)$$

em que

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_a + \omega_r \quad (13 - 3)$$

é o vetor rotação absoluta do corpo, e, portanto, do referencial $Gxyz$ a ele solidário.

No entanto, em se tratando de um sólido de revolução, vimos que a matriz de inércia $[J_G]$ permanece invariante para um observador solidário a um referencial arrastante $Gx_a y_a z_a$ com as propriedades enumeradas no início deste tópico. Dessa forma, podemos descrever o vetor \vec{H}_G no

referencial arrastante $Gx_a y_a z_a$ e aplicar a fórmula (5-4) para derivá-lo em relação ao referencial fixo $GXYZ$. Assim procedendo, obtém-se:

$$\left. \frac{d\vec{H}_G}{dt} \right|_{OXYZ} = \left. \frac{d\vec{H}_G}{dt} \right|_{Gx_a y_a z_a} + \vec{\omega}_a \wedge \vec{H}_G \quad (13 - 4)$$

Como

$$\left. \frac{d\vec{H}_G}{dt} \right|_{OXYZ} = \vec{M}_G \quad (13 - 5)$$

resulta

$$\vec{M}_G = \left. \frac{d\vec{H}_G}{dt} \right|_{Gx_a y_a z_a} + \vec{\omega}_a \wedge \vec{H}_G \quad (13 - 6)$$

A equação (13-6) expressa o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento de um corpo rígido \mathcal{S} para os casos em que \mathcal{S} é um sólido de revolução com densidade homogênea e o referencial móvel $Gx_a y_a z_a$ adotado não é rigidamente ligado ao corpo, mantendo-se vinculado a esse apenas pela coincidência de um de seus eixos com o eixo de simetria de \mathcal{S} . Alguns autores chamam às componentes da equação vetorial (13-6) de **equações de Euler modificadas**. Conforme veremos no exemplo do próximo tópico, o grau de complexidade dessas equações é bem menor do que o das **equações de Euler** tradicionais (componentes escalares da equação vetorial (13-2)).

14. Exemplo de aplicação do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento para um sólido homogêneo de revolução realizando movimento geral

Conforme ilustrado na Fig.23, um disco de massa m e raio r gira em torno do eixo \overline{OG} do suporte $ABOG$ ($\overline{OG} = \ell$), com velocidade angular ω_r de módulo constante, ao mesmo tempo em que $ABOG$ gira com velocidade angular ω_a constante em torno do eixo \overline{AB} . Determinar os esforços reativos aplicados ao disco e ao suporte $ABOG$.

Para calcularmos as reações nos mancais do disco e do suporte aplicaremos a ambos o Teorema da Resultante e o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento.

Para tanto, se faz necessário construir os diagramas de corpo livre desses sólidos (Fig.24).

Notando que o disco é um sólido homogêneo de revolução, aplicaremos o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento na forma (13-6), válida exatamente para esses casos. Assim sendo, expressaremos os vetores rotação $\vec{\omega}$ e \vec{H}_G do disco, bem como sua matriz de inércia $[J_G]$ no referencial arrastante $Gx_1 y_1 z_1$.

O vetor rotação instantânea do disco se expressa como

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_a + \vec{\omega}_r = \omega_a \vec{k}_1 + \omega_r \vec{j}_1 \quad (14 - 1)$$

A matriz de inércia do disco no polo G é:

$$[J_G] = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4} \end{bmatrix} \quad (14 - 2)$$

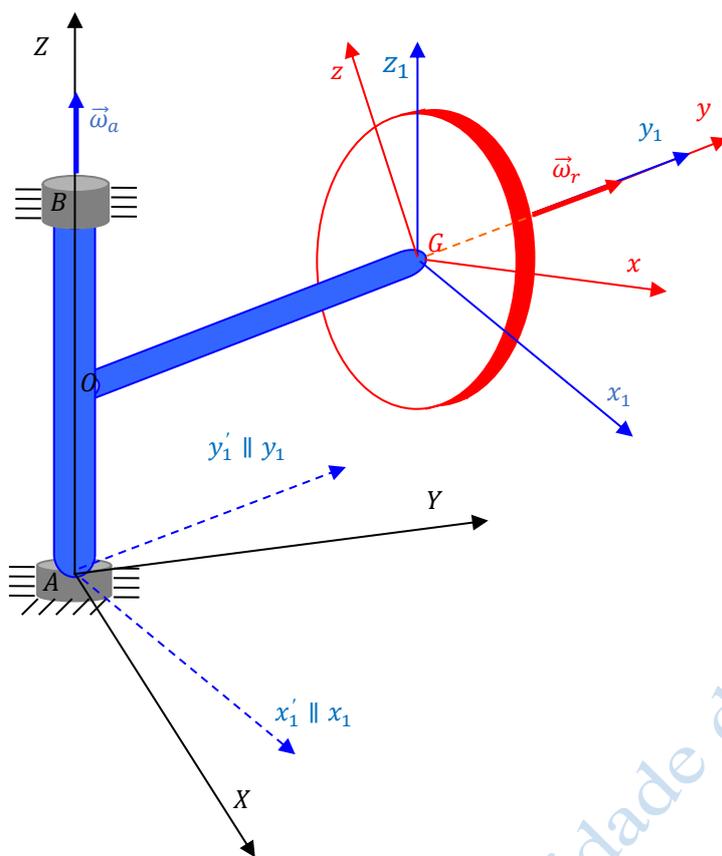


Figura 23. Disco girando em torno de eixo ligado a haste giratória.

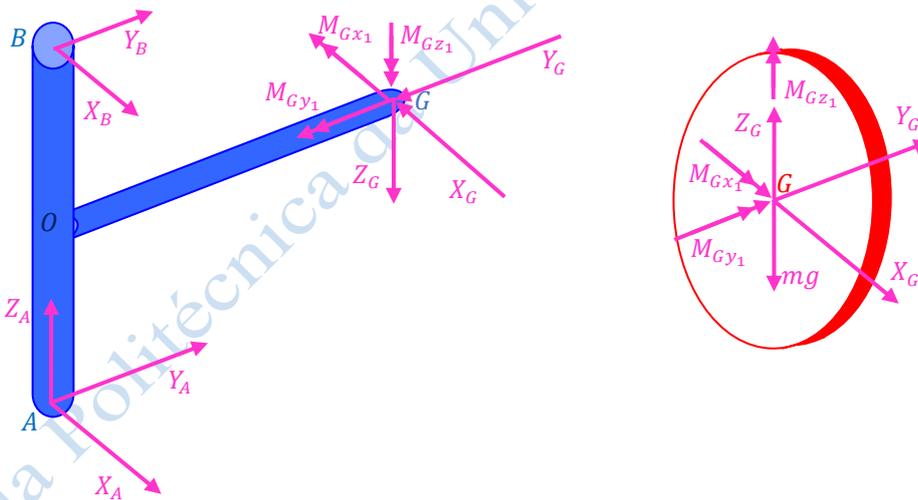


Figura 24. Diagramas e corpo livre do disco e da haste $ABOG$.

O momento da quantidade de movimento do corpo no polo G é:

$$\vec{H}_G = [J_G][\omega] = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_r \\ \omega_a \end{bmatrix} = \frac{mr^2}{2} \omega_r \vec{j}_1 + \frac{mr^2}{4} \omega_a \vec{k}_1 \quad (14-3)$$

De acordo com o enunciado do problema,

$$\begin{aligned} |\omega_a| &= \text{const} \\ |\omega_r| &= \text{const} \end{aligned} \quad (14-4)$$

Portanto, para um observador rigidamente ligado ao suporte $ABOG$, o vetor \vec{H}_G é invariante. Na Fig.25 ilustra-se esse ponto.

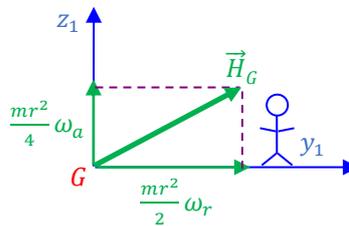


Figura 25. Invariância do vetor \vec{H}_G para um observador ligado ao referencial arrastante.

