

CAPÍTULO 6
DINÂMICA DO CORPO RÍGIDO – PARTE 1

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

1. Abordagem do problema

Nestas notas apresentaremos as equações que governam o movimento de um corpo rígido ou de um sistema constituído por corpos rígidos vinculados, para o quê admitiremos que sejam conhecidos os elementos (princípios, axiomas e leis) da Mecânica Clássica Newtoniana, originalmente aplicados ao estudo do movimento de uma partícula material de massa constante, relativamente a um referencial inercial.

A metodologia adotada será, portanto, a de estender a aplicação desses elementos à análise do movimento de sistemas de partículas materiais, em particular daquelas que se movem sujeitas ao vínculo cinemático de corpo rígido.

2. Redução de um sistema de vetores **quantidade de movimento** de um sistema de partículas materiais

Consideremos um sistema de partículas materiais de massas m_i que, em um dado instante, estão localizadas em pontos P_i , animadas de velocidades \vec{v}_i , ou seja, são portadoras da quantidade de movimento $m_i\vec{v}_i$. Para analisar o movimento desse sistema material, salientamos que o sistema de vetores deslizantes $m_i\vec{v}_i$, agentes ao longo das retas passantes por P_i e orientadas segundo as direções $\vec{u}_i = \vec{v}_i/|\vec{v}_i|$, pode ser reduzido a um par de vetores $\{\vec{Q}, \vec{H}_O\}$, em que o primeiro membro do par corresponde à **quantidade de movimento resultante**, e o segundo ao **momento da quantidade de movimento resultante** relativo a um polo O arbitrário, mas que se move com o sistema de partículas (Fig.1).

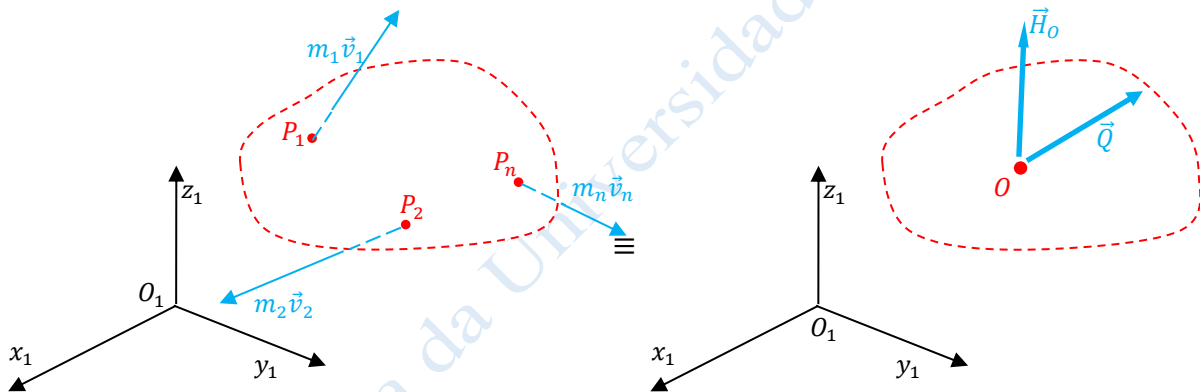


Figura 1. Redução de um sistema de vetores **quantidade de movimento**.

Somando-se todos os vetores $\vec{q}_i = m_i\vec{v}_i$ associados ao sistema material, obtém-se a quantidade de movimento resultante do sistema, ou seja:

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i\vec{v}_i \quad (2-1)$$

Considerando-se, por outro lado, a posição do centro de massa G do sistema material, dada por

$$m(G - O_1) = \sum_{i=1}^n m_i(P_i - O_1) \quad (2-2)$$

sua variação temporal se obtém derivando-se a expressão acima, ou seja:

$$\frac{d}{dt} [m(G - O_1)] = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i (P_i - O_1) \Rightarrow m \left(\frac{d\vec{G}}{dt} - \frac{d\vec{O}_1}{dt} \right) = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{d\vec{P}_i}{dt} - \frac{d\vec{O}_1}{dt} \right) \quad (2-3)$$

Como O_1 é um ponto fixo, conclui-se que:

$$m\vec{v}_G = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \vec{Q} \quad (2-4)$$

ou seja, que a quantidade de movimento resultante de um sistema material é equivalente à quantidade de movimento de seu centro de massa, supondo-se que nele esteja concentrada toda a massa do sistema.

Para um polo O arbitrário, mas que se move com o sistema, o **momento da quantidade de movimento**, também chamado de **quantidade de movimento angular** ou de **momento cinético**¹, é definido como:

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i \quad (2-5)$$

Neste ponto, é importante salientar que o campo de momentos da quantidade de movimento exibe as mesmas propriedades geométricas do campo de momentos de um sistema de forças, propriedades essas que são sintetizadas pela fórmula de mudança de polo, ou seja, para polos O e O' arbitrários, mas que se movem com o sistema material, tem-se:

$$\vec{H}_{O'} = \vec{H}_O + (O - O') \wedge \vec{Q} \quad (2-6)$$

3. Redução de um sistema de vetores quantidade de movimento de um corpo rígido

Suporemos, agora, que o sistema material ilustrado na Fig.2 corresponda a um corpo rígido \mathcal{S} que, em um dado instante, tenha seu campo de velocidades caracterizado pela velocidade \vec{v}_O de um ponto O e pelo vetor rotação instantânea $\vec{\omega}$.

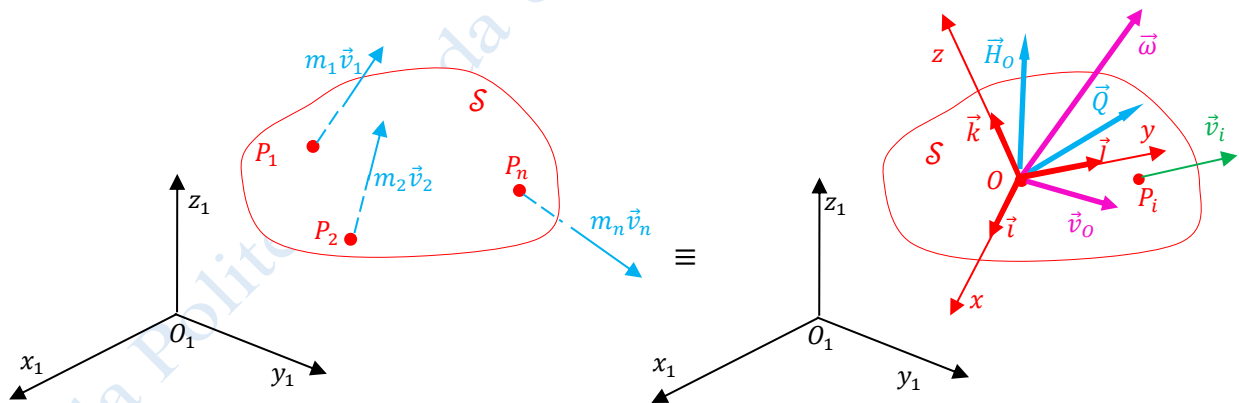


Figura 2. Redução de um sistema de vetores quantidade de movimento de um corpo rígido.

¹ Em algumas edições brasileiras de livros de Mecânica, **momento da quantidade de movimento** é designado como ‘momento angular’, o que constitui evidente erro de tradução da expressão inglesa ‘angular momentum’, cujo significado é o de **quantidade de movimento angular**, uma vez que ‘momentum’, em inglês, significa **quantidade de movimento** e não **momento**.

O sistema de vetores quantidade de movimento $\vec{q}_i = m_i \vec{v}_i$ associados ao corpo rígido se reduz, como antes, aos vetores

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \quad (3-1)$$

e

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i \quad (3-2)$$

Em um sólido, porém, a velocidade do centro de massa se expressa como

$$\vec{v}_G = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (G - O) \quad (3-3)$$

de modo que a quantidade de movimento resultante de um sólido se expressa como

$$\vec{Q} = m[\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (G - O)] \quad (3-4)$$

Para calcularmos o momento da quantidade de movimento resultante de um sólido, lembremos que a velocidade de qualquer ponto P_i do sólido é dada por:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P_i - O) \quad (3-5)$$

Substituindo-se (3-5) em (3-2), obtém-se:

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i [\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P_i - O)] \quad (3-6)$$

Desenvolvendo a expressão acima, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{H}_O &= \sum_{i=1}^n m_i (P_i - O) \wedge \vec{v}_O + \sum_{i=1}^n m_i (P_i - O) \wedge [\vec{\omega} \wedge (P_i - O)] \\ \Rightarrow \vec{H}_O &= m(G - O) \wedge \vec{v}_O + \sum_{i=1}^n m_i (P_i - O) \wedge [\vec{\omega} \wedge (P_i - O)] \end{aligned} \quad (3-7)$$

Aplicando-se à expressão anterior a fórmula da expulsão do duplo produto vetorial, ou seja,

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad (3-8)$$

com

$$\vec{a} = (P_i - O) \quad \vec{b} = \vec{\omega} \quad \vec{c} = (P_i - O) \quad (3-9)$$

resulta:

$$\vec{H}_O = m(G - O) \wedge \vec{v}_O + \sum_{i=1}^n m_i \{ [(P_i - O) \cdot (P_i - O)]\vec{\omega} - [(P_i - O) \cdot \vec{\omega}](P_i - O) \} \quad (3-10)$$

É importante destacar que, na expressão acima (3-10), **os vetores $(P_i - O)$ e $\vec{\omega}$ devem ser descritos no sistema de referência ligado ao corpo**, ou seja:

$$(P_i - O) = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \quad (3-11)$$

e

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \quad (3 - 12)$$

Fazendo-se as substituições dessas expressões na Eq.3-10, obtém-se:

$$\begin{aligned} \vec{H}_O &= m(G - O) \wedge \vec{v}_O \\ &+ \sum_{i=1}^n m_i \left\{ (x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k})^2 (\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) \right. \\ &\quad \left. - [(x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}) \cdot (\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k})] (x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}) \right\} \\ \Rightarrow \vec{H}_O &= m(G - O) \wedge \vec{v}_O \\ &+ \sum_{i=1}^n m_i \left\{ (x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k})^2 (\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) \right. \\ &\quad \left. - (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) (x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}) \right\} \\ \Rightarrow \vec{H}_O &= m(G - O) \wedge \vec{v}_O \\ &+ \sum_{i=1}^n m_i [(y_i^2 + z_i^2) \omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z] \vec{i} \\ &+ \sum_{i=1}^n m_i [-x_i y_i \omega_x + (x_i^2 + z_i^2) \omega_y - y_i z_i \omega_z] \vec{j} \\ &+ \sum_{i=1}^n m_i [-x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y + (x_i^2 + y_i^2) \omega_z] \vec{k} \end{aligned} \quad (3 - 13)$$

Definindo-se os momentos de inércia como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) &= J_{Ox} \\ \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2) &= J_{Oy} \\ \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) &= J_{Oz} \end{aligned} \quad (3 - 14)$$

e os produtos de inércia como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i &= J_{Oxy} \\ \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i &= J_{Oxz} \\ \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i &= J_{Oyz} \end{aligned} \quad (3 - 15)$$

obtém-se:

$$\begin{aligned}\vec{H}_O &= (G - O) \wedge m\vec{v}_O \\ &\quad + (J_{Ox}\omega_x - J_{Oxy}\omega_y - J_{Oxz}\omega_z)\vec{i} \\ &\quad + (-J_{Oxy}\omega_x + J_{Oy}\omega_y - J_{Oyz}\omega_z)\vec{j} \\ &\quad + (-J_{Oxz}\omega_x - J_{Oyz}\omega_y + J_{Oz}\omega_z)\vec{k}\end{aligned}\quad (3 - 16)$$

A expressão anterior pode ser representada de maneira mais compacta na forma como segue:

$$\vec{H}_O = (G - O) \wedge m\vec{v}_O + \begin{bmatrix} J_{Ox} & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oxy} & J_{Oy} & -J_{Oyz} \\ -J_{Oxz} & -J_{Oyz} & J_{Oz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}\quad (3 - 17)$$

em que

$$\vec{\omega} = [\omega] = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}\quad (3 - 18)$$

é o vetor rotação instantânea de \mathcal{S} , representado como uma matriz coluna, e

$$[J_O] = \begin{bmatrix} J_{Ox} & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oxy} & J_{Oy} & -J_{Oyz} \\ -J_{Oxz} & -J_{Oyz} & J_{Oz} \end{bmatrix}\quad (3 - 19)$$

é a assim chamada **matriz de inércia** do corpo rígido \mathcal{S} , descrita no sistema de eixos $Oxyz$ ligados a \mathcal{S} . Nessa matriz, os termos da diagonal principal J_{Ox} , J_{Oy} e J_{Oz} são denominados **momentos de inércia** relativos aos eixos Ox , Oy e Oz , respectivamente; os demais termos, isto é, J_{Oxy} , J_{Oxz} e J_{Oyz} , são denominados **produtos de inércia** relativos aos pares de Ox, Oy , Ox, Oz e Oy, Oz , respectivamente.

Dessa forma, introduzindo-se (3-18) e (3-19) na expressão (3-17), chega-se, finalmente, a:

$$\vec{H}_O = (G - O) \wedge m\vec{v}_O + [J_O] \cdot [\omega]\quad (3 - 20)$$

que representa o momento da quantidade de movimento de um corpo rígido \mathcal{S} em um polo O qualquer pertencente a \mathcal{S} ou à sua extensão material, descrito em um sistema de eixos $Oxyz$ ligados a \mathcal{S} .

Portanto, o sistema de vetores quantidade de movimento de um corpo rígido \mathcal{S} pode ser reduzido ao par de vetores $\vec{Q} = m\vec{v}_G$ e $\vec{H}_O = (G - O) \wedge m\vec{v}_O + [J_O] \cdot [\omega]$, ambos aplicados a um polo O arbitrário, **pertencente a \mathcal{S} ou à sua extensão material**.

Qualquer par $\{\vec{Q}, \vec{H}_O\}$ tal que $O \in \mathcal{S}$ ou $O \in$ *extensão material de \mathcal{S}* , descreve, a cada instante, um campo equiprojetivo. Diz-se, então, que $\{\vec{Q}, \vec{H}_O\}$ é o **torçor cinético** de \mathcal{S} .

A expressão do momento da quantidade de movimento de um corpo rígido (Eq.3-20) pode ser interpretada de acordo com o esquema da Fig.3, em que o sistema de vetores quantidade de movimento do sólido é associado às contribuições de: 1) uma partícula de massa m igual à do sólido, situada no seu centro de massa G , mas movimentando-se com a velocidade \vec{v}_O ; 2) o próprio corpo rígido \mathcal{S} , supondo-se, porém, que este se mova em torno de um ponto O fixo.

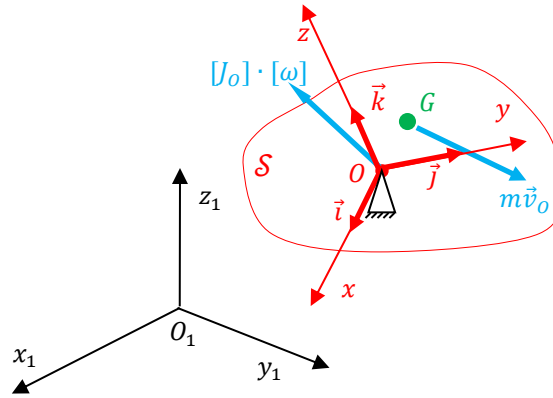


Figura 3. Interpretação física para os termos presentes na equação 22.

No esquema da Fig.3, a parcela $(G - O) \wedge m\vec{v}_O$ representa o momento da quantidade de movimento em relação ao polo O da partícula de massa m , localizada em G e movendo-se com velocidade \vec{v}_O ; trata-se, portanto, de um momento da quantidade de movimento associado à **translação**. Já a parcela $[J_O] \cdot [\omega]$ representa o momento da quantidade de movimento em relação ao polo O do corpo \mathcal{S} realizando movimento de rotação em torno do ponto O , suposto fixo; trata-se, portanto, de um momento da quantidade de movimento associado à **rotação**.

A expressão do momento da quantidade de movimento de um corpo rígido, em relação a um polo O , se simplifica nos seguintes casos:

(a) O coincide com o centro de massa G do corpo, de modo que:

$$\vec{H}_G = [J_G] \cdot [\omega] \quad (3 - 21)$$

(b) O é um ponto fixo, de modo que:

$$\vec{H}_O = [J_O] \cdot [\omega] \quad (3 - 22)$$

(c) \vec{v}_O é paralelo a $(G - O)$, de modo que:

$$\vec{H}_O = [J_O] \cdot [\omega] \quad (3 - 23)$$

Nos próximos tópicos investigaremos os elementos que compõem a matriz de inércia, bem como suas propriedades algébricas e geométricas gerais.

4. Momento de inércia polar de um sistema material

Para um sistema \mathcal{S} de pontos materiais $\{m_i, P_i\}$ (Fig.4) define-se o seu **momento polar de inércia** em um polo O arbitrário como a quantidade dada por:

$$J_O = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (4 - 1)$$

onde r_i é a distância entre o ponto P_i e o polo O .

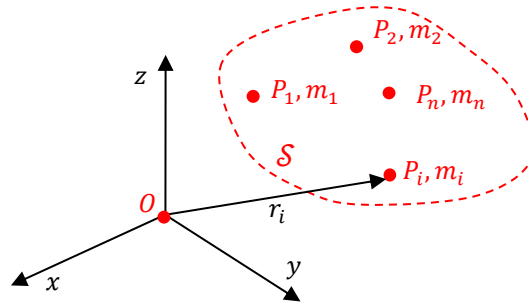


Figura 4. Momento de inércia polar de um sistema material.

Desenvolvendo-se a expressão acima, obtém-se:

$$J_O = \sum_{i=1}^n m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \tag{4 - 2}$$

Note-se que $J_O > 0$, a menos que \mathcal{S} seja constituído por uma única partícula localizada em O , caso este em que $J_O = 0$.

5. Momento de inércia de um sistema material em relação a um eixo

Consideremos um sistema de pontos materiais \mathcal{S} e um eixo $O\vec{u}$ passante pelo polo O e orientado segundo a direção do vetor \vec{u} (Fig.5). Define-se momento de inércia de \mathcal{S} com relação a $O\vec{u}$ à quantidade positiva $J_{O\vec{u}}$ dada por:

$$J_{O\vec{u}} = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2 \tag{5 - 1}$$

onde d_i é a distância entre o ponto P_i e o eixo $O\vec{u}$.

Notando, na expressão acima, que

$$d_i = |P_i - O| \cdot \sin \theta_i = |P_i - O| \cdot |\vec{u}| \cdot \sin \theta_i = |(P_i - O) \wedge \vec{u}| \tag{5 - 2}$$

resulta:

$$J_{O\vec{u}} = \sum_{i=1}^n m_i |(P_i - O) \wedge \vec{u}|^2 \tag{5 - 3}$$

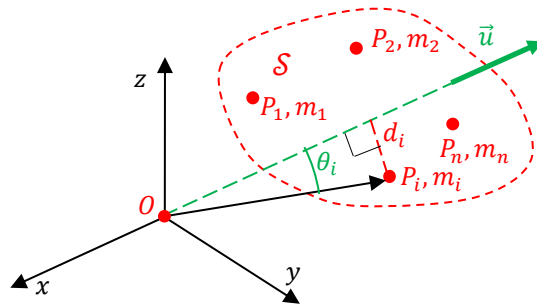


Figura 5. Determinação do momento de inércia axial de um sistema de pontos materiais.

Note-se que $J_{O\vec{u}} > 0$, a menos que os pontos materiais de (S) estejam distribuídos ao longo do eixo $O\vec{u}$, caso este em que $J_{O\vec{u}} = 0$. Percebe-se, ademais, que quanto mais distantes do eixo $O\vec{u}$ estiverem as massas m_i , tanto maiores serão suas contribuições ao valor de $J_{O\vec{u}}$.

Da experiência cotidiana, sabe-se que girar um corpo rígido S em torno de um eixo $G\vec{\omega}$ como o indicado na Fig.6-a, demanda ‘menor esforço’ do que fazê-lo girar em torno de um eixo $G\vec{\omega}$ como o da Fig.6-b.

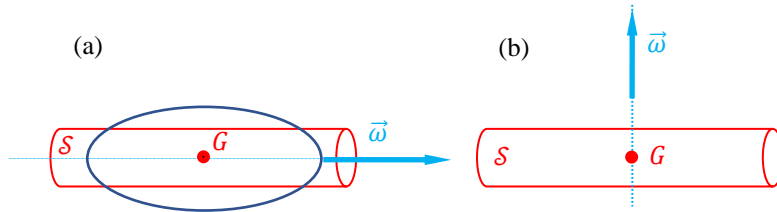


Figura 6. Influência da orientação do eixo $G\vec{\omega}$ sobre o valor do respectivo momento de inércia $J_{G\vec{\omega}}$ de um corpo rígido. A elipse desenhada na figura é uma seção do elipsoide de inércia do corpo rígido S .

Da mesma forma, sabe-se também que o ‘esforço’ requerido para girar um corpo rígido S em torno de um eixo $G\vec{\omega}$ passante pelo seu centro de massa G , como no caso da Fig.7-b, é menor do que o exigido para girá-lo em torno de um eixo $O\vec{\omega}$ paralelo ao primeiro, mas passante por um ponto O conforme ilustrado na Fig.7-a.

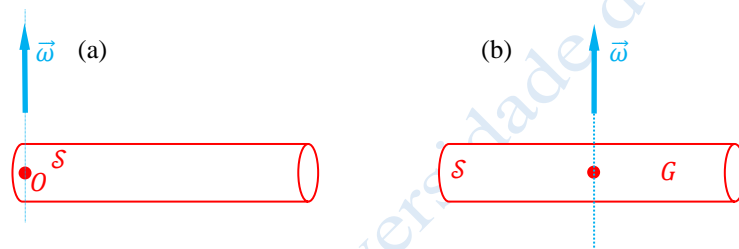


Figura 7. Influência da posição do polo O no valor do momento de inércia $J_{O\vec{\omega}}$ de um corpo rígido.

Portanto, pode-se afirmar que o momento de inércia de um corpo rígido S relativamente a um eixo $O\vec{u}$ é uma medida da **inércia** oferecida por S à imposição de um movimento de rotação em torno de $O\vec{u}$, ou seja, de sua **inércia ao movimento de rotação**.

Fazendo-se $O\vec{u}$ coincidir com cada um dos eixos $O\vec{i}, O\vec{j}, O\vec{k}$ do sistema de referência $Oxyz$, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 J_{Ox} &= \sum_{i=1}^n m_i |(x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}) \wedge \vec{i}|^2 = \sum_{i=1}^n m_i (z_i\vec{j} - y_i\vec{k})^2 = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) \\
 J_{Oy} &= \sum_{i=1}^n m_i |(x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}) \wedge \vec{j}|^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i\vec{k} - z_i\vec{i})^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2) \\
 J_{Oz} &= \sum_{i=1}^n m_i |(x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}) \wedge \vec{k}|^2 = \sum_{i=1}^n m_i (y_i\vec{i} - x_i\vec{j})^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)
 \end{aligned} \tag{5-4}$$

que são, respectivamente, as expressões do momento de inércia de S em relação aos eixos Ox, Oy e Oz . Cabe aqui lembrar que J_{Ox}, J_{Oy} e J_{Oz} , calculados segundos as fórmulas (5-4), são os elementos da diagonal principal da matriz de inércia $[J_O]$ (Eq.3-19).

É interessante ainda destacar a relação existente entre o momento polar de inércia e os momentos de inércia relativos a três eixos ortogonais passantes pelo polo. Descrevendo-se o momento de inércia polar de \mathcal{S} em O , ou seja,

$$J_O = \sum_{i=1}^n m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \tag{5 - 5}$$

como

$$J_O = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n m_i(y_i^2 + z_i^2) + \sum_{i=1}^n m_i(x_i^2 + z_i^2) + \sum_{i=1}^n m_i(x_i^2 + y_i^2) \right] \tag{5 - 6}$$

conclui-se que

$$J_O = \frac{1}{2} (J_{Ox} + J_{Oy} + J_{Oz}) \tag{5 - 7}$$

ou seja: “o momento de inércia polar de um corpo rígido em um polo arbitrário O é a metade da soma de seus momentos de inércia relativamente a três eixos ortogonais passantes por O ”.

6. Raio de giração

Uma vez calculado o momento de inércia $J_{O\vec{u}}$ de um corpo rígido \mathcal{S} em relação a um eixo $O\vec{u}$, pode-se conceber a ideia de uma partícula material P de massa m igual à de \mathcal{S} , situada à distância ρ de $O\vec{u}$ (Fig.8) e que tenha o mesmo momento de inércia $J_{O\vec{u}}$ em relação a esse eixo.

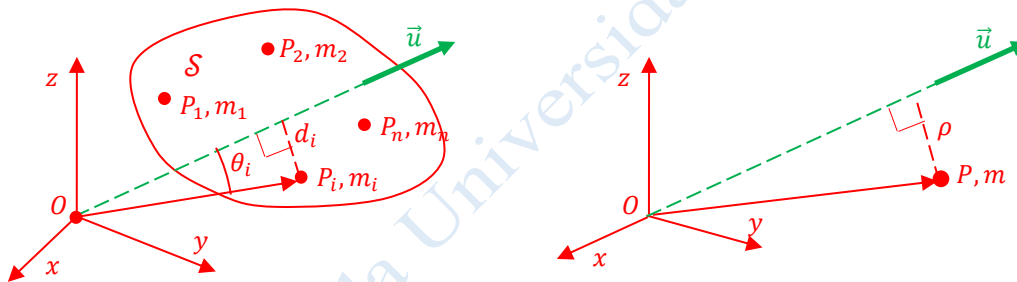


Figura 8. Massa concentrada com momento de inércia em relação a $O\vec{u}$ igual ao de (R) .

Em tais circunstâncias, conclui-se que

$$J_{O\vec{u}} = m\rho^2 \tag{6 - 1}$$

e, por decorrência, obtém-se

$$\rho = \sqrt{\frac{J_{O\vec{u}}}{m}} \tag{6 - 2}$$

que é o assim chamado **raio de giração** de \mathcal{S} em relação ao eixo $O\vec{u}$.

7. Produtos de inércia

Considerando-se o corpo rígido \mathcal{S} da Fig.9, definem-se os produtos de inércia relativamente aos pares de eixos Ox, Oy, Ox, Oz e Oy, Oz , como:

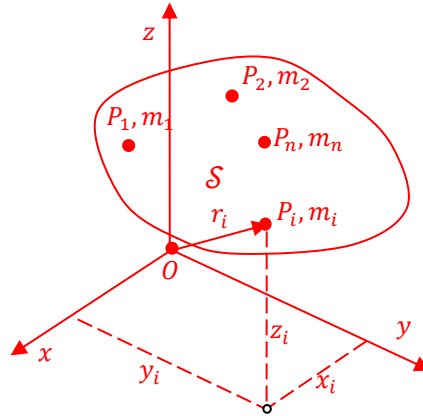


Figura 9. Determinação dos produtos de inércia de um corpo rígido.

$$J_{Oxy} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i$$

$$J_{Oxz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i$$

$$J_{Oyz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i$$

(7 - 1)

Analisando-se as fórmulas (7-1), nota-se que os produtos de inércia são medidas do **grau de assimetria da distribuição de massas** de um corpo rígido relativamente ao par de eixos considerados.

Para mostrarmos que a afirmação anterior é procedente, analisaremos a distribuição de massas segundo o par de eixos Ox, Oy .

Se o sistema material fosse simétrico em relação ao eixo Ox , ou seja, se a cada partícula de massa m_i localizada na posição $P_i(x_i, y_i, z_i)$ correspondesse uma outra partícula de massa $m_j = m_i$, localizada na posição $P_j(x_j, y_j, z_j) = P_j(x_i, -y_i, z_j)$ (Fig.10-a), o produto de inércia J_{Oxy} de \mathcal{S} seria nulo, pois

$$J_{Oxy} = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} [m_i x_i y_i + m_i x_i (-y_i)] = 0$$

(7 - 2)

J_{Oxy} também se anularia se \mathcal{S} fosse simétrico em relação ao eixo Oy , isto é, se a cada partícula de massa m_i localizada na posição $P_i(x_i, y_i, z_i)$ correspondesse uma outra partícula de massa $m_j = m_i$ localizada na posição $P_j(x_j, y_j, z_j) = P_j(-x_i, y_i, z_j)$ (Fig.10-b), pois, em tal caso, teríamos:

$$J_{Oxy} = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} [m_i x_i y_i + m_i (-x_i) y_i] = 0$$

(7 - 3)

Por outro lado, se todas as projeções das posições das partículas de \mathcal{S} sobre o plano Oxy se localizassem ou no par de quadrantes $\{(x > 0, y > 0), (x < 0, y < 0)\}$ ou em $\{(x > 0, y < 0), (x < 0, y > 0)\}$, o valor de J_{Oxy} seria claramente distinto de zero.