Aplicaremos, em seguida, a equação do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento para sólidos homogêneos e de revolução (Eq.13-6), ou seja:

$$\vec{M}_G = \frac{d\vec{H}_G}{dt} \Big|_{OXYZ} = \frac{d\vec{H}_G}{dt} \Big|_{Ox_1y_1z_1} + \vec{\omega}_a \wedge \vec{H}_G \quad (14-5)$$

Como

$$\frac{d\vec{H}_G}{dt} \Big|_{Ox_1y_1z_1} = \vec{0} \quad (14-6)$$

conforme ilustrado na Fig.25, obtém-se:

$$\vec{M}_G = \vec{\omega}_a \wedge \vec{H}_G = \omega_a \vec{k}_1 \wedge \left(\frac{mr^2}{2} \omega_r \vec{j}_1 + \frac{mr^2}{4} \omega_a \vec{k}_1 \right) = -\frac{mr^2}{2} \omega_a \omega_r \vec{i}_1 \quad (14-7)$$

O momento resultante no polo G calculado acima corresponde ao binário externo aplicado pelo suporte ao disco, possibilitando-o girar com velocidade angular ω_r em torno de seu eixo de simetria (y) ao mesmo tempo em que o suporte gira com velocidade angular ω_a em torno do eixo vertical (Z). O referido momento opera como um binário sobre o disco, sendo denominado de **binário giroscópico ativo**.

Para calcular as reações no mancal que liga o disco ao suporte, aplicamos o Teorema da Resultante, ou seja:

$$X_G \vec{i} + Y_G \vec{j} + Z_G \vec{k} - mg \vec{k} = m \vec{a}_G \quad (14-8)$$

onde a aceleração de G é dada por:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{\omega}_a \wedge (G - O) + \vec{\omega}_a \wedge [\vec{\omega}_a \wedge (G - O)] = \omega_a \vec{k} \wedge [\omega_a \vec{k} \wedge \ell \vec{j}] = -\omega_a^2 \ell \vec{j} \quad (14-9)$$

De (14-8) e (14-9), resulta:

$$X_G \vec{i} + Y_G \vec{j} + (Z_G - mg) \vec{k} = -m\omega_a^2 \ell \vec{j} \quad (14 - 10)$$

Da equação vetorial anterior resultam:

$$\begin{aligned} X_G &= 0 \\ Y_G &= -m\omega_a^2 \ell \\ Z_G &= mg \end{aligned} \quad (14 - 11)$$

Considerando-se agora o diagrama de corpo livre do suporte e lembrando que, de acordo com o enunciado do problema, sua massa é desprezível, o teorema da resultante fornece:

$$(X_A + X_B - X_G) \vec{i} + (Y_A + Y_B - Y_G) \vec{j} + (Z_A - Z_G) \vec{k} = \vec{0} \quad (14 - 12)$$

Decompondo-se a equação vetorial acima em suas componentes e fazendo-se as substituições convenientes, obtêm-se:

$$\begin{aligned} X_A + X_B &= 0 \\ Y_A + Y_B + m\ell\omega_a^2 &= 0 \\ Z_A &= mg \end{aligned} \quad (14 - 13)$$

Notando que a matriz de inércia do suporte é nula, a aplicação do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento no polo O do suporte fornece:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= (A - O) \wedge (X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} + Z_A \vec{k}) + (B - O) \wedge (X_B \vec{i} + Y_B \vec{j}) + (G - O) \wedge (-X_G \vec{i} - Y_G \vec{j} - Z_G \vec{k}) \\ &\quad + (-M_{Gx} \vec{i} - M_{Gy} \vec{j} - M_{Gz} \vec{k}) = \vec{0} \end{aligned} \quad (14 - 14)$$

Desenvolvendo-se a expressão acima, tem-se:

$$\vec{M}_O = -\frac{\ell}{2} \vec{k} \wedge (X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} + mg \vec{k}) + \frac{\ell}{2} \vec{k} \wedge (X_B \vec{i} + Y_B \vec{j}) + \ell \vec{j} \wedge (m\ell\omega_a^2 \vec{j} - mg \vec{k}) + \frac{mr^2}{2} \omega_a \omega_r \vec{i} = \vec{0} \quad (14 - 15)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} Y_A \frac{\ell}{2} - Y_B \frac{\ell}{2} - mg\ell + \frac{mr^2}{2} \omega_a \omega_r &= 0 \\ -X_A \frac{\ell}{2} + X_B \frac{\ell}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (14 - 16)$$

Resolvendo-se o sistema de equações (14-13) e (14-16), obtêm-se

$$\begin{aligned} X_A &= 0 \\ X_B &= 0 \\ Y_A &= mg - \frac{m}{2} \ell \omega_a^2 - \frac{m}{2} \frac{r^2}{\ell} \omega_a \omega_r \\ Y_B &= -mg - \frac{m}{2} \ell \omega_a^2 + \frac{m}{2} \frac{r^2}{\ell} \omega_a \omega_r \\ Z_A &= mg \end{aligned} \quad (14 - 17)$$

É importante realçar que esse problema poderia ser igualmente resolvido aplicando-se o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento na forma tradicional, válida para qualquer corpo, independentemente de se tratar de um sólido de revolução ou não. Embora tal solução conduza a um maior número de cálculos, utilizaremos esse método a seguir, com o propósito meramente pedagógico.

Adotando-se, portanto, um sistema de eixos $Gxyz$ ligados ao disco (Fig.26), notemos que o vetor rotação instantâneo do disco, descrito nesse sistema de eixos, é dado por:

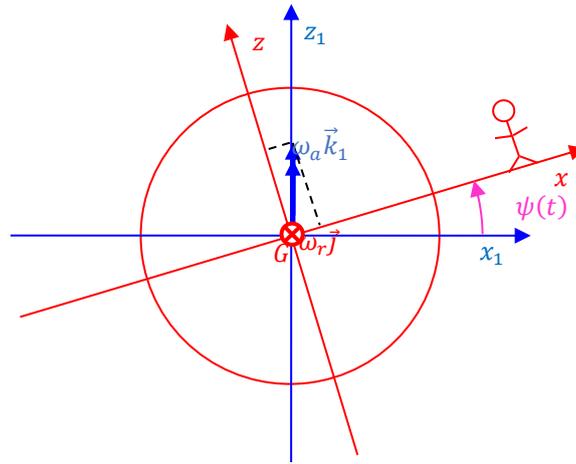


Figura 26. Descrição do movimento do disco no sistema de eixos $Gxyz$ a ele solidário.

$$\vec{\omega} = \omega_a \vec{k}_1 + \omega_r \vec{j} = \omega_a \sin \psi(t) \vec{i} + \omega_a \cos \psi(t) \vec{k} + \omega_r \vec{j} \quad (14 - 18)$$

Dessa forma, a variação temporal de $\vec{\omega}$, observada por um observador ligado ao disco, é:

$$\dot{\vec{\omega}} = \omega_a \cos \psi(t) \dot{\psi} \vec{i} - \omega_a \sin \psi(t) \dot{\psi} \vec{k} \quad (14 - 19)$$

Notemos, porém, que

$$\dot{\psi} = -\omega_r \quad (14 - 20)$$

pois o **observador ligado ao disco julga encontrar-se parado** observando o versor \vec{k}_1 girar no **sentido horário**, de modo que

$$\dot{\vec{\omega}} = \omega_a \omega_r \{-\cos \psi(t) \vec{i} + \sin \psi(t) \vec{k}\} \quad (14 - 21)$$

É importante observar que a expressão acima corresponde exatamente à assim chamada **aceleração rotacional complementar** ou seja:

$$\dot{\vec{\omega}} = \vec{\omega}_a \wedge \vec{\omega}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_a \sin \psi(t) & 0 & \omega_a \cos \psi(t) \\ 0 & \omega_r & 0 \end{vmatrix}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = -\omega_a \omega_r \cos \psi(t) \vec{i} + \omega_a \omega_r \sin \psi(t) \vec{k} = \omega_a \omega_r \{-\cos \psi(t) \vec{i} + \sin \psi(t) \vec{k}\} \quad (14 - 22)$$

(Cabe aqui um comentário: na dedução original da fórmula da aceleração complementar $\vec{\omega}_c$, admitia-se que $\vec{\omega}_c$ descrevia a variação angular do vetor rotação relativo $\vec{\omega}_r$ devida ao vetor rotação de arrastamento $\vec{\omega}_a$, de modo que $\vec{\omega}_c = \vec{\omega}_a \wedge \vec{\omega}_r$, mas no presente caso, $\vec{\omega}_c$ representa exatamente o **oposto**, ou seja, a variação angular do vetor rotação relativo $\vec{\omega}_a$ devida ao vetor rotação de arrastamento $\vec{\omega}_r$. Em outras palavras, se se utilizasse no presente caso o mesmo formalismo adotado na dedução **original** da fórmula de $\vec{\omega}_c$ chegaríamos à expressão $\vec{\omega}_c = \vec{\omega}_r \wedge \vec{\omega}_a$).