Na Fig.11-a apresenta-se uma distribuição antissimétrica de duas massas $m_1 = m_2 = m$, a primeira localizada em $P_1(x, y, z_1)$ e a segunda em $P_2(-x, -y, z_2)$. Para esse sistema, o valor de J_{Oxy} é dado por:

$$J_{Oxy} = mxy + m(-x)(-y) = 2mxy \tag{7 - 4}$$

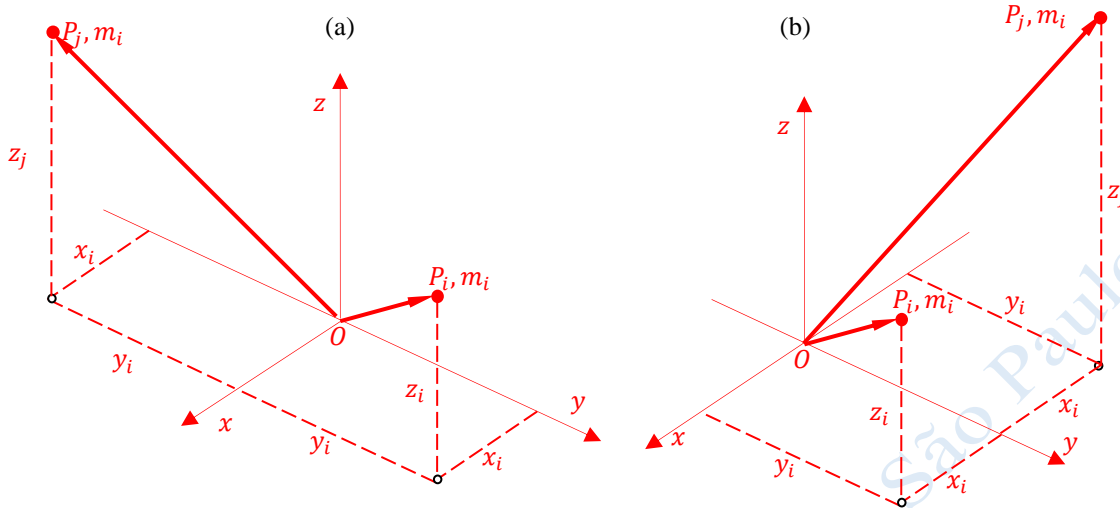


Figura 10. Distribuições de massas simétricas: (a) em relação ao eixo Ox ; (b) em relação ao eixo Oy .

No exemplo da Fig.11-b, o sistema material apresenta duas massas $m_1 = m_2 = m$, a primeira localizada em $P_1(x, -y, z_1)$ e a segunda em $P_2(-x, y, z_2)$. Para um tal sistema, o produto de inércia J_{Oxy} vale

$$J_{Oxy} = mx(-y) + m(-x)y = -2mxy \tag{7 - 5}$$

A discussão anterior dá origem ao seguinte conjunto de **regras de simetria** que permitem identificar casos simples em que o produto de inércia se anula:

- (a) se um corpo homogêneo possui um plano π de simetria, seu produto de inércia $J_{O\mu\tau}$ em relação a um polo O pertencente a π e a um par de eixos $O\mu$ e $O\tau$, dos quais um deles (por exemplo, $O\mu$) é normal a π , se anula (Fig.12-a);
- (b) se um corpo homogêneo possui um eixo de simetria e , seu produto de inércia $J_{O\mu\tau}$ em relação a um polo O pertencente a e e a um par de eixos $O\mu$ e $O\tau$, dos quais um coincide com o eixo de simetria, se anula (Fig.12-b);
- (c) se um corpo homogêneo possui um centro de simetria esférica O , seu produto de inércia relativo a O e a quaisquer pares de eixos concorrentes com O se anula (Fig.12-c).

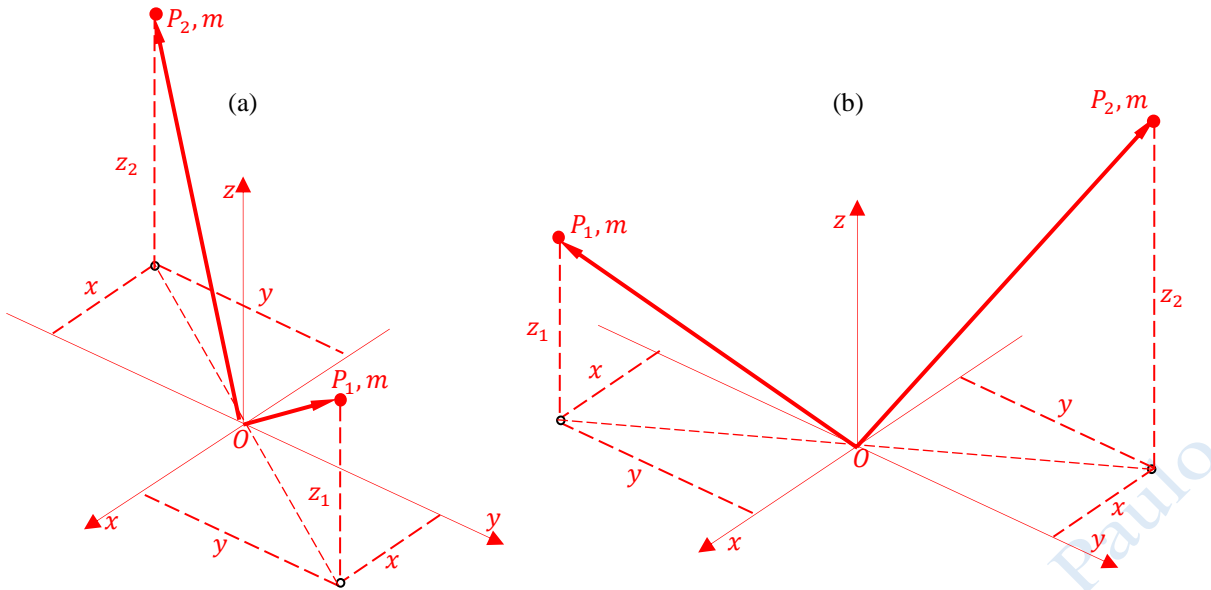


Figura 11. Sistemas materiais antissimétricos constituídos por duas massas iguais.

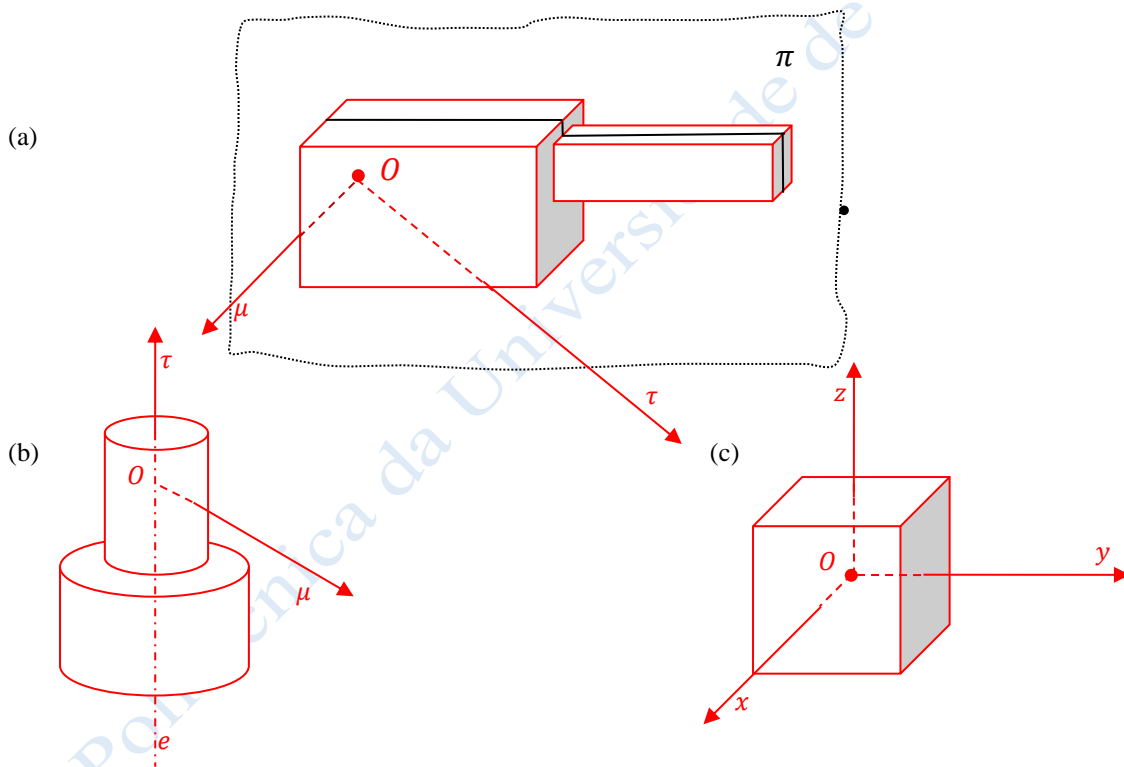


Figura 12. Corpos exibindo elementos de simetria: (a) planar; (b) axial; (c) esférica.

8. Momentos e produtos de inércia de sistemas materiais contínuos

As fórmulas (5-4) e (7-1), definidas para sistemas constituídos por partículas materiais, estendem-se naturalmente a sistemas materiais contínuos, bastando apenas substituir as somatórias por integrais de volume, de superfície ou de linha, conforme sejam tais sistemas assimiláveis a corpos volumétricos, superficiais ou curvilíneos (Fig.13).

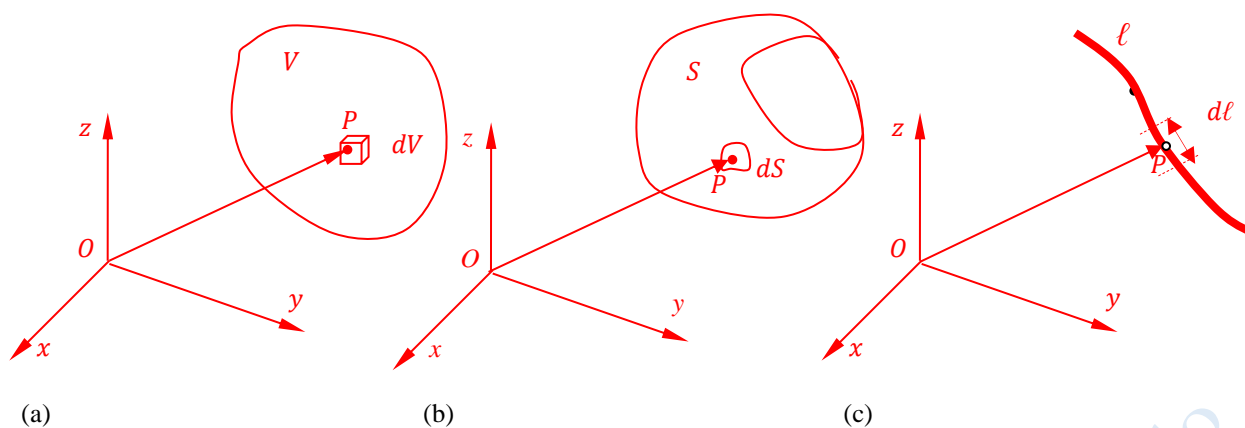


Figura 13. Sistemas materiais contínuos: (a) volumétricos; (b) superficiais; (c) curvilíneos.

Para sistemas contínuos, em que $\rho(x, y, z)$, $\sigma(x, y, z)$, $\lambda(x, y, z)$ são, respectivamente, as densidades volumétrica, superficial e linear na posição (x, y, z) , as expressões dos momentos de inércia em relação aos eixos Ox , Oy e Oz , se transformam em

$$\begin{aligned}
 J_{Ox} &= \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV \\
 J_{Oy} &= \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV \\
 J_{Oz} &= \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV
 \end{aligned} \tag{8-1}$$

ou

$$\begin{aligned}
 J_{Ox} &= \iint_S (y^2 + z^2) \sigma(x, y, z) dS \\
 J_{Oy} &= \iint_S (x^2 + z^2) \sigma(x, y, z) dS \\
 J_{Oz} &= \iint_S (x^2 + y^2) \sigma(x, y, z) dS
 \end{aligned} \tag{8-2}$$

ou

$$\begin{aligned}
 J_{Ox} &= \int_{\ell}^{(x,y,z) \in \ell} (y^2 + z^2) \lambda(x, y, z) d\ell \\
 J_{Oy} &= \int_{\ell}^{(x,y,z) \in \ell} (x^2 + z^2) \lambda(x, y, z) d\ell \\
 J_{Oz} &= \int_{\ell}^{(x,y,z) \in \ell} (x^2 + y^2) \lambda(x, y, z) d\ell
 \end{aligned} \tag{8-3}$$

Já as expressões dos produtos de inércia, para sistemas materiais contínuos, assumem as formas

$$\begin{aligned}
 J_{Oxy} &= \iiint_V^{(x,y,z) \in V} xy\rho(x, y, z) dV \\
 J_{Oxz} &= \iiint_V^{(x,y,z) \in V} xz\rho(x, y, z) dV \\
 J_{Oyz} &= \iiint_V^{(x,y,z) \in V} yz\rho(x, y, z) dV
 \end{aligned} \tag{8-4}$$

ou

$$\begin{aligned}
 J_{Oxy} &= \iint_S^{(x,y,z) \in S} xy\sigma(x, y, z) dS \\
 J_{Oxz} &= \iint_S^{(x,y,z) \in S} xz\sigma(x, y, z) dS \\
 J_{Oyz} &= \iint_S^{(x,y,z) \in S} yz\sigma(x, y, z) dS
 \end{aligned} \tag{8-5}$$

ou

$$\begin{aligned}
 J_{Oxy} &= \int_{\ell}^{(x,y,z) \in \ell} xy\lambda(x, y, z) d\ell \\
 J_{Oxz} &= \int_{\ell}^{(x,y,z) \in \ell} xz\lambda(x, y, z) d\ell \\
 J_{Oyz} &= \int_{\ell}^{(x,y,z) \in \ell} yz\lambda(x, y, z) d\ell
 \end{aligned} \tag{8-6}$$

9. Exemplos de cálculo de momentos e produtos de inércia de sistemas materiais contínuos

Nos dois tópicos seguintes serão apresentados exemplos de cálculo de momentos e produtos de inércia de figuras planas exibindo formas simples – retângulo e círculo.