Feitas as considerações anteriores, a variação do momento da quantidade de movimento do disco no polo G , do ponto de vista do observador ligado ao disco, é dada por:

$$\left. \frac{d\vec{H}_G}{dt} \right|_{Gxyz} = [J_G][\dot{\omega}] = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\omega_a \omega_r \cos \psi(t) \\ 0 \\ \omega_a \omega_r \sin \psi(t) \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\left. \frac{d\vec{H}_G}{dt} \right|_{Gxyz} = \frac{mr^2}{4} \omega_a \omega_r \{-\cos \psi(t)\vec{i} + \sin \psi(t)\vec{k}\} \quad (14 - 23)$$

Já a parcela da variação do momento da quantidade de movimento em G decorrente da variação da orientação do sistema $Gxyz$ em relação ao referencial fixo é dada por:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{H}_G = \vec{\omega} \wedge \{[J]_{Gxyz}[\omega]_{Gxyz}\}$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge \vec{H}_G &= [\omega_a \sin \psi(t)\vec{i} + \omega_a \cos \psi(t)\vec{k} + \omega_r \vec{j}] \wedge \left\{ \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_a \sin \psi(t) \\ \omega_r \\ \omega_a \cos \psi(t) \end{bmatrix} \right\} \\ &= [\omega_a \sin \psi(t)\vec{i} + \omega_a \cos \psi(t)\vec{k} + \omega_r \vec{j}] \\ &\quad \wedge \left[\frac{mr^2}{4} \omega_a \sin \psi(t)\vec{i} + \frac{mr^2}{2} \omega_r \vec{j} + \frac{mr^2}{4} \omega_a \cos \psi(t)\vec{k} \right] \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_a \sin \psi(t) & \omega_r & \omega_a \cos \psi(t) \\ \frac{mr^2}{4} \omega_a \sin \psi(t) & \frac{mr^2}{2} \omega_r & \frac{mr^2}{4} \omega_a \cos \psi(t) \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{mr^2}{4} \omega_a \omega_r \cos \psi(t)\vec{i} + \frac{mr^2}{4} \omega_a \omega_r \sin \psi(t)\vec{k} \end{aligned} \quad (14 - 24)$$

Assim, da equação do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento em G , ou seja,

$$\vec{M}_G = [J_G][\dot{\omega}] + \vec{\omega} \wedge \{[J_G][\omega]\}$$

obtem-se:

$$\begin{aligned} \vec{M}_G &= \frac{mr^2}{4} \omega_a \omega_r \{-\cos \psi(t)\vec{i} + \sin \psi(t)\vec{k}\} - \frac{mr^2}{4} \omega_a \omega_r \cos \psi(t)\vec{i} + \frac{mr^2}{4} \omega_a \omega_r \sin \psi(t)\vec{k} \\ &= \frac{mr^2}{2} \omega_a \omega_r \{-\cos \psi(t)\vec{i} + \sin \psi(t)\vec{k}\} \end{aligned} \quad (14 - 25)$$

Comparando-se esse resultado com a expressão (14-7), ou seja,

$$\vec{M}_G = -\frac{mr^2}{2} \omega_a \omega_r \vec{i}_1$$

vemos que ambos são equivalentes, uma vez que o versor \vec{i}_1 , expresso no sistema de eixos $Gxyz$, é:

$$\vec{i}_1 = (\vec{i}_1 \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{i}_1 \cdot \vec{j})\vec{j} = \cos \psi(t)\vec{i} + \cos(90^\circ + \psi(t))\vec{j} = \cos \psi(t)\vec{i} - \sin \psi(t)\vec{j} \quad (14 - 26)$$

ou seja,

$$\vec{M}_G = -\frac{mr^2}{2} \omega_a \omega_r \{ \cos \psi(t)\vec{i} - \sin \psi(t)\vec{j} \} \Big|_{Gxyz} = -\frac{mr^2}{2} \omega_a \omega_r \vec{i}_1 \Big|_{Gx_1y_1z_1} \quad (14 - 27)$$

15. Movimento de rotação em torno de um eixo fixo

Consideremos um sólido S que gira, sem atrito, em torno de um eixo fixo, apoiado nos pontos A e B sobre mancais (Fig.27). Admitiremos que o mancal A reaja a esforços radiais e axiais e que o mancal B reaja apenas a esforços radiais. Admitiremos ainda que o sistema de eixos $Oxyz$ ligados ao sólido seja tal que Ox passe pelo centro de massa G do sólido, e suporemos que todas as características geométricas e mecânicas do sólido sejam conhecidas a priori, a saber:

- massa m
- centro de massa $G = (x_G, y_G, z_G) = (x_G, 0, 0)$
- matriz de inércia em O descrita em $Oxyz$: $[J_O]$
- distâncias $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$

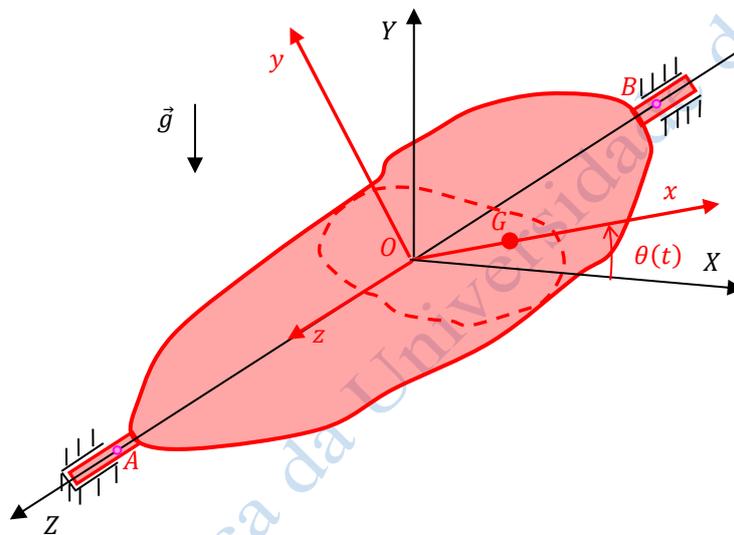


Figura 27. Corpo rígido girando em torno de um eixo fixo.

Para facilitar a escrita das equações do movimento desse corpo, utilizaremos o diagrama de corpo livre da Fig.28.

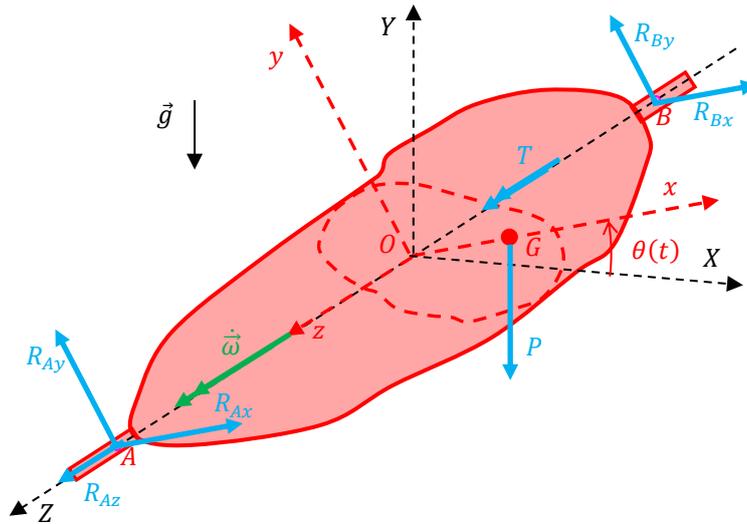


Figura 28. Diagrama de corpo livre de um corpo que realiza movimento em torno de um eixo fixo.