9.1. Momentos e produtos de inércia de uma placa retangular

Considere-se determinar os momentos e produtos de inércia de uma placa retangular de massa m , lados a e b e densidade homogênea σ conforme ilustrado na Fig.14.

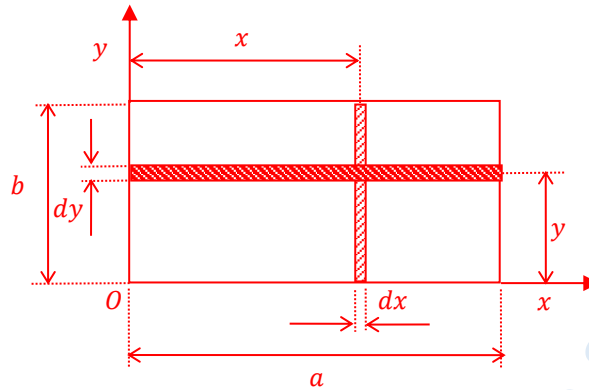


Figura 14. Determinação dos momentos e produtos de inércia de uma placa retangular homogênea.

De acordo com as fórmulas (8-1) a (8-3), os momentos de inércia J_{Ox} , J_{Oy} e J_{Oz} da placa são dados, respectivamente, por:

$$J_{Ox} = \iint_S^{(x,y,z) \in S} (y^2 + z^2) \sigma dS = \sigma \iint_S^{(x,y,z) \in S} y^2 dS = \sigma \int_0^b y^2 a dy = \sigma a \frac{y^3}{3} \Big|_0^b = \sigma a \frac{b^3}{3} = m \frac{b^2}{3} \quad (9.1 - 1)$$

$$J_{Oy} = \iint_S^{(x,y,z) \in S} (x^2 + z^2) \sigma dS = \sigma \iint_S^{(x,y,z) \in S} x^2 dS = \sigma \int_0^a x^2 b dx = \sigma b \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \sigma b \frac{a^3}{3} = m \frac{a^2}{3} \quad (9.1 - 2)$$

$$\begin{aligned} J_{Oz} &= \iint_S^{(x,y,z) \in S} (x^2 + y^2) \sigma dS \\ &= \sigma \iint_S^{(x,y,z) \in S} (x^2 + y^2) dS = \sigma \int_0^a \left[\int_0^b (x^2 + y^2) dy \right] dx = \sigma \int_0^a \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^b \\ &= \sigma \int_0^a \left(x^2 b + \frac{b^3}{3} \right) dx = \sigma \left(\frac{x^3}{3} b + \frac{b^3}{3} x \right) \Big|_0^a = \sigma \left(\frac{a^3}{3} b + \frac{b^3}{3} a \right) = \sigma ab \left(\frac{a^2 + b^2}{3} \right) \\ &= m \frac{a^2 + b^2}{3} \quad (9.1 - 3) \end{aligned}$$

Alternativamente, poderíamos ter determinado o momento de inércia J_{Oz} da placa retangular utilizando a equação (5-7), que relaciona o momento polar de inércia J_O com os momentos axiais de inércia J_{Ox} , J_{Oy} e J_{Oz} . Tomando-se como referência tal equação, ou seja,

$$2J_O = J_{Ox} + J_{Oy} + J_{Oz} \quad (9.1 - 4)$$

e notando que em uma figura do plano Oxy o eixo Oz corresponde ao seu traço O , de modo que

$$J_{Oz} = J_O \quad (9.1 - 5)$$

resulta:

$$2J_{Oz} = J_{Ox} + J_{Oy} + J_{Oz} \quad (9.1 - 6)$$

Conclui-se, portanto, que

$$J_{Oz} = J_{Ox} + J_{Oy} \quad (9.1 - 7)$$

relação válida para qualquer figura plana (no caso deste exemplo, trata-se do plano Oxy) e que, aplicada à resolução do problema em consideração, conduz a

$$J_{Oz} = J_{Ox} + J_{Oy} = m \frac{b^2}{3} + m \frac{a^2}{3} = m \frac{a^2 + b^2}{3} \quad (9.1 - 8)$$

resultado idêntico ao obtido previamente, como era de se esperar.

Os produtos de inércia da placa retangular são obtidos a partir das fórmulas (8-4) a (8-6), ou seja:

$$\begin{aligned} J_{Oxy} &= \sigma \iint_S^{(x,y,z) \in S} xy \, dS = \sigma \int_0^a \left[\int_0^b xy \, dy \right] dx = \sigma \int_0^a \left(x \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^b dx = \sigma \int_0^a x \frac{b^2}{2} dx = \sigma \frac{b^2}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a \\ &= \sigma \frac{a^2 b^2}{4} = m \frac{ab}{4} \end{aligned} \quad (9.1 - 9)$$

$$J_{Oxz} = \sigma \iint_S^{(x,y,z) \in S} xz \, dS = \sigma \iint_S^{(x,y,z) \in S} x \cdot 0 \, dS = 0 \quad (9.1 - 10)$$

$$J_{Oyz} = \sigma \iint_S^{(x,y,z) \in S} yz \, dS = \sigma \iint_S^{(x,y,z) \in S} y \cdot 0 \, dS = 0 \quad (9.1 - 11)$$

9.2. Momentos e produtos de inércia de uma placa circular

Considere-se determinar os momentos e produtos de inércia de uma placa circular de massa m , raio R e densidade homogênea σ .

De acordo com a Fig.15, o momento de inércia J_{Oz} é obtido a partir da terceira das fórmulas (8-2), ou seja:

$$J_{Oz} = \iint_S^{(x,y,z) \in S} (x^2 + y^2) \sigma \, dS = \sigma \int_0^R r^2 2\pi r \, dr = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 \, dr = 2\pi\sigma \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \pi\sigma \frac{R^4}{2} = m \frac{R^2}{2} \quad (9.2 - 1)$$

Lembrando que, para figuras planas,

$$J_{Oz} = J_{Ox} + J_{Oy} \quad (9.2 - 2)$$

e que, devido à simetria cilíndrica da placa circular relativamente ao eixo Oz ,

$$J_{Ox} = J_{Oy} \quad (9.2 - 3)$$

resulta:

$$J_{Ox} = J_{Oy} = \frac{J_{Oz}}{2} = m \frac{R^2}{4} \quad (9.2 - 4)$$

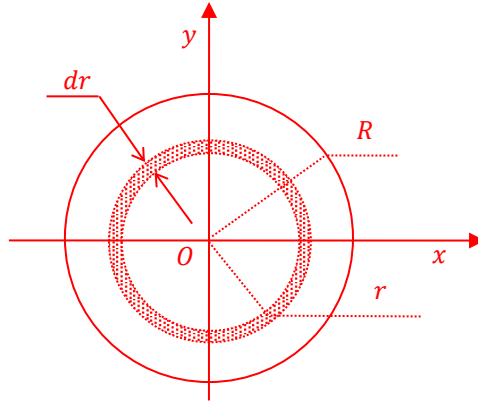


Figura 15. Determinação dos momentos e produtos de inércia de uma placa circular.

O produto de inércia da placa J_{Oxy} é nulo, em virtude da simetria cilíndrica apontada acima. Os demais produtos de inércia J_{Oxz} e J_{Oyz} são nulos, pois o plano $z = 0$ é um plano de simetria².

10. Composição de momentos e produtos de inércia

Para determinar o momento ou o produto de inércia de um corpo rígido \mathcal{R} qualquer, admite-se, inicialmente, que sua forma geométrica pode ser gerada a partir da aplicação de operações de **união** e **subtração** a um conjunto de corpos rígidos $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n$. Em seguida, aplicam-se as seguintes regras:

- Se $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, o momento (produto) de inércia de \mathcal{R} em relação a um eixo $O\vec{u}$ (a um par de eixos $O\vec{u}, O\vec{v}$) é a soma dos respectivos momentos (produtos) de inércia de \mathcal{R}_1 e de \mathcal{R}_2 em relação ao mesmo eixo $O\vec{u}$ (aos mesmos pares de eixos $O\vec{u}, O\vec{v}$).
- Se $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2$, o momento (produto) de inércia de \mathcal{R} em relação a um eixo $O\vec{u}$ (a um par de eixos $O\vec{u}, O\vec{v}$) é a diferença dos respectivos momentos (produtos) de inércia de \mathcal{R}_1 e de \mathcal{R}_2 em relação ao mesmo eixo $O\vec{u}$ (aos mesmos pares de eixos $O\vec{u}, O\vec{v}$).

As Figs.16a-b ilustram dois casos elementares de composição de momentos e produtos de inércia pelas vias aditiva e subtrativa, respectivamente. No primeiro caso (Fig.16-a), os momentos e produtos de inércia da figura composta são obtidos a partir da aplicação das fórmulas seguintes:

$$\begin{aligned} J_{Ox} &= J_{Ox}^A + J_{Ox}^B \\ J_{Oy} &= J_{Oy}^A + J_{Oy}^B \\ J_{Oz} &= J_{Oz}^A + J_{Oz}^B \end{aligned} \quad (10 - 1)$$

² Supõe-se, nesse caso, que $z = 0$ situa-se a meia espessura da placa.

$$\begin{aligned}
 J_{Oxy} &= J_{Oxy}^A + J_{Oxy}^B \\
 J_{Oxz} &= J_{Oxz}^A + J_{Oxz}^B \\
 J_{Oyz} &= J_{Oyz}^A + J_{Oyz}^B
 \end{aligned}
 \tag{10 - 2}$$

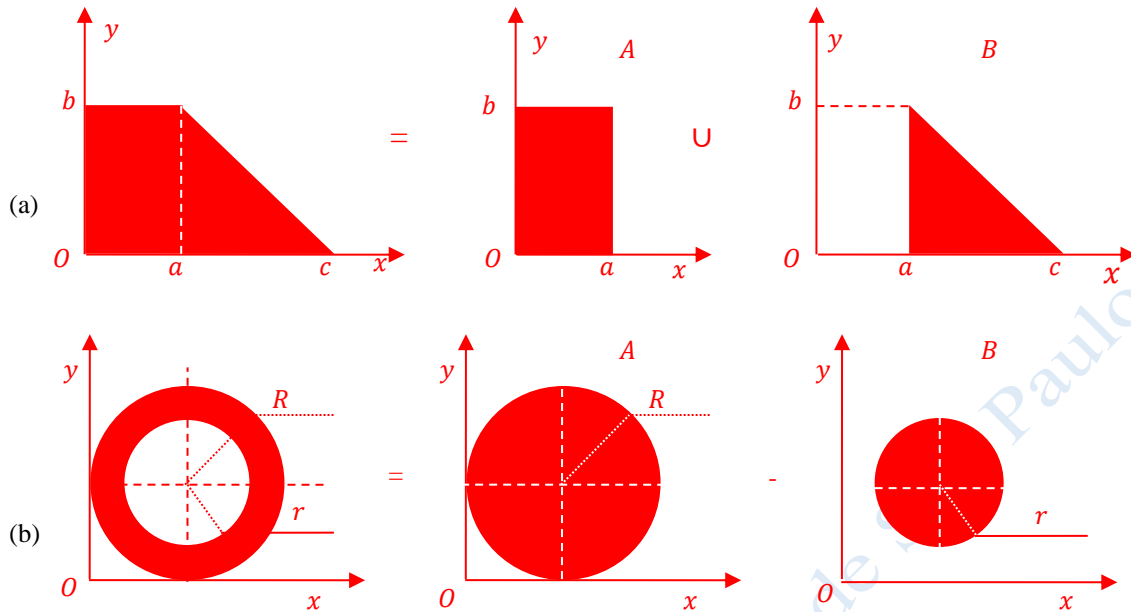


Figura 16. Figuras compostas por: (a) união; (b) subtração.

No segundo caso (Fig.16-b), calculam-se os momentos e produtos de inércia da figura composta a partir das fórmulas abaixo:

$$\begin{aligned}
 J_{Ox} &= J_{Ox}^A - J_{Ox}^B \\
 J_{Oy} &= J_{Oy}^A - J_{Oy}^B \\
 J_{Oz} &= J_{Oz}^A - J_{Oz}^B
 \end{aligned}
 \tag{10 - 3}$$

e

$$\begin{aligned}
 J_{Oxy} &= J_{Oxy}^A - J_{Oxy}^B \\
 J_{Oxz} &= J_{Oxz}^A - J_{Oxz}^B \\
 J_{Oyz} &= J_{Oyz}^A - J_{Oyz}^B
 \end{aligned}
 \tag{10 - 4}$$

11. Teorema de Steiner ou dos eixos paralelos

Conforme será demonstrado nesta sessão, sendo conhecidos os momentos e produtos de inércia de um corpo rígido \mathcal{S} em relação a eixos ortogonais Gx, Gy, Gz passantes pelo seu centro de massa G , pode-se determinar os respectivos momentos e produtos de inércia de \mathcal{S} em relação a eixos OX, OY, OZ paralelos, respectivamente, a Gx, Gy, Gz .

Considerando-se os sistemas de referência $Gxyz$ e $OXYZ$ da Fig.17, a descrição das coordenadas de um ponto material $P_i(x_i, y_i, z_i)$ de massa m_i do corpo rígido \mathcal{S} no sistema $OXYZ$ se faz por meio de uma transformação linear de translação, definida por:

$$\begin{aligned} X_i &= a + x_i \\ Y_i &= b + y_i \\ Z_i &= c + z_i \end{aligned} \tag{11 - 1}$$

em que a , b e c são as coordenadas do centro de massa G de \mathcal{S} no sistema $OXYZ$, ou seja, $G = (a, b, c)$.