O Teorema da Resultante se escreve como:

$$\vec{P} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = m\vec{a}_G \quad (15-1)$$

em que a aceleração do centro de massa é dada por

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\omega}\vec{k} \wedge (G - O) + \omega\vec{k} \wedge [\omega\vec{k} \wedge (G - O)] = \vec{0} + \dot{\omega}\vec{k} \wedge x_G\vec{i} + \omega\vec{k} \wedge [\omega\vec{k} \wedge x_G\vec{i}]$$

ou seja,

$$\vec{a}_G = \dot{\omega}x_G\vec{j} - \omega^2x_G\vec{i} \quad (15-2)$$

O peso do corpo, descrito no sistema de eixos $Oxyz$, é dado por

$$\vec{P} = -P\vec{j} = -P[(\vec{j} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{j} \cdot \vec{j})\vec{j}] = -P[\cos(90 - \theta)\vec{i} + \cos\theta\vec{j}] = -P \sin\theta\vec{i} - P \cos\theta\vec{j} \quad (15-3)$$

e as reações em A e B são dadas, respectivamente, por

$$\vec{R}_A = R_{Ax}\vec{i} + R_{Ay}\vec{j} + R_{Az}\vec{k} \quad (15-4)$$

e

$$\vec{R}_B = R_{Bx}\vec{i} + R_{By}\vec{j} \quad (15-5)$$

Substituindo-se (15-2) a (15-5) na expressão do Teorema da Resultante (15-1), tem-se:

$$-P \sin\theta\vec{i} - P \cos\theta\vec{j} + R_{Ax}\vec{i} + R_{Ay}\vec{j} + R_{Az}\vec{k} + R_{Bx}\vec{i} + R_{By}\vec{j} = m(\dot{\omega}x_G\vec{j} - \omega^2x_G\vec{i}) \quad (15-6)$$

Decompondo-se a equação vetorial acima em suas componentes, chega-se a:

$$\begin{aligned} -P \sin\theta + R_{Ax} + R_{Bx} &= -m\omega^2x_G \\ -P \cos\theta + R_{Ay} + R_{By} &= m\dot{\omega}x_G \\ R_{Az} &= 0 \end{aligned} \quad (15-7)$$

Aplicamos, a seguir, o Teorema do Momento da Quantidade de movimento adotando O como polo:

$$\vec{M}_O = [J_O][\dot{\omega}] + \vec{\omega} \wedge \{[J_O][\omega]\} \quad (15-8)$$

Desenvolvendo-se a expressão anterior, tem-se:

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= \begin{bmatrix} J_{Ox} & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oxy} & J_{Oy} & -J_{Oyz} \\ -J_{Oxz} & -J_{Oyz} & J_{Oz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \omega \vec{k} \wedge \left\{ \begin{bmatrix} J_{Ox} & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oxy} & J_{Oy} & -J_{Oyz} \\ -J_{Oxz} & -J_{Oyz} & J_{Oz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \right\} \\ \Rightarrow \vec{M}_O &= -J_{Oxz} \dot{\omega} \vec{i} - J_{Oyz} \dot{\omega} \vec{j} + J_{Oz} \dot{\omega} \vec{k} + \omega \vec{k} \wedge (-J_{Oxz} \omega \vec{i} - J_{Oyz} \omega \vec{j} + J_{Oz} \omega \vec{k}) \\ \Rightarrow \vec{M}_O &= -J_{Oxz} \dot{\omega} \vec{i} - J_{Oyz} \dot{\omega} \vec{j} + J_{Oz} \dot{\omega} \vec{k} - J_{Oxz} \omega^2 \vec{j} + J_{Oyz} \omega^2 \vec{i} \\ \Rightarrow \vec{M}_O &= (-J_{Oxz} \dot{\omega} + J_{Oyz} \omega^2) \vec{i} - (J_{Oyz} \dot{\omega} + J_{Oxz} \omega^2) \vec{j} + J_{Oz} \dot{\omega} \vec{k}\end{aligned}\quad (15 - 9)$$

em que o momento das forças externas em O é dado por:

$$\vec{M}_O = (A - O) \wedge \vec{R}_A + (B - O) \wedge \vec{R}_B + (G - O) \wedge \vec{P} + \vec{T} \quad (15 - 10)$$

Desenvolvendo-se a expressão anterior, tem-se:

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= a \vec{k} \wedge (R_{Ax} \vec{i} + R_{Ay} \vec{j} + R_{Az} \vec{k}) - b \vec{k} \wedge (R_{Bx} \vec{i} + R_{By} \vec{j}) + x_G \vec{i} \wedge (-P \sin \theta \vec{i} - P \cos \theta \vec{j}) + T \vec{k} \\ \Rightarrow \vec{M}_O &= a R_{Ax} \vec{j} - a R_{Ay} \vec{i} - b R_{Bx} \vec{j} + b R_{By} \vec{i} - x_G P \cos \theta \vec{k} + T \vec{k} \\ \Rightarrow \vec{M}_O &= (-a R_{Ay} + b R_{By}) \vec{i} + (a R_{Ax} - b R_{Bx}) \vec{j} + (T - x_G P \cos \theta) \vec{k}\end{aligned}\quad (15 - 11)$$

Substituindo-se (15-11) em (15-9), obtém-se:

$$\begin{aligned}(-a R_{Ay} + b R_{By}) \vec{i} + (a R_{Ax} - b R_{Bx}) \vec{j} + (T - x_G P \cos \theta) \vec{k} \\ = (-J_{Oxz} \dot{\omega} + J_{Oyz} \omega^2) \vec{i} - (J_{Oyz} \dot{\omega} + J_{Oxz} \omega^2) \vec{j} + J_{Oz} \dot{\omega} \vec{k}\end{aligned}\quad (15 - 12)$$

Decompondo-se a equação vetorial anterior, chega-se a:

$$\begin{aligned}-a R_{Ay} + b R_{By} &= -J_{Oxz} \dot{\omega} + J_{Oyz} \omega^2 \\ R_{Ax} - b R_{Bx} &= -J_{Oyz} \dot{\omega} - J_{Oxz} \omega^2 \\ T - x_G P \cos \theta &= J_{Oz} \dot{\omega}\end{aligned}\quad (15 - 13)$$

Considerando-se que

$$\begin{aligned}\omega &= \dot{\theta} \\ \dot{\omega} &= \ddot{\theta}\end{aligned}\quad (15 - 14)$$

e que as reações nos mancais, assim como o torque externo, sejam variáveis no tempo, podemos escrever as equações (15-7) e (15-13) como:

$$\begin{aligned}R_{Ax}(t) + R_{Bx}(t) &= P \sin \theta - m \dot{\theta}^2(t) x_G \\ R_{Ay}(t) + R_{By}(t) &= P \cos \theta + m \ddot{\theta}(t) x_G \\ R_{Az} &= 0 \\ -a R_{Ay}(t) + b R_{By}(t) &= -J_{Oxz} \ddot{\theta}(t) + J_{Oyz} \dot{\theta}^2(t) \\ a R_{Ax}(t) - b R_{Bx}(t) &= -J_{Oyz} \ddot{\theta}(t) - J_{Oxz} \dot{\theta}^2(t) \\ T(t) - x_G P \cos \theta(t) &= J_{Oz} \ddot{\theta}(t)\end{aligned}\quad (15 - 15)$$

Para se resolver o sistema de equações diferenciais (15-15), adota-se o seguinte procedimento:

- Utilizando-se um método numérico, integra-se a última das equações diferenciais de segunda ordem acima, para uma condição inicial $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ dada.
- Da etapa anterior, determinam-se as funções $\theta = \theta(t)$, $\dot{\theta} = \dot{\theta}(t)$.

- Por meio de diferenciação numérica, determina-se a função $\ddot{\theta} = \ddot{\theta}(t)$.
- Substituem-se nas demais equações diferenciais as funções $\theta = \theta(t)$, $\dot{\theta} = \dot{\theta}(t)$ e $\ddot{\theta} = \ddot{\theta}(t)$.
- Resolvem-se, para cada instante, o sistema de equações algébricas resultante, determinando-se, assim, as funções $R_{Ax} = R_{Ax}(t)$, $R_{Ay} = R_{Ay}(t)$, $R_{Bx} = R_{Bx}(t)$ e $R_{By} = R_{By}(t)$.