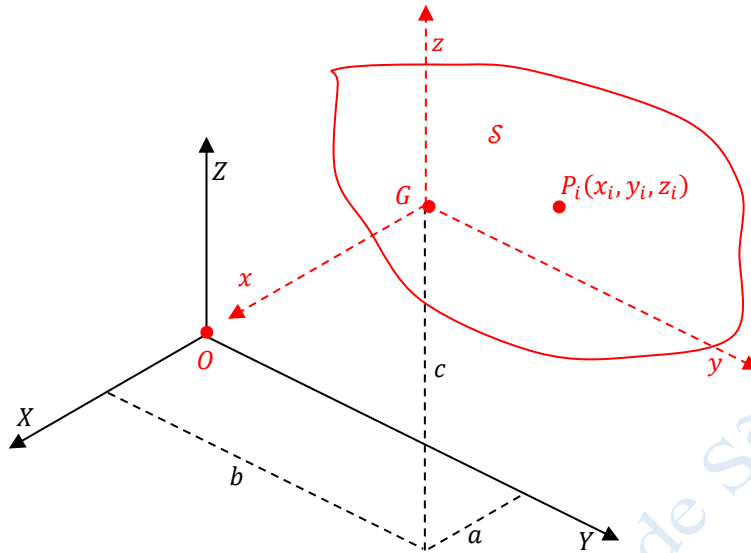


Figura 17. Cálculo de momentos e produtos de inércia relativos a eixos transladados.

Introduzindo-se a transformação (11-1) na expressão do momento de inércia J_{OX} de \mathcal{S} , resulta:

$$\begin{aligned} J_{OX} &= \sum_{i=1}^n m_i(Y_i^2 + Z_i^2) = \sum_{i=1}^n m_i[(b + y_i)^2 + (c + z_i)^2] \\ \Rightarrow J_{OX} &= \sum_{i=1}^n m_i(y_i^2 + z_i^2) + 2b \sum_{i=1}^n m_i y_i + 2c \sum_{i=1}^n m_i z_i + (b^2 + c^2) \sum_{i=1}^n m_i \end{aligned} \tag{11 - 2}$$

No entanto, como os eixos x, y, z passam pelo centro de massa de \mathcal{S} , tem-se:

$$\sum_{i=1}^n m_i y_i = \sum_{i=1}^n m_i z_i = 0 \tag{11 - 3}$$

Por outro lado,

$$\sum_{i=1}^n m_i(y_i^2 + z_i^2) = J_{Gx} \tag{11 - 4}$$

onde J_{Gx} é o momento de inércia de \mathcal{S} em relação ao eixo baricentral Gx , e

$$\sum_{i=1}^n m_i = m \tag{11 - 5}$$

onde m é a massa total de \mathcal{S} .

Notando, finalmente, que

$$\sqrt{b^2 + c^2} = d_{Gx} \quad (11 - 6)$$

onde d_{Gx} é a distância entre os eixos OX e Gx , chega-se, finalmente, à expressão do **teorema de Steiner**, também chamado **teorema dos eixos paralelos**:

$$J_{OX} = J_{Gx} + md_{Gx}^2 \quad (11 - 7)$$

Expressões análogas existem para os momentos de inércia em relação aos eixos OY e OZ , de modo que podemos agrupá-las todas na forma:

$$\begin{aligned} J_{OX} &= J_{Gx} + md_{Gx}^2 \\ J_{OY} &= J_{Gy} + md_{Gy}^2 \\ J_{OZ} &= J_{Gz} + md_{Gz}^2 \end{aligned} \quad (11 - 8)$$

Introduzindo-se a transformação (11-1) na expressão do produto de inércia J_{OXY} de \mathcal{S} , obtém-se:

$$\begin{aligned} J_{OXY} &= \sum_{i=1}^n m_i X_i Y_i = \sum_{i=1}^n m_i (a + x_i)(b + y_i) \\ \Rightarrow J_{OXY} &= \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i + a \sum_{i=1}^n m_i y_i + b \sum_{i=1}^n m_i x_i + ab \sum_{i=1}^n m_i \end{aligned} \quad (11 - 9)$$

Após um desenvolvimento similar ao da expressão de J_{OX} , chega-se a:

$$J_{OXY} = J_{Gxy} + mab \quad (11 - 10)$$

De forma absolutamente análoga, obtém-se as expressões dos demais produtos de inércia referidos aos eixos transladados OY e OZ , obtendo-se, ao final, o seguinte conjunto de fórmulas:

$$\begin{aligned} J_{OXY} &= J_{Gxy} + mab \\ J_{OXZ} &= J_{Gxz} + mac \\ J_{OYZ} &= J_{Gyz} + mbc \end{aligned} \quad (11 - 11)$$

12. Determinação do momento de inércia em relação a um eixo $O\vec{u}$ arbitrário em função dos componentes da matriz de inércia relativa ao polo O

Admitiremos que sejam conhecidos todos os componentes da matriz de inércia de um corpo rígido \mathcal{S} em relação a um sistema de eixos $Oxyz$, com origem em O (Fig.18). Em tal circunstância, mostraremos que é possível expressar o momento de inércia de \mathcal{S} em relação a um eixo arbitrário $O\vec{u}$ passante pelo polo O , em função dos componentes da matriz de inércia, ou seja, de $J_{Ox}, J_{Oy}, J_{Oz}, J_{Oxy}, J_{Oxz}$ e J_{Oyz} .

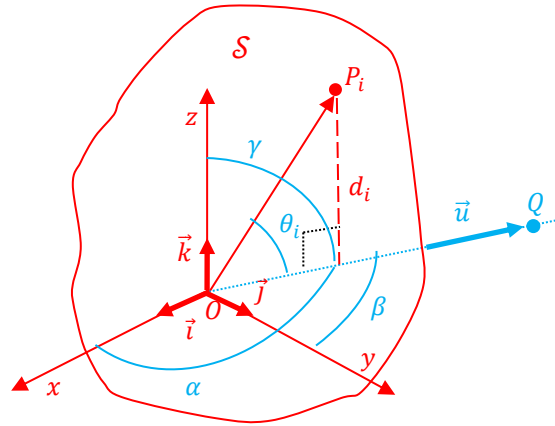


Figura 18. Determinação do momento de inércia de um corpo rígido em relação a um eixo arbitrário $O\vec{u}$.

Notemos que a equação vetorial que fornece os pontos Q do eixo $O\vec{u}$ é dada por:

$$Q = \lambda(\cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}) \quad (12 - 1)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como o momento de inércia em relação ao eixo arbitrário $O\vec{u}$ é dado pela equação (5-3), ou seja,

$$J_{O\vec{u}} = \sum_{i=1}^n m_i |(P_i - O) \wedge \vec{u}|^2 \quad (12 - 2)$$

desenvolveremos algebricamente a expressão $(P_i - O) \wedge \vec{u}$, na forma como segue:

$$(P_i - O) \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (P_i - O) \wedge \vec{u} = (y_i \cos \gamma - z_i \cos \beta) \vec{i} + (z_i \cos \alpha - x_i \cos \gamma) \vec{j} + (x_i \cos \beta - y_i \cos \alpha) \vec{k} \quad (12 - 3)$$

Elevando-se o módulo da expressão acima ao quadrado, ou seja

$$d_i^2 = |(P_i - O) \wedge \vec{u}|^2 = (y_i \cos \gamma - z_i \cos \beta)^2 + (z_i \cos \alpha - x_i \cos \gamma)^2 + (x_i \cos \beta - y_i \cos \alpha)^2$$

obtem-se:

$$d_i^2 = (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) x_i^2 + (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) y_i^2 + (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) z_i^2 - 2 \cos \alpha \cos \beta x_i y_i - 2 \cos \alpha \cos \gamma x_i z_i - 2 \cos \beta \cos \gamma y_i z_i \quad (12 - 4)$$

Substituindo-se a expressão acima em (12-2), resulta:

$$J_{O\vec{u}} = (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \sum_{i=1}^n m_i x_i^2 + (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 + (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) \sum_{i=1}^n m_i z_i^2 - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i - 2 \cos \alpha \cos \gamma \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \quad (12 - 5)$$

Reagrupando-se os termos da expressão anterior, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 J_{O\vec{u}} = & \cos^2 \alpha \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) + \cos^2 \beta \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2) + \cos^2 \gamma \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) \\
 & - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i - 2 \cos \alpha \cos \gamma \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i
 \end{aligned}
 \tag{12 - 6}$$

Substituindo-se na expressão acima os símbolos dos momentos e produtos de inércia, chega-se a:

$$\begin{aligned}
 J_{O\vec{u}} = & \cos^2 \alpha J_{Ox} + \cos^2 \beta J_{Oy} + \cos^2 \gamma J_{Oz} \\
 & - 2 \cos \alpha \cos \beta J_{Oxy} - 2 \cos \alpha \cos \gamma J_{Oxz} - 2 \cos \beta \cos \gamma J_{Oyz}
 \end{aligned}
 \tag{12 - 7}$$

Introduzindo-se a matriz de inércia

$$[J_O] = \begin{bmatrix} J_{Ox} & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oxy} & J_{Oy} & -J_{Oyz} \\ -J_{Oxz} & -J_{Oyz} & J_{Oz} \end{bmatrix}
 \tag{12 - 8}$$

e o vetor de cossenos diretores expresso na forma matricial, ou seja,

$$[u] = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix}
 \tag{12 - 9}$$

Chega-se, finalmente, a:

$$J_{O\vec{u}} = [\cos \alpha \quad \cos \beta \quad \cos \gamma] \cdot \begin{bmatrix} J_{Ox} & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oxy} & J_{Oy} & -J_{Oyz} \\ -J_{Oxz} & -J_{Oyz} & J_{Oz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} = [u]^T [J_O] [u]
 \tag{12 - 10}$$

É importante mais uma vez frisar que o valor de $J_{O\vec{u}}$ é sempre positivo, anulando-se apenas na rara situação em que o corpo rígido \mathcal{S} é assimilável a um conjunto de partículas localizadas sobre o eixo $O\vec{u}$. Portanto, quaisquer que sejam os eixos $O\vec{u}$ considerados, a condição abaixo é sempre satisfeita:

$$[u]^T \cdot [J_O] \cdot [u] \geq 0
 \tag{12 - 11}$$

13. Exemplo de cálculo de matriz de inércia de corpo tridimensional

Considere-se o sólido ilustrado na Fig. 19, em que as barras delgadas e homogêneas AB , OC e DE têm comprimento a e massa m . Pede-se determinar a matriz de inércia desse corpo no polo O , bem como seu momento de inércia em torno do eixo $O\vec{u} = (D - O)/|D - O|$.

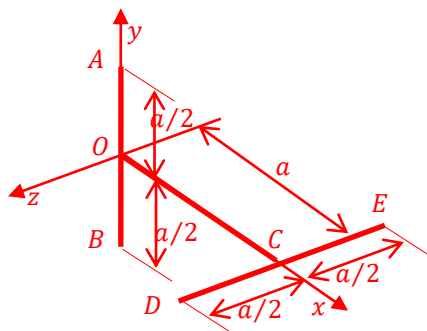


Figura 19. Corpo rígido composto por barras delgadas.

O momento de inércia de uma barra delgada em relação a um eixo perpendicular, passando pelo seu centro de massa, pode ser assim calculado:

$$J_{Ox} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 \rho dx = \rho \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = m \frac{a^2}{12} \quad (13 - 1)$$

As contribuições à matriz de inércia das barras são indicadas a seguir:

- barra AB

$$J_{Ox}^{AB} = \frac{ma^2}{12}$$

$$J_{Oy}^{AB} = 0 \quad (13 - 2)$$

$$J_{Oz}^{AB} = \frac{ma^2}{12}$$

$$J_{Oxy}^{AB} = 0$$

$$J_{Oxz}^{AB} = 0 \quad (13 - 3)$$

$$J_{Oyz}^{AB} = 0$$

- barra OC

$$J_{Ox}^{OC} = 0$$

$$J_{Oy}^{OC} = J_{Gy}^{OC} + m \left(\frac{a}{2}\right)^2 = m \frac{a^2}{12} + m \frac{a^2}{4} = \frac{ma^2}{3} \quad (13 - 4)$$

$$J_{Oz}^{OC} = \frac{ma^2}{3}$$

$$J_{Oxy}^{OC} = 0$$

$$J_{Oxz}^{OC} = 0 \quad (13 - 5)$$

$$J_{Oyz}^{OC} = 0$$

- barra DE

$$J_{Ox}^{DE} = \frac{ma^2}{12}$$

$$J_{Oy}^{DE} = \frac{ma^2}{12} + ma^2 = \frac{13}{12}ma^2 \quad (13 - 6)$$

$$J_{Oz}^{DE} = ma^2$$

$$J_{Oxy}^{DE} = 0$$

$$J_{Oxz}^{DE} = 0 \quad (13 - 7)$$

$$J_{Oyz}^{DE} = 0$$

Aplicando-se a fórmula da composição aditiva de momentos e produtos de inércia, tem-se:

$$J_{Ox} = J_{Ox}^{AB} + J_{Ox}^{OC} + J_{Ox}^{DE} = \frac{ma^2}{12} + 0 + \frac{ma^2}{12} = \frac{ma^2}{6}$$

$$J_{Oy} = J_{Oy}^{AB} + J_{Oy}^{OC} + J_{Oy}^{DE} = 0 + \frac{ma^2}{3} + \frac{13ma^2}{12} = \frac{17ma^2}{12} \quad (13-8)$$

$$J_{Oz} = J_{Oz}^{AB} + J_{Oz}^{OC} + J_{Oz}^{DE} = \frac{ma^2}{12} + \frac{ma^2}{3} + ma^2 = \frac{17ma^2}{12}$$

$$J_{Oxy} = J_{Oxy}^{AB} + J_{Oxy}^{OC} + J_{Oxy}^{DE} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$J_{Oxz} = J_{Oxz}^{AB} + J_{Oxz}^{OC} + J_{Oxz}^{DE} = 0 + 0 + 0 = 0 \quad (13-9)$$

$$J_{Oyz} = J_{Oyz}^{AB} + J_{Oyz}^{OC} + J_{Oyz}^{DE} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Logo, a matriz de inércia do corpo no polo O é:

$$[J_O] = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17ma^2}{12} \end{bmatrix} \quad (13-10)$$

Os cossenos diretores da reta OD são:

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a^2/4}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \beta = 0$$

$$\cos \gamma = \frac{a/2}{\sqrt{a^2 + a^2/4}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (13-11)$$

Portanto, o momento de inércia do corpo em torno do eixo OD é dado por

$$J_{OD} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17ma^2}{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J_{OD} = \frac{ma^2}{6} \frac{4 \times 5}{25} + 0 + \frac{17ma^2}{12} \frac{5}{25} = \frac{5ma^2}{12} \quad (13-12)$$

14. Propriedades da matriz de inércia

A matriz de inércia de um corpo rígido \mathcal{S} contém termos quadráticos que dependem do particular sistema de eixos de referência adotado. Em outras palavras, considerando-se dois sistemas de eixos $Oxyz$ e $Ox'y'z'$, ambos **não** ligados a \mathcal{S} (Fig.20), a matriz de inércia de \mathcal{S} fica descrita por

$$[J_O] = \begin{bmatrix} J_{Ox} & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oxy} & J_{Oy} & -J_{Oyz} \\ -J_{Oxz} & -J_{Oyz} & J_{Oz} \end{bmatrix} \quad (14-1)$$

se se utilizar o sistema de eixos $Oxyz$, ou por

$$[J'_O] = \begin{bmatrix} J_{Ox'x'} & -J_{Ox'y'} & -J_{Ox'z'} \\ -J_{Ox'y'} & J_{Oy'y'} & -J_{Oy'z'} \\ -J_{Ox'z'} & -J_{Oy'z'} & J_{Oz'z'} \end{bmatrix} \quad (14 - 2)$$

caso o sistema de eixos $Ox'y'z'$ seja adotado.

Tomando-se por referência a Fig.20, admitiremos que $Ox'y'z'$ e $Oxyz$ estejam relacionados pela seguinte transformação linear de rotação:

$$[r'] = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [C] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [C] \cdot [\vec{r}] \quad (14 - 3)$$

em que os componentes da matriz de rotação $[C]$ são os cossenos diretores dos ângulos entre cada um dos eixos x, y, z do sistema $Oxyz$ e todos os demais eixos x', y', z' do sistema $Ox'y'z'$, ou seja:

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{x'x} & c_{x'y} & c_{x'z} \\ c_{y'x} & c_{y'y} & c_{y'z} \\ c_{z'x} & c_{z'y} & c_{z'z} \end{bmatrix} \quad (14 - 4)$$

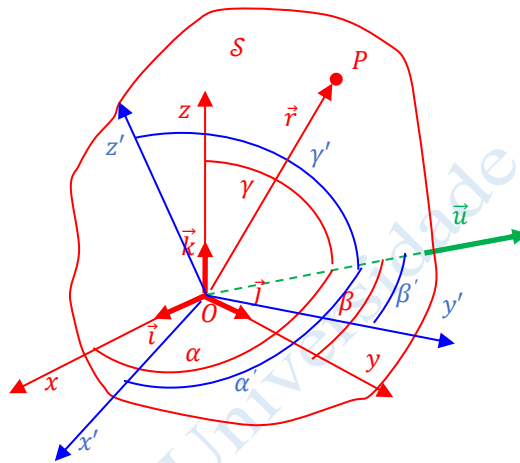


Figura 20. Descrição da matriz de inércia em dois sistemas de eixos distintos $Oxyz$ e $Ox'y'z'$ não ligados a S .

Na expressão (14-4), o termo $c_{y'z}$, por exemplo, designa o cosseno do ângulo formado entre os eixos y' e z , ou seja:

$$c_{y'z} = \cos(\langle y', z \rangle) = \vec{j}' \cdot \vec{k} \quad (14 - 5)$$

Com o intuito de estabelecer a relação algébrica entre as matrizes $[J_O]$ e $[J'_O]$, notemos que $[J_O]$ pode ser desenvolvida na forma como segue:

$$[J_O] = \begin{bmatrix} \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i x_i z_i & -\sum m_i y_i z_i & \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [J_O] = \sum m_i \left\{ (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \cdot [x_i \ y_i \ z_i] \right\}$$

$$\Rightarrow [J_O] = \sum m_i \{ r_i^2 \cdot [I] - [r_i] \cdot [r_i]^T \} \quad (14 - 6)$$

em que $[I]$ é a matriz identidade 3×3 .

Usando a equação (14-6), $[J'_O]$ se expressa como:

$$[J'_O] = \sum m_i \{ (r'_i)^2 \cdot [I] - [r'_i] \cdot [r'_i]^T \} \quad (14 - 7)$$

Notando que os módulos dos vetores \vec{r}_i não são alterados durante uma transformação linear de rotação, ou seja, que

$$(r'_i)^2 = r_i^2 \quad (14 - 8)$$

e introduzindo-se, na expressão (14-7), a transformação linear (14-4) entre os vetores \vec{r}' e \vec{r} , obtém-se:

$$[J'_O] = \sum m_i \{ r_i^2 \cdot [I] - [C] \cdot [r_i] \cdot [r_i]^T [C]^T \} \quad (14 - 9)$$

Como a matriz dos cossenos diretores $[C]$ é ortogonal, tem-se:

$$[C] \cdot [C]^T = [I] \quad (14 - 10)$$

Naturalmente, a expressão acima não se altera se a matriz $[C]$ for pós-multiplicada pela matriz identidade, ou seja, se se fizer:

$$[C] = [C] \cdot [I] \quad (14 - 11)$$

Dessa maneira, (14-10) adquire a forma:

$$[C] \cdot [I] \cdot [C]^T = [I] \quad (14 - 12)$$

Substituindo-se $[I]$ em (14-9) pela igualdade (14-12), resulta:

$$\begin{aligned} [J'_O] &= \sum m_i \{ [C] r_i^2 \cdot [I] \cdot [C]^T - [C] \cdot [r_i] \cdot [r_i]^T [C]^T \} \\ \Rightarrow [J'_O] &= [C] \cdot \sum m_i \{ r_i^2 \cdot [I] - [r_i] \cdot [r_i]^T \} \cdot [C]^T \end{aligned} \quad (14 - 13)$$

Dessa forma, chega-se, finalmente, a

$$[J'_O] = [C] \cdot [J_O] \cdot [C]^T \quad (14 - 14)$$

que é uma **transformação de similaridade**³ relacionando a matriz de inércia $[J_O]$ de \mathcal{S} , descrita no sistema de eixos $Oxyz$, com sua versão $[J'_O]$, descrita no sistema de eixos rotacionados $Ox'y'z'$.

Por ser o resultado da aplicação de uma transformação de similaridade, $[J'_O]$ preserva algumas características algébricas que a tornam similar a $[J_O]$.

A matriz de inércia apresenta os seguintes invariantes:

- traço:

$$I_1 = J_{Ox} + J_{Oy} + J_{Oz} = J_{Ox'} + J_{Oy'} + J_{Oz'} \quad (14 - 15)$$

- anisotropia:

$$\begin{aligned} I_2 &= \begin{vmatrix} J_{Oy} & -J_{Oyz} \\ -J_{Oyz} & J_{Oz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{Ox} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oxz} & J_{Oz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{Ox} & -J_{Oxy} \\ -J_{Oxy} & J_{Ox} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{Oy'} & -J_{Oy'z'} \\ -J_{Oy'z'} & J_{Oz'} \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} J_{Ox'} & -J_{Ox'z'} \\ -J_{Ox'z'} & J_{Oz'} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{Ox'} & -J_{Ox'y'} \\ -J_{Ox'y'} & J_{Oy'} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (14 - 16)$$

- determinante:

³ Nesse tipo de transformação não ocorrem modificações de forma, mas apenas translações e rotações.

$$I_3 = \begin{vmatrix} J_{Ox} & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oxy} & J_{Oy} & -J_{Oyz} \\ -J_{Oxz} & -J_{Oyz} & J_{Oz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{Ox'} & -J_{Ox'y'} & -J_{Ox'z'} \\ -J_{Ox'y'} & J_{Oy'} & -J_{Oy'z'} \\ -J_{Ox'z'} & -J_{Oy'z'} & J_{Oz'} \end{vmatrix} \quad (14 - 17)$$

O fato de a matriz de inércia $[J_O]$, quando descrita em um sistema de eixos de referência rotacionados, transformar-se por meio da transformação (14-14), caracteriza-a como membro do grupo dos **tensores de segunda ordem**. (A título de comparação, vetores, que ao serem representados em um sistema de eixos rotacionados, transformam-se de acordo com a transformação (14-3), são membros do grupo dos **tensores de primeira ordem**; escalares, por sua vez, por apresentarem uma representação independente de quaisquer sistemas de referência, são classificados como **tensores de ordem zero**).

É importante destacar que, embora a matriz de inércia $[J_O]$ seja afetada pela rotação do sistema de eixos $Oxyz$ em torno de O , o mesmo não ocorre com o momento de inércia de \mathcal{S} em relação a um eixo $O\vec{u}$, uma vez que $J_{O\vec{u}}$ depende apenas das distâncias d_i das partículas materiais P_i de \mathcal{S} ao eixo considerado (vide Fig.20). Assim, para quaisquer sistemas de referência que tenham sua origem em O , tem-se:

$$\begin{aligned} J_{O\vec{u}} &= [\cos \alpha \quad \cos \beta \quad \cos \gamma] \cdot \begin{bmatrix} J_{Ox} & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oxy} & J_{Oy} & -J_{Oyz} \\ -J_{Oxz} & -J_{Oyz} & J_{Oz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} \\ &= [\cos \alpha' \quad \cos \beta' \quad \cos \gamma'] \cdot \begin{bmatrix} J_{Ox'} & -J_{Ox'y'} & -J_{Ox'z'} \\ -J_{Ox'y'} & J_{Oy'} & -J_{Oy'z'} \\ -J_{Ox'z'} & -J_{Oy'z'} & J_{Oz'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha' \\ \cos \beta' \\ \cos \gamma' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14 - 18)$$

expressão que põe em evidência a invariância de $J_{O\vec{u}}$ a quaisquer rotações que o sistema de eixos $Oxyz$ possa vir a sofrer em torno do polo O .

15. O elipsoide de inércia

Tomando-se por referência a Fig.21, consideremos o vetor

$$(Q - O) = \frac{1}{\sqrt{J_{O\vec{u}}}} \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (15 - 1)$$

cuja magnitude é medida em unidades de *inverso da raiz quadrada do momento de inércia de um corpo rígido \mathcal{S} em relação ao eixo $O\vec{u}$* (por exemplo, em $m^{-1}kg^{-1/2}$, se se utilizar o Sistema de Unidades Internacional).

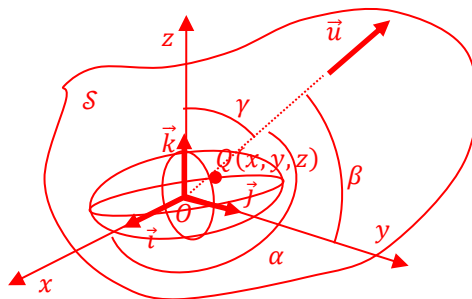


Figura 21. Elipsoide de inércia de um corpo rígido.

Introduzindo-se em (15-1) a expressão do versor \vec{u} , ou seja,

$$\vec{u} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k} \quad (15 - 2)$$

obtem-se:

$$(Q - O) = \frac{1}{\sqrt{J_{O\vec{u}}}} \cos \alpha \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{J_{O\vec{u}}}} \cos \beta \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{J_{O\vec{u}}}} \cos \gamma \vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (15 - 3)$$

Portanto, os cossenos diretores do eixo $O\vec{u}$ são dados por:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \sqrt{J_{O\vec{u}}} \cdot x \\ \cos \beta &= \sqrt{J_{O\vec{u}}} \cdot y \\ \cos \gamma &= \sqrt{J_{O\vec{u}}} \cdot z \end{aligned} \quad (15 - 4)$$

Introduzindo-se as expressões (15-4) em (12-7), abaixo replicada,

$$J_{O\vec{u}} = \cos^2 \alpha J_{Ox} + \cos^2 \beta J_{Oy} + \cos^2 \gamma J_{Oz} - 2 \cos \alpha \cos \beta J_{Oxy} - 2 \cos \alpha \cos \gamma J_{Oxz} - 2 \cos \beta \cos \gamma J_{Oyz} \quad (15 - 5)$$

chega-se a:

$$\begin{aligned} J_{O\vec{u}} &= x^2 J_{Ox} + y^2 J_{Oy} + z^2 J_{Oz} - 2xy J_{Oxy} - 2xz J_{Oxz} - 2yz J_{Oyz} \\ \Rightarrow J_{Ox} x^2 + J_{Oy} y^2 + J_{Oz} z^2 - 2J_{Oxy} xy - 2J_{Oxz} xz - 2J_{Oyz} yz &= 1 \end{aligned} \quad (15 - 6)$$

que é a equação de um elipsoide de centro O , denominado **elipsoide de inércia** do corpo rígido \mathcal{S} . Nesse elipsoide, a distância medida entre o centro O e um ponto Q qualquer localizado sobre sua superfície representa o **inverso da raiz quadrada do momento de inércia do corpo rígido \mathcal{S} em torno da reta OQ** . Dessa forma, quanto maior for o valor de $J_{O\vec{u}}$, menor será o comprimento $|Q - O|$.

É importante destacar que o elipsoide de inércia de um sólido, referente a um dado polo O , é **invariante a transformações de coordenadas**. Em outras palavras, quaisquer que sejam os sistemas de eixos $Oxyz$ considerados, **a figura do elipsoide de inércia será sempre a mesma**. Essa é uma característica fundamental dos **tensores de segunda ordem**. Dizemos, então, que o **elipsoide de inércia é a representação geométrica do tensor de inércia** do corpo.

As propriedades inerciais de rotação de um corpo rígido, independentemente de sua forma, serão sempre descritas pelo tensor de inércia, e este, por sua vez, será representado geometricamente por um elipsoide. A única exceção se aplica ao caso ideal em que o corpo rígido se assimila a uma reta infinita, quando, então, o elipsoide de inércia degenera em um cilindro (Fig.22).

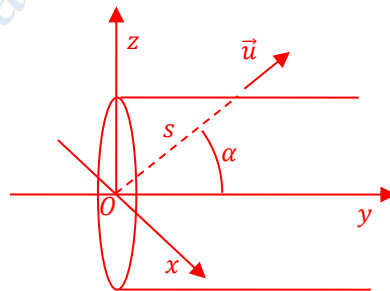


Figura 22. Degeneração do elipsoide de inércia em um cilindro.