16. Análise das equações de movimento de um sólido sob o ponto de vista de D'Alembert

Consideremos um sólido \mathcal{S} realizado movimento o mais geral possível sob a ação de forças externas com resultante \vec{R} e momento resultante \vec{M}_O no pólo O . Conforme ilustrado na Fig.29, sob o ponto de vista de Newton-Euler, essas forças produzem uma quantidade de aceleração \vec{A} e um momento dinâmico \vec{M}_O , de modo que o corpo sofre translação e rotação.

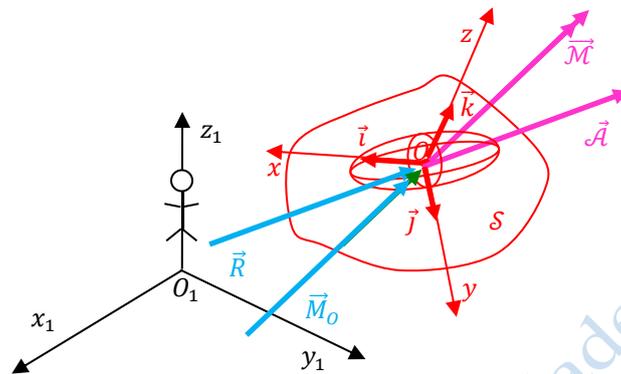


Figura 29. Ponto de vista de Newton-Euler: corpo em movimento de translação e rotação.

Sabemos que, para um observador ligado ao referencial fixo, os vetores \vec{A} e \vec{M}_O são dados, respectivamente, por:

$$\vec{A} = m\vec{a}_G \quad (16 - 1)$$

e

$$\vec{M}_O = (G - O) \wedge m\vec{a}_O + [J_O][\dot{\omega}] + \vec{\omega} \wedge \{[J_O][\omega]\} \quad (16 - 2)$$

Analisemos agora o mesmo problema sob o ponto de vista de D'Alembert, correspondente ao de um observador ligado ao referencial $Oxyz$ solidário a \mathcal{S} (Fig.30). Para um tal observador, \mathcal{S} está em equilíbrio sob a ação de forças externas de resultante \vec{R} e momento resultante \vec{M}_O no pólo O e forças de inércia de resultante $-\vec{A}$ e momento resultante $-\vec{M}_O$ em O .

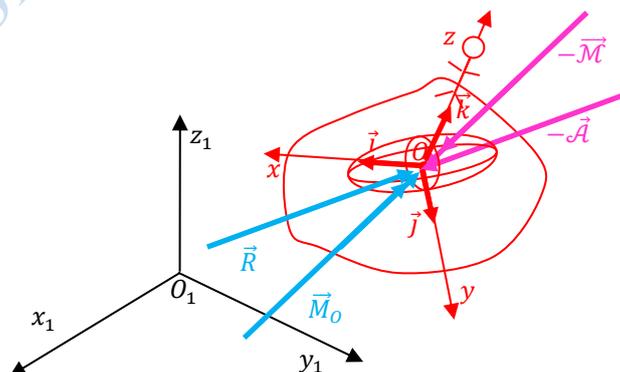


Figura 30. Ponto de vista de D'Alembert: corpo em equilíbrio dinâmico.

Portanto, sob esse ponto de vista, as equações do Teorema da Resultante e do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento se apresentam na forma de equações de equilíbrio, expressas, respectivamente, como:

$$\vec{R} - m\vec{a}_G = \vec{0} \quad (16 - 3)$$

e

$$\vec{M}_O - (G - O) \wedge m\vec{a}_O - [J_O][\dot{\omega}] - \vec{\omega} \wedge \{[J_O][\omega]\} \quad (16 - 4)$$

17. Equilíbrio dinâmico de um sólido que gira em torno de um eixo fixo

Retomemos o problema ilustrado na Fig.28. Adotando-se o ponto de vista de d'Alembert, as equações (15-7) e (15-13) podem ser representadas na forma:

$$\begin{aligned} R_x + R_x^I &= 0 \\ R_y + R_y^I &= 0 \\ R_z + R_z^I &= 0 \\ M_{Ox} + M_{Ox}^I &= 0 \\ M_{Oy} + M_{Oy}^I &= 0 \\ M_{Oz} + M_{Oz}^I &= 0 \end{aligned} \quad (17 - 1)$$

em que o índice superior *I* se refere ao conceito **inercial**.

Portanto, sob o ponto de vista considerado, e seguindo o padrão de (17-1), os esforços **estáticos** presentes nas equações (15-7) e (15-13) correspondem a:

$$\begin{aligned} R_x &= R_{Ax} + R_{Bx} - P \sin \theta \\ R_y &= R_{Ay} + R_{By} - P \cos \theta \\ R_z &= 0 \\ M_{Ox} &= -aR_{Ay} + bR_{By} \\ M_{Oy} &= aR_{Ax} - bR_{Bx} \\ M_{Oz} &= T - Px_G \cos \theta \end{aligned} \quad (17 - 2)$$

ao passo que os esforços **dinâmicos** ou **inerciais** correspondem a:

$$\begin{aligned} R_x^I &= mx_G \dot{\theta}^2 \\ R_y^I &= -mx_G \ddot{\theta} \\ R_z^I &= 0 \\ M_{Ox}^I &= J_{Oxz} \ddot{\theta} - J_{Oyz} \dot{\theta}^2 \\ M_{Oy}^I &= J_{Oyz} \ddot{\theta} + J_{Oxz} \dot{\theta}^2 \\ M_{Oz}^I &= -J_{Oz} \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (17 - 3)$$

Estando definidas as forças e momentos de origem inercial, passaremos agora a identificar as condições necessárias e suficientes para que o sistema de equações (17-3) seja nulo. Em tais condições diz-se que o corpo está em **equilíbrio dinâmico**.

Notemos inicialmente que, se

- $J_{Oxz} = 0$

e

- $J_{Oyz} = 0$

ou seja, se o eixo Oz de rotação for um eixo principal de inércia do sólido, então o sistema de forças de inércia se reduz a uma força e um binário, quais sejam:

$$\begin{aligned} R_x^I &= mx_G \dot{\theta}^2 \\ R_y^I &= -mx_G \ddot{\theta} \\ M_{Oz}^I &= -J_{Oz} \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (17 - 4)$$

Notemos também que, se a velocidade angular do corpo for constante, o sistema de forças de inércia se reduz a uma única força, ou seja:

$$R_x^I = mx_G \dot{\theta}^2 \quad (17 - 5)$$

Finalmente, constatamos que, se o eixo de rotação do corpo for baricentral, ou seja, se $O \equiv G$, o sistema de forças de inércia se anula, ou seja,

$$\begin{aligned} \vec{R}^I &= \vec{0} \\ \vec{M}_O^I &= \vec{0} \end{aligned} \quad (17 - 6)$$

e o corpo entra em equilíbrio dinâmico.

Dessa forma, concluímos que as condições necessárias e suficientes para que um sólido que gira em torno de um eixo fixo entre em equilíbrio dinâmica são as seguintes:

- a velocidade angular do corpo deve ser nula;
- o eixo de rotação do corpo deve coincidir com um de seus eixos **centrais** de inércia, ou seja, um dos três eixos principais de inércia Gx^P, Gy^P, Gz^P .

O desequilíbrio dinâmico de rotores ocasiona reações indesejáveis nos mancais, vibrações e ruídos, reduzindo a vida dos equipamentos e afetando o conforto ambiental. Portanto, é sempre recomendável realizar balanceamento de massas, de modo a tornar o eixo de rotação coincidente com um dos eixos centrais de inércia do rotor.

18. Interpretação geométrica do processo de balanceamento de um rotor

Entende-se por **balanceamento** de um rotor originalmente desbalanceado ao procedimento requerido para mudar sua distribuição de massas de modo a levar o eixo de rotação a coincidir com um de seus eixos centrais de inércia. Uma vez balanceado e, desde que o rotor opere com velocidade angular constante, serão nulas as reações de origem inercial aplicadas ao rotor.