Para que isto fique claro, basta lembrar que a distância s medida entre o pólo O e a superfície do elipsóide é

$$s = \frac{1}{\sqrt{J_{O\vec{u}}}} \quad (15 - 7)$$

Logo, à medida que \vec{u} tende para \vec{l} , $\alpha \rightarrow 0$ e $J_{O\vec{u}} \rightarrow 0$. Na condição limite, portanto, $s \rightarrow \infty$ e o elipsoide se aproxima de um cilindro.

16. Momentos e eixos principais de inércia

Quando os eixos do sistema de referência $Oxyz$ coincidem com os diâmetros de um elipsoide, a equação de sua superfície, descrita nesse sistema, assume a forma canônica, qual seja:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (16 - 1)$$

em que a, b, c representam os semi-diâmetros do elipsóide.

Analogamente, a equação do elipsoide de inércia pode assumir a forma canônica, para o que se faz necessário que os componentes da matriz de inércia $[J_O]$ de \mathcal{S} estejam referidos a um particular sistema de eixos $Ox^P y^P z^P$ (Fig.23), ditos **eixos principais de inércia**. Em tais circunstâncias, $[J_O]$ adquire a forma diagonal, ou seja,

$$[J_O] = \begin{bmatrix} J_{Ox}^P & 0 & 0 \\ 0 & J_{Oy}^P & 0 \\ 0 & 0 & J_{Oz}^P \end{bmatrix} \quad (16 - 2)$$

em que $J_{Ox}^P, J_{Oy}^P, J_{Oz}^P$ são os assim chamados **momentos principais de inércia**, e o elipsoide de inércia fica representado pela equação

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{J_{Ox}^P}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{J_{Oy}^P}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{J_{Oz}^P}}\right)^2} = 1$$

$$\Rightarrow J_{Ox}^P x^2 + J_{Oy}^P y^2 + J_{Oz}^P z^2 = 1 \quad (16 - 3)$$

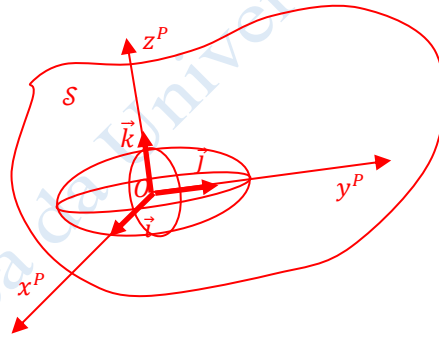


Figura 23. Elipsoide de inércia descrito em um sistema de eixos principais de inércia.

17. Eixos e momentos principais de inércia

Se os componentes da matriz de inércia $[J_O]$ de um corpo rígido \mathcal{S} forem conhecidos em relação a um sistema arbitrário de eixos $Oxyz$, as direções dos eixos principais de inércia e os respectivos valores dos momentos principais de inércia, ao longo desses eixos, podem ser determinados. Tomando-se por referência a Fig.24, notemos que os eixos principais de inércia são retas normais ao elipsoide de inércia.

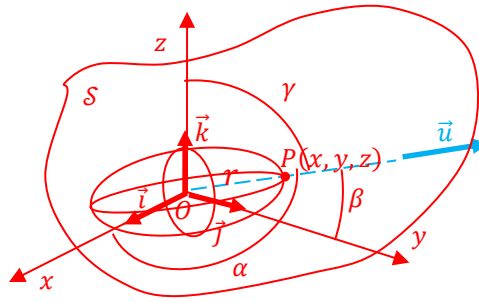


Figura 24. Eixos principais de inércia: reta normal ao elipsoide de inércia.

Por outro lado, sabemos que, sendo

$$f(x, y, z) = C \tag{17 - 1}$$

a equação de uma superfície \mathcal{S} definida no espaço euclidiano, a direção de uma reta normal a \mathcal{S} coincide com a de seu gradiente, ou seja, o versor \vec{u} de tal reta é dado por:

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(x, y, z)}{|\nabla f(x, y, z)|} = \frac{1}{|\nabla f(x, y, z)|} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right] \tag{17 - 2}$$

Igualando-se os componentes do versor \vec{u} aos respectivos cossenos diretores do eixo $O\vec{u}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1}{K} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \cos \beta &= \frac{1}{K} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \cos \gamma &= \frac{1}{K} \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \tag{17 - 3}$$

em que

$$K = |\nabla f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \tag{17 - 4}$$

Aplicando-se as fórmulas (17-2) a (17-4) à equação (15-5), representativa do elipsoide de inércia, qual seja,

$$J_{Ox}x^2 + J_{Oy}y^2 + J_{Oz}z^2 - 2J_{Oxy}xy - 2J_{Oxz}xz - 2J_{Oyz}yz = 1 \tag{17 - 5}$$

obtém-se um sistema de três equações algébricas, a saber:

$$\begin{cases} J_{Ox}x - J_{Oxy}y - J_{Oxz}z = K \cos \alpha \\ -J_{Oxy}x + J_{Oy}y - J_{Oyz}z = K \cos \beta \\ -J_{Oxz}x - J_{Oyz}y + J_{Oz}z = K \cos \gamma \end{cases} \tag{17 - 6}$$

Sendo $P(x, y, z)$ o ponto de intersecção do eixo $O\vec{u}$ com a superfície do elipsoide de inércia, e r a distância entre os pontos O e P (ou seja, $r = \overline{OP}$), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \alpha \\ \cos \beta &= \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \cos \beta \\ \cos \gamma &= \frac{z}{r} \Rightarrow z = r \cos \gamma \end{aligned} \tag{17 - 7}$$

Introduzindo-se as relações acima nas equações (17-6), obtêm-se:

$$\begin{cases} J_{Ox}r \cos \alpha - J_{Oxy}r \cos \beta - J_{Oxz}r \cos \gamma = K \cos \alpha \\ -J_{Oxy}r \cos \alpha + J_{Oy}r \cos \beta - J_{Oyz}r \cos \gamma = K \cos \beta \\ -J_{Oxz}r \cos \alpha - J_{Oyz}r \cos \beta + J_{Oz}r \cos \gamma = K \cos \gamma \end{cases} \quad (17-8)$$

Multiplicando-se cada uma das equações (17-8) por $\cos \alpha$, $\cos \beta$ e $\cos \gamma$, nesta ordem, tem-se:

$$\begin{cases} J_{Ox}r \cos^2 \alpha - J_{Oxy}r \cos \alpha \cos \beta - J_{Oxz}r \cos \alpha \cos \gamma = K \cos^2 \alpha \\ -J_{Oxy}r \cos \alpha \cos \beta + J_{Oy}r \cos^2 \beta - J_{Oyz}r \cos \beta \cos \gamma = K \cos^2 \beta \\ -J_{Oxz}r \cos \alpha \cos \gamma - J_{Oyz}r \cos \beta \cos \gamma + J_{Oz}r \cos^2 \gamma = K \cos^2 \gamma \end{cases} \quad (17-9)$$

Somando-se as três equações anteriores, resulta:

$$\begin{aligned} J_{Ox} \cos^2 \alpha + J_{Oy} \cos^2 \beta + J_{Oz} \cos^2 \gamma - 2J_{Oxy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{Oxz} \cos \alpha \cos \gamma - 2J_{Oyz} \cos \beta \cos \gamma \\ = \frac{K}{r} \end{aligned} \quad (17-10)$$

Comparando-se a equação anterior com a do momento de inércia em relação a um eixo $O\vec{u}$, ou seja,

$$\begin{aligned} J_{O\vec{u}} = J_{Ox} \cos^2 \alpha + J_{Oy} \cos^2 \beta + J_{Oz} \cos^2 \gamma - 2J_{Oxy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{Oxz} \cos \alpha \cos \gamma \\ - 2J_{Oyz} \cos \beta \cos \gamma \end{aligned} \quad (17-11)$$

conclui-se que

$$K = rJ_O^P \quad (17-12)$$

em que J_O^P é um momento principal de inércia de \mathcal{S} segundo um eixo principal de inércia passante por O .

Dessa maneira, o sistema de equações (17-9) pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} J_{Ox}r \cos^2 \alpha - J_{Oxy}r \cos \alpha \cos \beta - J_{Oxz}r \cos \alpha \cos \gamma = rJ_O^P \cos^2 \alpha \\ -J_{Oxy}r \cos \alpha \cos \beta + J_{Oy}r \cos^2 \beta - J_{Oyz}r \cos \beta \cos \gamma = rJ_O^P \cos^2 \beta \\ -J_{Oxz}r \cos \alpha \cos \gamma - J_{Oyz}r \cos \beta \cos \gamma + J_{Oz}r \cos^2 \gamma = rJ_O^P \cos^2 \gamma \end{cases} \quad (17-13)$$

Desenvolvendo-se e organizando-se o sistema de equações acima, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} J_{Ox} - J_O^P & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oxy} & J_{Oy} - J_O^P & -J_{Oyz} \\ -J_{Oxz} & -J_{Oyz} & J_{Oz} - J_O^P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17-14)$$

o qual, escrito na forma

$$\begin{bmatrix} J_{Ox} & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oxy} & J_{Oy} & -J_{Oyz} \\ -J_{Oxz} & -J_{Oyz} & J_{Oz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} = J_O^P \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (17-15)$$

evidencia que o problema de determinação dos cossenos diretores dos eixos principais de inércia de um corpo rígido é um clássico **problema de autovalores e autovetores**.

Interpretando-se o sistema de equações (17-15) do ponto de vista geométrico, observa-se que o que se busca identificar é um vetor de componentes $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ que, ao ser submetido a uma transformação linear (no caso, a matriz de inércia $[J_O]$), sofre apenas uma mudança de escala, ou seja, sua magnitude é multiplicada por J_O^P , mas sua orientação se mantém inalterada. Vetores que

exibem esse comportamento são chamados de **autovetores** e os respectivos fatores de escala que modificam suas magnitudes são denominados **autovalores**.

Além disso, como o sistema de equações (17-15) é um sistema homogêneo, o determinante da matriz $[J_O]$ deve ser nulo para que a solução seja diferente da trivial, ou seja, deve-se ter:

$$\begin{vmatrix} J_{Ox} - J_O^P & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oxy} & J_{Oy} - J_O^P & -J_{Oyz} \\ -J_{Oxz} & -J_{Oyz} & J_{Oz} - J_O^P \end{vmatrix} = 0 \quad (17 - 16)$$

A equação acima é uma equação polinomial do 3º grau em J_O^P , cujas raízes (todas reais) são os três momentos principais de inércia do corpo rígido \mathcal{S} , ou seja, $J_{Ox}^P, J_{Oy}^P, J_{Oz}^P$.

Estando determinados os momentos principais de inércia, substitui-se cada um deles na equação (17-15), a qual, uma vez resolvida, fornecerá o respectivo eixo principal de inércia. Por exemplo, substituindo-se na equação (17-15) J_O^P por J_{Ox}^P (valor obtido previamente a partir da Eq.17-6), chega-se ao sistema homogêneo

$$\begin{bmatrix} J_{Ox} - J_{Ox}^P & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oxy} & J_{Oy} - J_{Ox}^P & -J_{Oyz} \\ -J_{Oxz} & -J_{Oyz} & J_{Oz} - J_{Ox}^P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha_x \\ \cos \beta_x \\ \cos \gamma_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17 - 17)$$

do qual se podem extrair duas equações lineares independentes (pois a matriz desse sistema tem posto 2). Acrescentando-se a essas duas equações a restrição

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \beta_x + \cos^2 \gamma_x = 1 \quad (17 - 18)$$

determina-se, ao final, a orientação do eixo principal de inércia Ox^P , isto é:

$$\vec{u}_x^P = (\cos \alpha_x, \cos \beta_x, \cos \gamma_x) \quad (17 - 19)$$

Procedimento análogo se aplica à determinação dos dois outros eixos principais de inércia.

18. Distribuição dos elipsoides de inércia em um corpo rígido

Utilizando-se os eixos principais de inércia de um corpo rígido \mathcal{S} , pode-se, com certa facilidade, construir um esboço da distribuição espacial das suas propriedades inerciais de rotação. Para tanto, deve-se verificar, inicialmente, mediante análise das equações do teorema de Steiner (11-8), que os menores momentos de inércia de \mathcal{S} localizam-se no centro de massa G . Nesse polo situa-se o assim chamado **elipsoide central de inércia** de \mathcal{S} , associado à respectiva **matriz central de inércia**, cujos componentes são os **momentos centrais de inércia**.

Lembrando que as medidas dos semieixos do elipsoide de inércia são inversamente proporcionais às raízes quadradas dos momentos de inércia referentes aos respectivos eixos, desenhamos, em torno de G , o maior de todos os elipsóides de inércia de \mathcal{S} (Fig.25).

Em seguida, construímos sobre os polos A e A' dois outros elipsóides menores ao longo do eixo principal de inércia Gx^P lembrando, porém, que os comprimentos dos seus semieixos ao longo da direção Ox^P (marcados em azul, na figura) são invariantes (pois dependem apenas do momento principal de inércia J_{Ox}^P e, como A e A' pertencem a Ox^P , as distâncias das partículas materiais do corpo rígido \mathcal{S} em torno de Ax^P e de $A'x^P$ são iguais às respectivas distâncias medidas em torno de Ox^P).

Aplicando-se procedimento análogo ao anterior, desenhamos sobre os pontos B e B' , localizados no eixo Oy^P , e sobre os pontos C e C' , localizados no eixo Oz^P , dois outros pares de elipsoides de

inércia, o que vem a totalizar um conjunto de 6 elipsoides de inércia, os quais oferecem uma visão, ainda que simplificada, do campo tensorial de inércia de um corpo rígido \mathcal{S} .

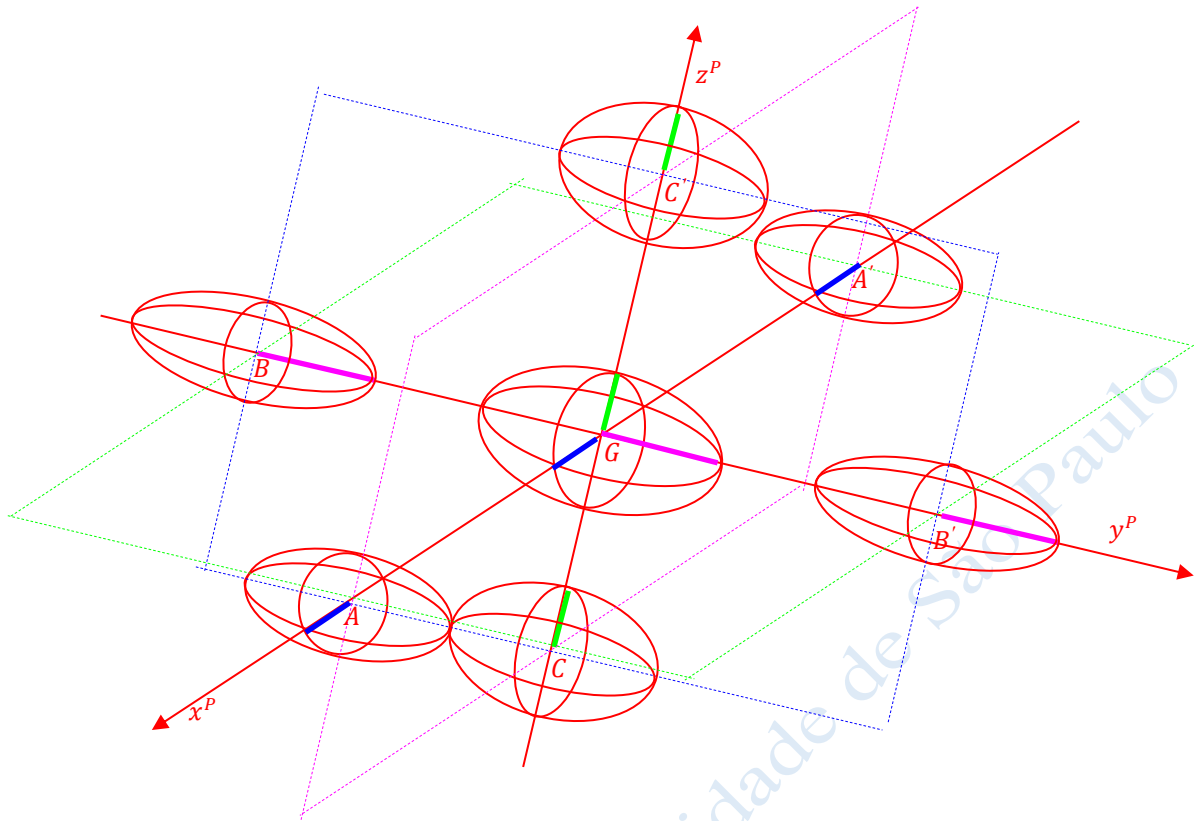


Figura 25. Distribuição espacial dos elipsoides de inércia em torno do centro de massa de um corpo rígido.

19. Relação geométrica entre o vetor rotação instantânea e o momento da quantidade de movimento

Consideremos um corpo rígido \mathcal{S} realizando movimento o mais geral possível, e façamos a redução do sistema de vetores quantidade de movimento ao centro de massa G (Fig.26).

Supondo-se que Gx, Gy, Gz sejam eixos principais de inércia, a expressão do vetor momento da quantidade de movimento de \mathcal{S} adquire a forma:

$$\vec{H}_G = [J_G][\omega] = \begin{bmatrix} J_{Gx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{Gy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{Gz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J_{Gx}\omega_x\vec{i} + J_{Gy}\omega_y\vec{j} + J_{Gz}\omega_z\vec{k} \quad (19 - 1)$$

A expressão acima indica que, em geral, $\vec{\omega}$ e \vec{H}_G não são paralelos. No entanto, sob certas circunstâncias, esses dois vetores podem se alinhar. Isso ocorre nas situações abordadas a seguir.

a) O elipsoide de inércia referente ao polo G é uma esfera

Nesse caso, todos os eixos passantes por G são eixos principais de inércia e a matriz de inércia, no polo G , tem a forma diagonal, qualquer que seja o eixo considerado. Portanto, o vetor \vec{H}_G se expressa como

$$\vec{H}_G = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J(\omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}) = J\vec{\omega} \quad (19 - 2)$$

e concluímos que, nesse caso, \vec{H}_G é paralelo a $\vec{\omega}$.

b) O corpo rígido gira em torno de um de seus eixos principais de inércia

Admitamos, por exemplo, que $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, e que J_1, J_2, J_3 sejam os momentos principais do corpo rígido no polo G . Assim, tem-se

$$\vec{H}_G = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = J_3 \omega \vec{k} \tag{19 - 3}$$

e concluímos que, nesse caso, \vec{H}_G também é paralelo a $\vec{\omega}$.

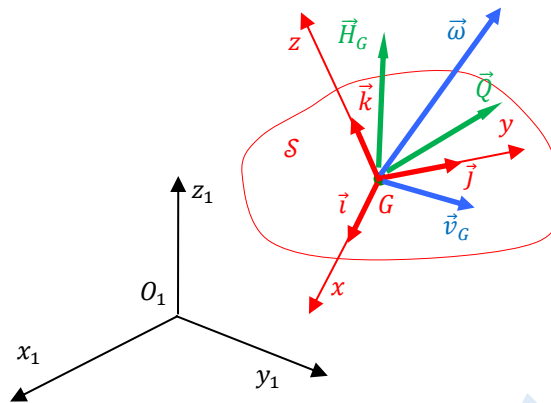


Figura 26. Relação geométrica entre $\vec{\omega}$ e \vec{H}_G .

A análise anterior nos permite afirmar que **a condição necessária e suficiente para que \vec{H}_G seja paralelo a $\vec{\omega}$ é que o vetor rotação instantânea do corpo esteja alinhado com um de seus eixos principais de inércia.**

O teorema anterior nos permite estabelecer um método direto para a determinação dos eixos principais de inércia de um corpo rígido, relativamente ao seu centro de massa G . Impondo-se que

$$\vec{H}_G = [J_G][\omega] = \lambda[\omega] \tag{19 - 4}$$

obtem-se

$$\begin{bmatrix} J_{Gx} & -J_{Gxy} & -J_{Gxz} \\ -J_{Gxy} & J_{Gy} & -J_{Gyz} \\ -J_{Gxz} & -J_{Gyz} & J_{Gz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{19 - 5}$$

o que dá origem ao sistema linear homogêneo

$$\begin{bmatrix} J_{Gx} - \lambda & -J_{Gxy} & -J_{Gxz} \\ -J_{Gxy} & J_{Gy} - \lambda & -J_{Gyz} \\ -J_{Gxz} & -J_{Gyz} & J_{Gz} - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{19 - 6}$$

para o qual existe solução não trivial apenas se

$$\begin{vmatrix} J_{Gx} - \lambda & -J_{Gxy} & -J_{Gxz} \\ -J_{Gxy} & J_{Gy} - \lambda & -J_{Gyz} \\ -J_{Gxz} & -J_{Gyz} & J_{Gz} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{19 - 7}$$

A equação (19-7) é uma equação polinomial de terceiro grau com 3 raízes reais, representando, cada qual, um dos 3 momentos de inércia J_1, J_2, J_3 do sólido. Uma vez determinados, sua substituição

no sistema de equações (19-6) acrescida da restrição (17-18), fornece as direções $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ dos 3 eixos principais de inércia do sólido. Por exemplo, substituindo-se $\lambda_1 = J_1$ em (19-6), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} J_{Gx} - J_1 & -J_{Gxy} & -J_{Gxz} \\ -J_{Gxy} & J_{Gy} - J_1 & -J_{Gyz} \\ -J_{Gxz} & -J_{Gyz} & J_{Gz} - J_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19-8)$$

As duas primeiras equações do sistema de equações lineares (19-8) determinam as componentes e_{1x} e e_{1y} do eixo principal de inércia \vec{e}_1 em função de e_{1z} . Com a restrição

$$e_{1x}^2 + e_{1y}^2 + e_{1z}^2 = 1 \quad (19 - 9)$$

\vec{e}_1 fica completamente determinado. Os demais eixos principais de inércia \vec{e}_2 e \vec{e}_3 são obtidos de forma análoga.

20. Exemplo de cálculo do momento da quantidade de movimento de um corpo rígido

Conforme ilustrado na Fig.27, um disco de massa m e raio r gira com velocidade angular ω_2 em relação ao suporte $ABOG$, de massa m_1 , o qual, por sua vez, gira com velocidade angular constante ω_1 em torno do eixo y_1 . Determinar o momento da quantidade de movimento do disco no polo O .

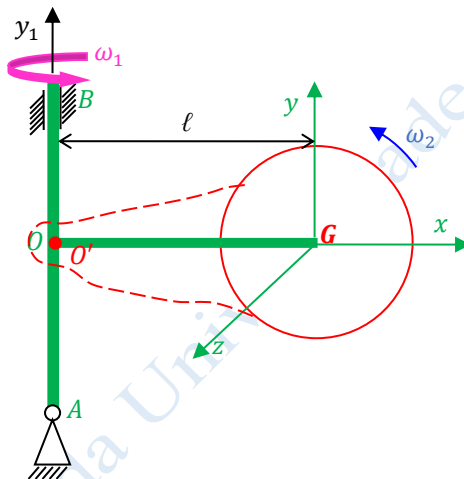


Figura 27. Disco giratório ligado a suporte giratório.

Notemos, inicialmente, que o ponto O indicado na Fig.27 na cor verde pertence ao suporte $ABOG$. Trata-se de um ponto imóvel, uma vez que se situa sobre o eixo de rotação do suporte. No entanto, existe um ponto O' (em vermelho) pertencente à extensão material do disco (delimitada pela curva tracejada em vermelho) que, no instante indicado na figura, coincide com o ponto O da haste. É esse ponto O' , portanto, que deve ser considerado no cálculo do momento da quantidade de movimento do disco, e não o ponto O fixo.

A discussão anterior nos permite escrever:

$$\vec{H}_{O'} = (G - O') \wedge m\vec{v}_{O'} + [J_{O'}][\omega] \quad (20 - 1)$$

O vetor rotação instantânea do disco é

$$\vec{\omega} = \omega_1\vec{j} + \omega_2\vec{k} \quad (20 - 2)$$

A velocidade do ponto G pertencente à haste é:

$$\vec{v}_G = \vec{v}_O + \omega_1 \vec{j} \wedge (G - O) = \vec{0} + \omega_1 \vec{j} \wedge \ell \vec{i} = -\omega_1 \ell \vec{k} \quad (20 - 3)$$

A velocidade do ponto O' pertencente à extensão material do disco é:

$$\vec{v}_{O'} = \vec{v}_G + (\omega_1 \vec{j} + \omega_2 \vec{k}) \wedge (O' - G) = -\omega_1 \ell \vec{k} + (\omega_1 \vec{j} + \omega_2 \vec{k}) \wedge (-\ell \vec{i}) = -\omega_2 \ell \vec{j} \quad (20 - 4)$$

A matriz de inércia do disco no polo O' , é:

$$[J_{O'}] = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} + m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} + m\ell^2 \end{bmatrix} \quad (20 - 5)$$

Portanto, o momento da quantidade do movimento do disco no polo O' é:

$$\vec{H}_{O'} = \ell \vec{i} \wedge m(-\omega_2 \ell \vec{j}) + \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} + m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} + m\ell^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_{O'} = -m\ell^2 \omega_2 \vec{k} + \left(\frac{mr^2}{4} + m\ell^2\right) \omega_1 \vec{j} + \left(\frac{mr^2}{2} + m\ell^2\right) \omega_2 \vec{k}$$

ou seja,

$$\vec{H}_{O'} = \left(\frac{mr^2}{4} + m\ell^2\right) \omega_1 \vec{j} + \frac{mr^2}{2} \omega_2 \vec{k} \quad (20 - 6)$$

É importante destacar que poderíamos ter chegado ao mesmo resultado caso calculássemos o momento da quantidade de movimento do disco no polo G e, em seguida aplicássemos a fórmula da mudança de polo.

Adotando-se esse procedimento, tem-se:

$$\vec{H}_G = [J_G] \cdot [\omega] = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \frac{mr^2}{4} \omega_1 \vec{j} + \frac{mr^2}{2} \omega_2 \vec{k} \quad (20 - 7)$$

e, da fórmula de mudança de polo, ou seja,

$$\vec{H}_{O'} = \vec{H}_G + (G - O') \wedge \vec{Q} = \vec{H}_G + (G - O') \wedge m\vec{v}_G \quad (20 - 8)$$

resulta

$$\vec{H}_{O'} = \vec{H}_G + (G - O') \wedge \vec{Q} = \frac{mr^2}{4} \omega_1 \vec{j} + \frac{mr^2}{2} \omega_2 \vec{k} + \ell \vec{i} \wedge m(-\omega_1 \ell \vec{k})$$

$$\Rightarrow \vec{H}_{O'} = \left(\frac{mr^2}{4} + m\ell^2\right) \omega_1 \vec{j} + \frac{mr^2}{2} \omega_2 \vec{k} \quad (20 - 9)$$

conforme o esperado.

21. Bibliografia

- [1] Appell, P., *Traité de Mécanique Rationnelle*, Tome II. Gauthier-Villars, Paris, 1904.
- [2] Beer, F.P., Johnston Jr., E.R., *Mecânica Vetorial para Engenheiros: Cinemática e Dinâmica*. Pearson Makron Books, São Paulo, 1994.
- [3] Béghin, H., *Cours de Mécanique Théorique et Appliquée*, Tome I. Gauthier-Villars, Paris, 1952.
- [4] Béghin, H., *Exercices de Mécanique*. Gauthier-Villars, Paris, 1930.
- [5] Fonseca, A., *Curso de Mecânica*, vol. III. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1977.
- [6] Fonseca, A., *Curso de Mecânica*, vol. IV. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1978.
- [7] França, L.N.F., Matsumura, A.Z., *Mecânica Geral*. Editora Edgard Blücher, São Paulo, 2004.
- [8] Giacaglia, G.E.O., *Mecânica Analítica*. Almeida Neves, Rio de Janeiro, 1978.
- [9] Pars, L.A., *A Treatise on Analytical Dynamics*. Heineman, London, 1965;
- [10] Pérès, J., *Mécanique Général*. Masson et C^{ie}, Éditeurs, Paris, 1962.
- [11] Platrier, C., *Mécanique Rationnelle*, Tome I. Dunot, Paris, 1954.