Demonstraremos que é sempre possível balancear um rotor acrescentando ou retirando material concentrado em dois planos perpendiculares ao eixo de rotação e arbitrariamente escolhidos. Esses planos serão, doravante, designados como **planos de correção**.

Conforme ilustrado na Fig.31, suporemos que o corpo gire em torno do eixo Oz . Sabemos que, no caso mais geral, o sistema de forças de inércia se reduz a uma resultante \vec{R}^I e a um binário resultante \vec{M}_O^I . Admitindo-se que o corpo gire com velocidade angular ω constante, as componentes de \vec{R}^I e de \vec{M}_O^I são dadas por:

$$\begin{aligned}
 R_x^I &= m x_G \omega^2 \\
 R_y^I &= 0 \\
 R_z^I &= 0 \\
 M_{Ox}^I &= -J_{Oyz} \omega^2 \\
 M_{Oy}^I &= J_{Oxz} \omega^2 \\
 M_{Oz}^I &= 0
 \end{aligned}
 \tag{18 - 1}$$

Das equações acima, constatamos que a resultante \vec{R}^I é normal ao eixo de rotação Oz e que o binário resultante \vec{M}_O^I é normal ao eixo de rotação Oz (pertence, portanto, ao plano de correção Π_1).

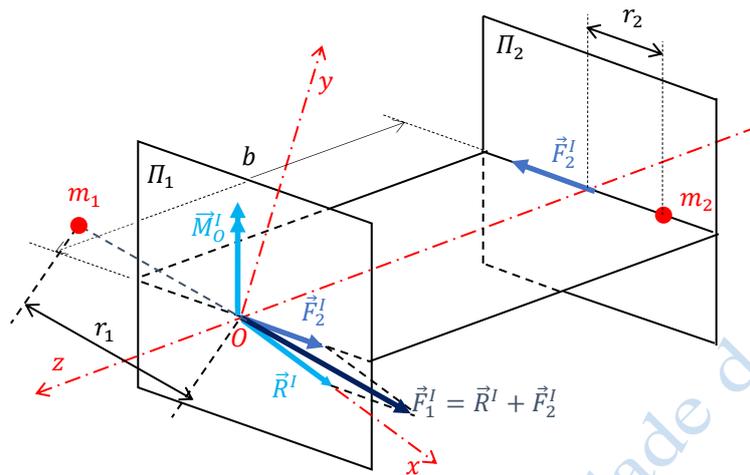


Figura 31. Anulação do sistema de forças de inércia pela ação dinâmica de duas massas concentradas.

O binário resultante \vec{M}_O^I evidentemente pode ser representado por um par de forças $\{\vec{F}_2^I, -\vec{F}_2^I\}$ perpendiculares a \vec{M}_O^I (logo, também a Oz) e afastadas entre si de uma distância b tal que

$$|\vec{M}_O^I| = |\vec{F}_2^I| \cdot b \tag{18 - 2}$$

Notando-se que \vec{R}^I e \vec{F}_2^I são forças concorrentes em O , pela regra do paralelograma a resultante dessas duas forças, ou seja,

$$\vec{F}_1^I = \vec{R}^I + \vec{F}_2^I \tag{18 - 3}$$

pertence ao plano de correção Π_1 .

Dessa forma, o sistema original de forças de inércia é reduzido a duas forças \vec{F}_1^I e \vec{F}_2^I pertencentes a dois planos paralelos Π_1 e Π_2 , respectivamente, planos esses perpendiculares ao eixo de rotação Oz .

Assim, é possível determinar duas massas m_1 e m_2 , situadas a distâncias r_1 e r_2 medidas ao longo das linhas de ação de \vec{F}_1^I e \vec{F}_2^I a partir do eixo de rotação Oz , tais que

$$\begin{aligned}
 |F_1^I| &= m_1 \omega^2 r_1 \\
 |F_2^I| &= m_2 \omega^2 r_2
 \end{aligned}
 \tag{18 - 4}$$

anulem o sistema original de forças de inércia e, portanto, levem o corpo ao estado de equilíbrio dinâmico sempre que este girar com velocidade angular constante. Em outras palavras, é sempre possível balancear um corpo que gira em torno de um eixo fixo mediante a inclusão ou remoção de

duas pequenas massas concentradas situadas em dois planos perpendiculares ao eixo de rotação e separados por uma distância arbitrariamente escolhida.

19. Balanceamento de rotores

Consideraremos um rotor desbalanceado que gira em torno do eixo Oz conforme ilustrado na Fig.32.

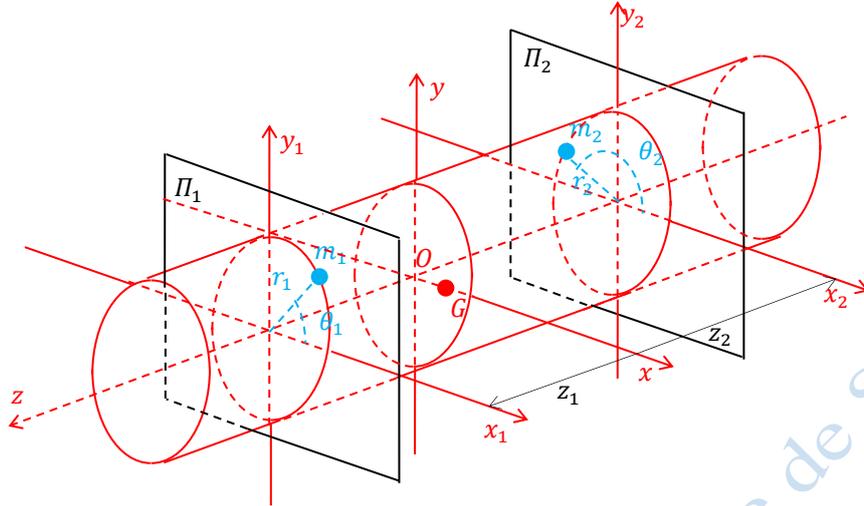


Figura 32. Balanceamento de um rotor desbalanceado.

Admitiremos que as seguintes propriedades geométricas e inerciais do rotor sejam conhecidas:

- centro de massa $G = (x_G, 0, 0)$ medido em um sistema de referência baricentral ligado ao corpo;
- massa m
- produtos de inércia J_{Oxz}, J_{Oyz}

Introduzem-se, então, duas massas concentradas m_1 e m_2 nas posições P_1 e P_2 dadas, em coordenadas cilíndricas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} P_1 &= (r_1, \theta_1, z_1) \\ P_2 &= (r_2, \theta_2, z_2) \end{aligned} \quad (19 - 1)$$

de modo que, mediante esse processo, o rotor adquira as seguintes propriedades geométricas e inerciais:

$$\begin{aligned} \bar{m} &= m + m_1 + m_2 \\ \bar{G} &= (0, 0, \bar{z}_G) \\ \bar{J}_{Oxz} &= 0 \\ \bar{J}_{Oyz} &= 0 \end{aligned} \quad (19 - 2)$$

As condições estabelecidas em (19-2) podem ser equacionadas como

$$\begin{aligned}\bar{x}_G &= \frac{mx_G + m_1x_1 + m_2x_2}{m + m_1 + m_2} = \frac{mx_G + m_1r_1 \cos \theta_1 + m_2r_2 \cos \theta_2}{m + m_1 + m_2} = 0 \\ \bar{y}_G &= \frac{my_G + m_1y_1 + m_2y_2}{m + m_1 + m_2} = \frac{m_1r_1 \sin \theta_1 + m_2r_2 \sin \theta_2}{m + m_1 + m_2} = 0 \\ \bar{z}_G &= \frac{mz_G + m_1z_1 + m_2z_2}{m + m_1 + m_2}\end{aligned}\quad (19 - 3)$$

$$\begin{aligned}\bar{J}_{Oxz} &= J_{Oxz} + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 = J_{Oxz} + m_1z_1r_1 \cos \theta_1 + m_2z_2r_2 \cos \theta_2 = 0 \\ \bar{J}_{Oyz} &= J_{Oyz} + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 = J_{Oyz} + m_1z_1r_1 \sin \theta_1 + m_2z_2r_2 \sin \theta_2 = 0\end{aligned}$$

Reorganizando-se as equações (19-3), chega-se ao sistema de 4 equações

$$\begin{aligned}m_1r_1 \cos \theta_1 + m_2r_2 \cos \theta_2 &= -mx_G \\ m_1r_1 \sin \theta_1 + m_2r_2 \sin \theta_2 &= 0 \\ m_1z_1r_1 \cos \theta_1 + m_2z_2r_2 \cos \theta_2 &= -J_{Oxz} \\ m_1z_1r_1 \sin \theta_1 + m_2z_2r_2 \sin \theta_2 &= -J_{Oyz}\end{aligned}\quad (19 - 4)$$

a 8 incógnitas, a saber:

- m_1, m_2
- r_1, r_2
- z_1, z_2
- θ_1, θ_2

Esse sistema pode ser resolvido desde que se estabeleçam valores pré-determinados para 4 das 8 incógnitas. Via de regra, fixam-se as seguintes variáveis:

- r_1, r_2
- z_1, z_2

e determinam-se, para esses valores fixos, $m_1, m_2, \theta_1, \theta_2$.

Adotando-se um tal procedimento e utilizando-se as variáveis auxiliares

$$\begin{aligned}u_1 &= m_1r_1 \cos \theta_1 \\ u_2 &= m_2r_2 \\ v_1 &= m_1r_1 \sin \theta_1 \\ v_2 &= m_2r_2 \sin \theta_2\end{aligned}\quad (19 - 5)$$

chega-se ao seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned}u_1 + u_2 &= -mx_G \\ v_1 + v_2 &= 0 \\ z_1u_1 + z_2u_2 &= -J_{Oxz} \\ z_1v_1 + z_2v_2 &= -J_{Oyz}\end{aligned}\quad (19 - 6)$$

que, representado na forma matricial, se expressa como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ z_1 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & z_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mx_G \\ 0 \\ -J_{Oxz} \\ -J_{Oyz} \end{bmatrix}\quad (19 - 7)$$

O sistema de equações lineares acima tem solução única desde que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ z_1 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & z_2 \end{vmatrix} = (z_2 - z_1)^2 \neq 0 \quad (19 - 8)$$

ou seja, desde que os planos de correção não sejam coincidentes. Em tais circunstâncias, determinam-se, de forma única, as variáveis u_1, v_1, u_2, v_2 a partir de:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ z_1 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & z_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -mx_G \\ 0 \\ -J_{Oxz} \\ -J_{Oyz} \end{bmatrix} \quad (19 - 9)$$

e, em seguida, obtêm-se $m_1, m_2, \theta_1, \theta_2$ a partir de:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \tan^{-1} \frac{v_1}{u_1} \\ \theta_2 &= \tan^{-1} \frac{v_2}{u_2} \\ m_1 &= \frac{1}{\cos \theta_1} \frac{u_1}{r_1} \\ m_2 &= \frac{1}{\cos \theta_2} \frac{u_2}{r_2} \end{aligned} \quad (19 - 10)$$

É importante observar que, necessariamente, $\theta_1 < \frac{\pi}{2}$ e $\theta_2 < \frac{\pi}{2}$, uma vez que, de acordo com o esquema de forças de inércia da Fig.31, mesmo na situação extrema em que \vec{M}'_O é paralelo a \vec{R}' , a resultante $\vec{F}'_1 = \vec{R}' + \vec{F}'_2$ fará com a direção de \vec{M}'_O um ângulo θ_1 tal que $0 < |\theta_1| < \frac{\pi}{2}$.

20. Exemplo de aplicação do método de balanceamento descrito no item 19

Um aro quadrado constituído por 4 barras delgadas (Fig.33) de comprimento 2ℓ e massas $m_{AD} = m_1, m_{BC} = m_2, m_{AB} = M_1$ e $m_{CD} = M_2$, é posto a girar com velocidade angular ω constante em torno do eixo Oz , sob a ação de um momento externo $T(t)\vec{k}$, conforme indicado na figura. Utilizando o sistema de eixos $Oxyz$ ligados ao aro, determinar: a) as coordenadas do centro de massa do aro; b) a aceleração do centro de massa do aro; c) a matriz de inércia do aro relativa ao pólo O e descrita no sistema de eixos $Oxyz$; d) os valores de duas massas m e m' que, localizadas sobre dois vértices convenientes do aro (indicá-los), mantenham-no em equilíbrio dinâmico.

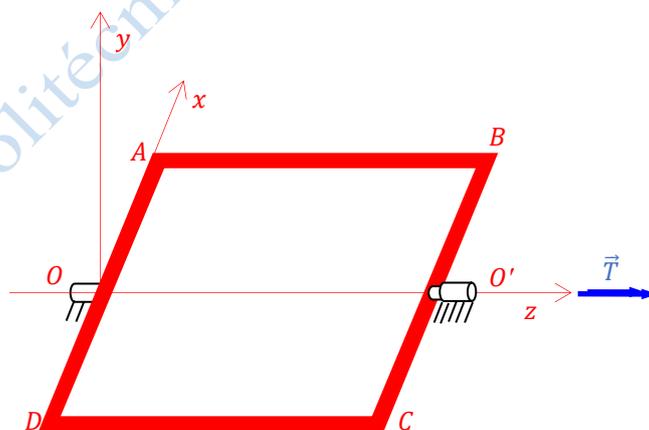


Figura 33. Balanceamento de aro retangular desbalanceado.

As coordenadas do centro de massa do aro são obtidas por meio da composição de centros de massas das 4 barras delgadas, conforme mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}x_G &= \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 0 + M_1 \cdot \ell - M_2 \cdot \ell}{m_1 + m_2 + M_1 + M_2} = \frac{M_1 - M_2}{m_1 + m_2 + M_1 + M_2} \ell \\y_G &= 0 \\z_G &= \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 2\ell + M_1 \cdot \ell + M_2 \cdot \ell}{m_1 + m_2 + M_1 + M_2} = \frac{2m_2 + M_1 + M_2}{m_1 + m_2 + M_1 + M_2} \ell\end{aligned}\quad (20 - 1)$$

Portanto, o centro de massa do aro se situa em:

$$G = \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2 + m_1 + m_2} \ell, \quad 0, \quad \frac{2m_2 + M_1 + M_2}{M_1 + M_2 + m_1 + m_2} \ell \right) \quad (20 - 2)$$

A aceleração do centro de massa do aro é dada por:

$$\begin{aligned}\vec{a}_G &= \vec{a}_O + \vec{\omega} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)] \\ \Rightarrow \vec{a}_G &= \omega \vec{k} \wedge [\omega \vec{k} \wedge (x_G \vec{i} + z_G \vec{k})] = -\omega^2 x_G \vec{i} = \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2 + m_1 + m_2} \omega^2 \vec{i}\end{aligned}\quad (20 - 3)$$

Considerando-se que o aro se situa no plano xz , seus produtos de inércia J_{Oxy} e J_{Oyz} são ambos nulos. Os demais componentes da matriz de inércia são obtidos mediante aplicação da técnica de composição de momentos e produtos de inércia, conforme indicado a seguir:

$$J_{Ox} = J_{Ox}^{AD} + J_{Ox}^{BC} + J_{Ox}^{AB} + J_{Ox}^{CD} = 0 + (0 + m_2 4\ell^2) + \frac{M_1 4\ell^2}{3} + \frac{M_2 4\ell^2}{3} = 4 \left(m_2 + \frac{M_1 + M_2}{3} \right) \ell^2$$

$$J_{Oy} = J_{Oy}^{AD} + J_{Oy}^{BC} + J_{Oy}^{AB} + J_{Oy}^{CD}$$

$$\Rightarrow J_{Oy} = \frac{m_1 4\ell^2}{12} + \left(\frac{m_2 4\ell^2}{12} + m_2 4\ell^2 \right) + \left(\frac{M_1 4\ell^2}{12} + M_1 2\ell^2 \right) + \left(\frac{M_2 4\ell^2}{12} + M_2 2\ell^2 \right)$$

$$\Rightarrow J_{Oy} = \left[\frac{m_1 + m_2}{3} + 4m_2 + \frac{M_1 + M_2}{3} + 2(M_1 + M_2) \right] \ell^2$$

$$J_{Oz} = J_{Oz}^{AD} + J_{Oz}^{BC} + J_{Oz}^{AB} + J_{Oz}^{CD} = \frac{m_1 4\ell^2}{12} + \frac{m_2 4\ell^2}{12} + M_1 \ell^2 + M_2 \ell^2 = \left(\frac{m_1 + m_2}{3} + M_1 + M_2 \right) \ell^2$$

$$J_{Oxz} = J_{Oxz}^{AD} + J_{Oxz}^{BC} + J_{Oxz}^{AB} + J_{Oxz}^{CD}$$

$$\Rightarrow J_{Oxz} = 0 + (0 + m_2 \cdot 0 \cdot 2\ell) + M_1 \ell \cdot \ell + M_2 (-\ell) \cdot \ell = (M_1 - M_2) \ell^2$$

Portanto, a matriz de inércia do aro, relativa ao polo O , é:

$$[J_O] = \ell^2 \begin{bmatrix} 4 \left(m_2 + \frac{M_1 + M_2}{3} \right) & 0 & -(M_1 - M_2) \\ 0 & \left[\frac{m_1 + m_2}{3} + 4m_2 + \frac{M_1 + M_2}{3} + 2(M_1 + M_2) \right] & 0 \\ -(M_1 - M_2) & 0 & \left(\frac{m_1 + m_2}{3} + M_1 + M_2 \right) \end{bmatrix} \quad (20 - 4)$$

Considerando-se que a velocidade angular do aro é constante, o seu equilíbrio dinâmico pode ser atingido desde que se acrescentem ou se removam duas massas m e m' localizadas sobre planos paralelos entre si e perpendiculares ao eixo de rotação Oz (Fig.59), de modo tal a fazê-lo coincidir

com o eixo central de inércia do aro. Como o corpo já está balanceado em relação ao eixo y , é suficiente que as seguintes condições sejam satisfeitas:

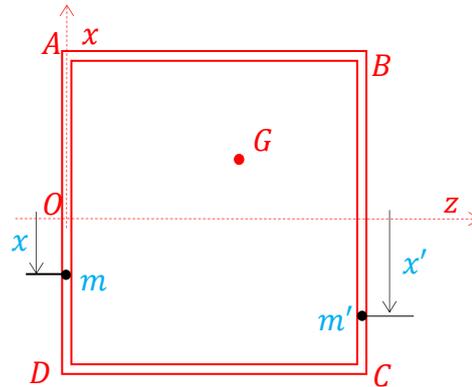


Figura 34. Posições das massas concentradas necessárias ao balanceamento.

- Eixo de rotação baricentral

$$(m_1 + m_2 + M_1 + M_2)x_G + mx + m'x' = 0 \quad (20 - 5)$$

- Eixo de rotação coincidente com eixo central de inércia do aro

$$J_{Oxz} + mxz + m'x'z' = 0 \quad (20 - 6)$$

Desenvolvendo-se as equações acima, resultam:

$$(M_1 - M_2)\ell + mx + m'x' = 0 \quad (20 - 7)$$

$$(M_1 - M_2)\ell^2 + mxz + m'x'z' = 0 \quad (20 - 8)$$

Situando-se as massas m e m' , respectivamente, nos planos $z = 0$ e $z = 2\ell$, a equação (20-8) se transforma em:

$$(M_1 - M_2)\ell^2 + 2\ell m'x' = 0 \quad (20 - 9)$$

Supondo que $M_2 > M_1$ e utilizando o sistema de duas equações (20-7, 20-9) a 4 incógnitas (m, m', x, x') , identificaremos as duas massas m, m' requeridas ao equilíbrio dinâmico do aro considerando os 4 casos seguintes:

$$1^\circ) x = x' = \ell$$

$$(M_1 - M_2)\ell + m\ell + m'\ell = 0 \Rightarrow m + m' = M_2 - M_1 \quad (20 - 10)$$

$$(M_1 - M_2)\ell^2 + 2\ell m'\ell = 0 \quad (20 - 11)$$

Resolvendo-se o sistema (20-10), (20-11), obtêm-se:

$$m = m' = \frac{M_2 - M_1}{2}$$

massas que devem ser adicionadas ao aro nos vértices A e B.

$$2^\circ) x = x' = -\ell$$

$$(M_1 - M_2)\ell - m\ell - m'\ell = 0 \Rightarrow m + m' = M_1 - M_2 \quad (20 - 12)$$

$$(M_1 - M_2)\ell^2 - 2\ell m'\ell = 0 \quad (20 - 13)$$

Resolvendo-se o sistema de equações (20-12), (20-13), obtêm-se:

$$m = m' = \frac{M_1 - M_2}{2}$$

massas que devem ser removidas do aro nos vértices C e D .

$$3^\circ) x = \ell, x' = -\ell$$

$$(M_1 - M_2)\ell + m\ell - m'\ell = 0 \Rightarrow m - m' = M_2 - M_1 \quad (20 - 14)$$

$$(M_1 - M_2)\ell^2 - 2\ell m'\ell = 0 \quad (20 - 15)$$

Resolvendo-se o sistema de equações (20-14), (20-15), obtêm-se:

$$m = \frac{M_1 - M_2}{2}$$

massa a ser removida do vértice A e

$$m' = \frac{M_2 - M_1}{2}$$

massa a ser adicionada ao vértice C .

21. Bibliografia

- [1] Appell, P., *Traité de Mécanique Rationnelle*, Tome II. Gauthier-Villars, Paris, 1904.
- [2] Beer, F.P., Johnston Jr., E.R., *Mecânica Vetorial para Engenheiros: Cinemática e Dinâmica*. Pearson Makron Books, São Paulo, 1994.
- [3] Béghin, H., *Cours de Mécanique Théorique et Appliquée*, Tome I. Gauthier-Villars, Paris, 1952.
- [4] Béghin, H., *Cours de Mécanique Théorique et Appliquée*, Tome II. Gauthier-Villars, Paris, 1951.
- [5] Béghin, H., *Exercices de Mécanique*. Gauthier-Villars, Paris, 1930.
- [6] Bellet, D., *Cours de Mécanique Générale*. Cepadus Édition, Toulouse, 1988.
- [7] Bouligand, G., *Mécanique Rationnelle*. Librairie Vuibert, Paris, 1954.
- [8] Brossard, J.P., *Mécanique Générale*. Publications INSA de Lyon, 2003. Disponível em <http://ori-oai-search.insa-lyon.fr/notice/view/default%253AUNIMARC%253A104740>.
- [9] Cabannes, H., *Cours de Mécanique Générale*. Dunod, Paris, 1967.
- [10] Desloges, E.A., *Classical Mechanics*, Vol.1. Wiley Interscience Publications, 1982.
- [11] Desloges, E.A., *Classical Mechanics*, Vol.2. Wiley Interscience Publications, 1989.
- [12] Garnier, H., *Cours de Cinématique. Cinématique du Point et de Solide. Composition des Mouvements*, Tome I. Gauthier-Villars, Paris, 1949.
- [13] Fonseca, A., *Curso de Mecânica*, Vol.III. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1977.
- [14] Fonseca, A., *Curso de Mecânica*, Vol.IV. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1978.
- [15] França, L.N.F., Matsumura, A.Z., *Mecânica Geral*. Editora Edgard Blücher, São Paulo, 2004.
- [16] Giacaglia, G.E.O., *Mecânica Geral para as Escolas Superiores*, Vol.2. Livraria Nobel, São Paulo, 1974.
- [17] Giacaglia, G.E.O., *Mecânica Analítica*. Almeida Neves, Rio de Janeiro, 1978.
- [18] Longhini, P., *Lecciones de Mecânica Racional*, Tomo II. Centro Estudiantes de Ingenieria, Buenos Aires, 1940.
- [19] Landau, L., Lifschitz, E., *Physique Théorique : Mécanique*. Moscow: Editeur:Mir, 1976.
- [20] Painlévé, *Cours de Mécanique*, Tome II. Gauthier-Villars, Paris, 1936.
- [21] Pérès, J., *Mécanique Général*. Masson et C^{ie}, Éditeurs, Paris, 1962.
- [22] Platrier, C., *Mécanique Rationnelle*, Tome I. Dunot, Paris, 1954.

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo