11 | Volumes e Áreas

11.1 Introdução

Vamos tratar, agora, dos volumes dos sólidos simples: prismas, pirâmides, cilindros, cones e a esfera. Intuitivamente, o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Para exprimir essa "quantidade de espaço" através de um número, devemos compará-la com uma unidade; e o resultado dessa comparação será chamado de volume.

Por exemplo, podemos medir o volume de uma panela tomando como unidade uma xícara. Enchendo a xícara de água e vertendo na panela sucessivas vezes até que esta fique completamente cheia, estamos realizando uma medida de volume. É possível que o resultado dessa comparação seja um número inteiro –digamos: 1 panela = 24 xícaras– mas é muito provável que, na última operação, sobre ainda um pouco de água na xícara. E como determinaremos essa fração?

O exemplo mostra que esse processo pode ter alguma utilidade em casos simples onde se necessita apenas de um valor aproximado para o volume, mas não funciona, mesmo na prática, para inúmeros objetos. Ou porque são muito pequenos, ou porque são grandes demais, ou simplesmente, porque são completamente sólidos. Ainda, a unidade xícara, que é inclusive muito utilizada nas receitas da boa cozinha, não é naturalmente adequada a um estudo mais geral. Vamos, então, combinar que:

a unidade de volume é o cubo de aresta 1.

Para cada unidade de comprimento, temos uma unidade correspondente de volume. Se, por exemplo, a unidade de comprimento for o centímetro (cm), então, a unidade correspondente de volume será chamada de centímetro cúbico (cm^3). Assim, o volume de um sólido S deve ser o número que exprima quantas vezes o sólido S contém o cubo unitário. Mas, como esse sólido pode ter uma forma bastante irregular, não fica claro o que significa o número de vezes que um sólido contém esse cubo. Vamos, então, tratar de obter métodos que nos permitam obter fórmulas para o cálculo de volumes dos sólidos simples.

11.2 O Paralelepípedo Retângulo

O paralelepípedo retângulo (ou simplesmente um bloco retangular) é um poliedro formado por 6 retângulos. Ele fica perfeitamente determinado por três medidas: o seu comprimento (a), a sua largura (b) e a sua altura (c).

O volume desse paralelepípedo retângulo será representado por V(a, b, c) e, como o cubo unitário é um paralelepípedo retângulo cujos comprimento, largura e altura medem 1, então, $V(1,1,1) = 1$.

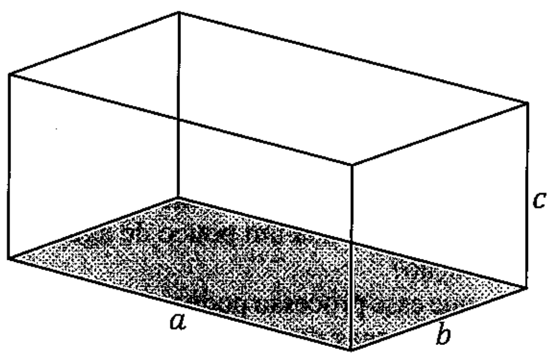

Figura 11.1: Paralelepípedo retângulo

Para obter o volume do paralelepípedo retângulo, devemos observar que ele é proporcional a cada uma de suas dimensões. Isto quer dizer que, se mantivermos, por exemplo, constantes a largura e a altura e, se multiplicarmos o comprimento por um número natural n, o volume ficará também multiplicado por n, ou seja,

$$V(na, b, c) = nV(a, b, c).$$

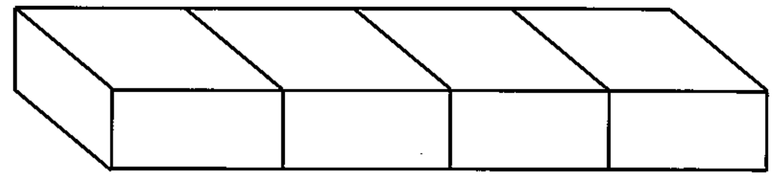

Figura 11.2

A figura 11.2 mostra 4 paralelepípedos retângulos iguais e justapostos, colados em faces iguais. Naturalmente, o volume total é 4 vezes maior que o volume de um deles.

Este fato, constatado para números naturais, também vale para qualquer número real positivo (veja Notas 1 e 2 no fim desta seção) e isto quer dizer que, mantidas constantes duas dimensões de um paralelepípedo retângulo, seu volume é proporcional à terceira dimensão. Logo, sendo a, b e c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, temos:

$$\begin{aligned} V(a,b,c) &= V(a\cdot 1, b, c) \\ &= aV(l,b,c) = aV(1, b\cdot 1, c) \\ &= abV(1,1,c) = abV(1,1,c\cdot 1) = abcV(1,1,1) \\ &= abc\cdot 1 \\ &= abc. \end{aligned}$$

Portanto, o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto de suas dimensões. Em particular, se a face de dimensões a e b está contida em um plano horizontal, chamaremos essa face de *base* e a dimensão c de *altura*. Como o produto ab é área da base, é costume dizer que o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto da área da base pela altura.

Volume do paralelepípedo = (área da base) × (altura).

Nota 1. Utilizamos, aqui, um fato completamente intuitivo (mas que, na verdade, é um axioma) que é o seguinte. Se dois sólidos são tais que possuem em comum, no máximo pontos de suas cascas, então, o volume da união de dois é a soma dos volumes de cada um.

Para explicar melhor, dizemos que um ponto P é interior a um sólido S quando existe uma esfera de centro P inteiramente contida em S. Quando P pertence a S mas não existe tal esfera, dizemos que P está na casca de

S (ou na superfície de S). Isto é o que nos permite usar termos como "justapor" ou "colar" dois sólidos. Ainda, permite dizer que, se um sólido está dividido em vários outros, então, seu volume é a soma dos volumes de suas partes.

Nota 2. O conceito de proporcionalidade é extremamente importante na Matemática elementar. Em particular na geometria, existem ocasiões em que certos resultados são facilmente verificados quando as medidas são números naturais (ou mesmo racionais), mas o que se torna um problema é estender esses mesmos resultados para números reais. O que resolve essa constrangedora situação é o teorema fundamental da proporcionalidade, que diz o seguinte:

Teorema. Sejam x e y grandezas positivas. Se x e y estão relacionadas por uma função crescente f tal que para todo natural n, $f(nx) = nf(x)$, então, para todo real r, tem-se que $f(rx) = rf(x)$.

Em palavras mais simples, dizemos que duas grandezas positivas x e y são proporcionais quando, se a primeira for multiplicada por um número natural n, então, a segunda fica também multiplicada por n. Esse teorema nos garante que, neste caso, se a primeira grandeza for multiplicada por um número real r, a segunda grandeza também fica multiplicada por r. A demonstração deste belo teorema pode ser encontrada no livro "Meu Professor de Matemática" de Elon Lages Lima na página 127.

Não estamos aqui estimulando o professor do segundo grau que faça essa demonstração em sala de aula. Muito pelo contrário. Estamos dizendo que, se o professor der para os estudantes do segundo grau, alguma justificativa de um importante resultado utilizando números naturais, ou mesmo racionais, esse procedimento não é um erro, deve ser feito dessa forma, e estará sendo adequado ao nível de desenvolvimento dos seus alunos. Por outro lado, o professor ficará consciente que, mesmo não podendo fazer a demonstração completa, estará fornecendo argumentos corretos, e deixando a generalização para um estágio posterior.

11.3 O Princípio de Cavalieri

Conseguimos estabelecer a fórmula do volume de um paralelepípedo retângulo, mas não é fácil ir adiante sem ferramentas adicionais. Uma forma confortável de prosseguir é adotar como axioma um resultado conhecido como o Princípio de Cavalieri.

Antes de enunciá-lo, observe uma experiência que se pode fazer para os alunos. Ponha, em cima da mesa, uma resma de papel. Estando ainda perfeitamente bem arrumada, ela é um paralelepípedo retângulo (fig. 11.3 a) e, portanto, tem um volume que podemos calcular. Encostando uma régua nas faces laterais, podemos transformar o paralelepípedo retângulo em um outro oblíquo (fig. 11.3b) ou, usando as mãos, poderemos moldar um sólido bem diferente (fig. 11.3c).

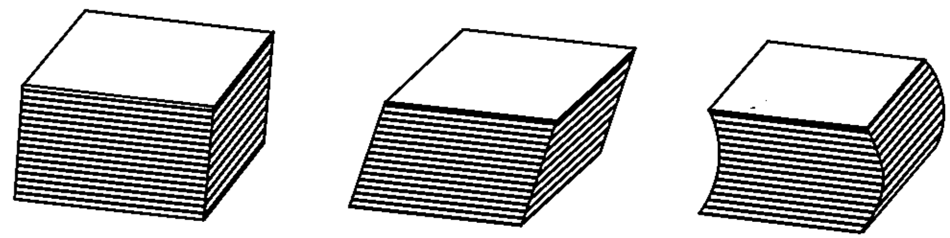

Figura 11.3: Pilhas de papel

Sabemos que esses três sólidos têm volumes iguais mas ainda nos faltam argumentos para explicar esse fato que intuitivamente percebemos. De uma forma mais geral, suponha que dois sólidos A e B estão apoiados em um plano horizontal e que qualquer outro plano, também horizontal, corte ambos segundo seções de mesma área. O Princípio de Cavalieri afirma que o volume de A é igual ao volume de B.(figura 11.4).

Se imaginarmos os dois sólidos fatiados no mesmo número de fatias muito finas, todas com mesma altura, duas fatias correspondentes com mesma área terão, aproximadamente, mesmo volume. Tanto mais aproximadamente quanto mais finas forem. Sendo o volume de cada sólido a soma dos volumes de suas fatias, concluímos que os dois sólidos têm volumes iguais. Repare ainda que o exemplo da resma de papel mostra um caso particular desse argumento, onde os três sólidos possuem, cada um, 500 fatias, todas iguais.

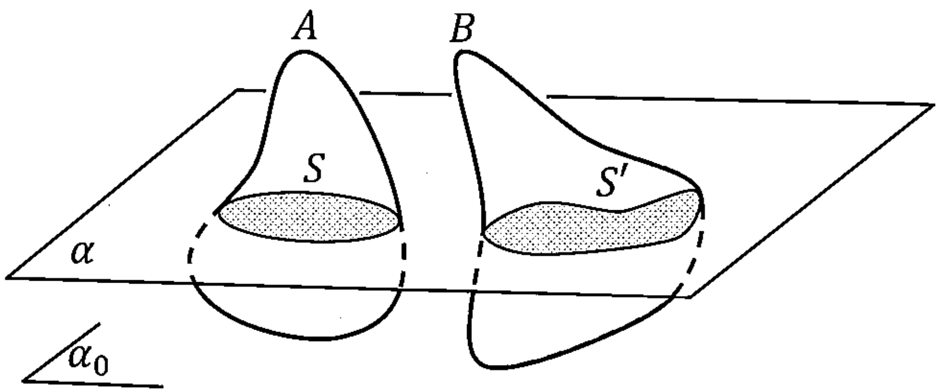

Figura 11.4

É claro que os exemplos acima não constituem uma demonstração do Princípio de Cavalieri, mas dão uma forte indicação de que ele é verdadeiro. Podemos, então, aceitar o axioma seguinte:

Axioma (Princípio de Cavalieri)
São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então, esses sólidos têm mesmo volume.

Esta é a ferramenta que vamos utilizar para encontrar os volumes dos demais sólidos simples.

Nota 3. No ensino da Geometria, existem alguns resultados que não podemos demonstrar de forma satisfatória e que, naturalmente, causam incômodo ao professor. Os principais são os seguintes: o Teorema de Tales (das paralelas), a área do quadrado, o volume do paralelepípedo e o Princípio de Cavalieri. Para os três primeiros temas, o professor poderá oferecer uma demonstração parcial, utilizando números naturais (ou mesmo racionais), que deve satisfazer a maioria dos alunos. Essa atitude não é condenável, muito pelo contrário. O professor estará justificando importantes resultados de acordo com o nível de desenvolvimento dos seus alunos, mas saberá que o resultado geral estará garantido pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade (veja Nota 2 deste capítulo). Existem outras opções e uma delas é adotar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade (como fato que poderá ser demonstrado mais tarde) e, a partir dele, demonstrar a área do retângulo, do triângulo e, daí, o Teorema de Tales. Para esse caminho, o leitor poderá consultar o artigo "Usando Áreas" na RPM nº 21, pág. 19. Foi esse o caminho que utilizamos aqui para obter o volume do paralelepípedo e não há dúvida de que esse procedimento satisfaz a nossa necessidade imediata mas transfere a dificuldade para outro lugar. Não tem jeito. Existem obstáculos no percurso do ensino da Geometria. E o professor, consciente das dificuldades, deverá optar pelo rumo a tomar. No caso do Princípio de Cavalieri, a situação é diferente. A sua demonstração envolve conceitos avançados de Teoria da Medida e, portanto, só podemos oferecer aos alunos alguns exemplos. Mas cremos que esses exemplos sejam suficientes para que possamos adotar, sem traumas, o Princípio de Cavalieri como axioma.

11.4 O Prisma

Com o Princípio de Cavalieri, podemos obter sem dificuldade o volume de um prisma. Imaginemos um prisma de altura h, cuja base seja um polígono de área A, contido em um plano horizontal. Construímos ao lado um paralelepípedo retângulo com altura h e de forma que sua base seja um retângulo de área A.

Suponha, agora, que os dois sólidos sejam cortados por um outro plano horizontal, que produz seções de áreas A_1 e A_2 no prisma e no paralelepípedo, respectivamente. Ora, o paralelepípedo é também um prisma e, sabemos que em todo prisma, uma seção paralela à base é congruente com essa base. Logo, como figuras congruentes têm mesma área, temos que $A_1 = A = A_2$ e, pelo Princípio de Cavalieri, os dois sólidos têm mesmo volume. Como o volume do paralelepípedo é Ah, o volume do prisma é também o produto da área de sua base por sua altura.

$$\text{Volume do prisma} = (\text{área da base}) \times (\text{altura}).$$

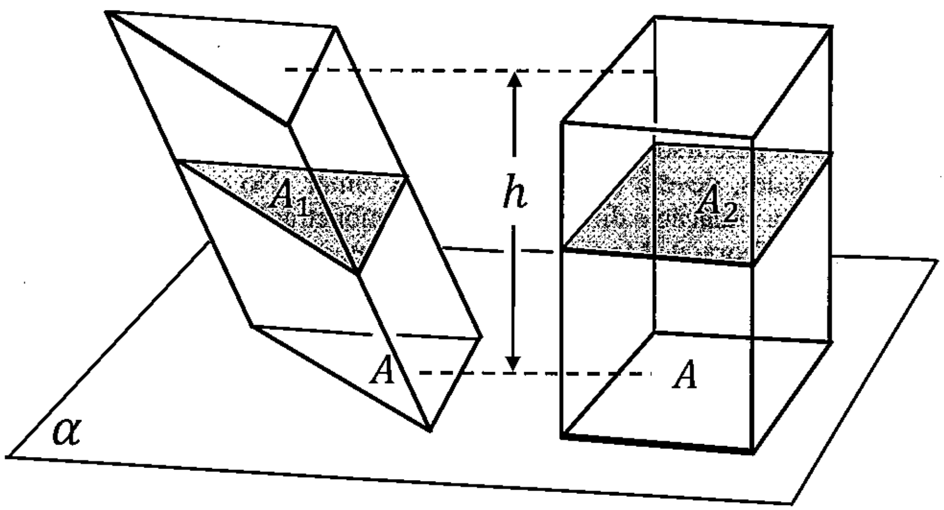

Figura 11.5

11.5 A Pirâmide

Para obter o volume da pirâmide, precisamos de resultados adicionais. Em particular, o que realmente importa é ter a certeza de que, se o vértice de uma pirâmide se move em um plano paralelo à base, o volume dessa pirâmide não se altera. Para isso, vamos examinar o que ocorre quando uma pirâmide é seccionada por um plano paralelo à sua base.

A figura 11.6 a seguir mostra uma pirâmide de vértice V, base ABC (triangular apenas para simplificar o desenho) e altura H. Um plano paralelo a ABC, distando H do vértice V, produziu nessa pirâmide uma seção DEF.

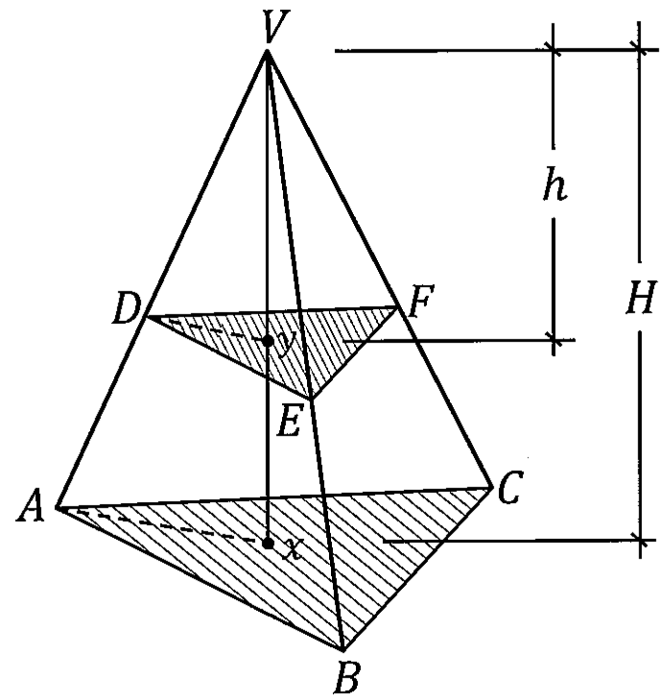

Figura 11.6

Vamos, agora, citar dois fatos importantes com respeito à situação? acima.

1) A seção e a base da pirâmide são figuras semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{h}{H}$.

2) A razão entre áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.

O primeiro fato foi demonstrado no Capítulo 7 deste livro. A demonstração do segundo pode ser encontrada em diversos livros de Matemática do segundo grau. Para uma referência mais avançada, recomendamos o livro "Medida e Forma em Geometria" do professor Elon Lages Lima editado pela SBM, que trata também dos mesmos assuntos que estamos desenvolvendo aqui. Passamos, agora, a um teorema preparatório para o que nos permitirá obter o volume da pirâmide.

Teorema. Duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm mesmo volume.

A figura a seguir mostra suas pirâmides de mesma base ABC (novamente triangular apenas para simplificação do desenho), vértices V_1 e V_2 e com mesma altura H. Um plano paralelo ao plano (ABC) e distando h dos vértices das pirâmides, produziu seções S_1 e S_2 nas duas pirâmides.

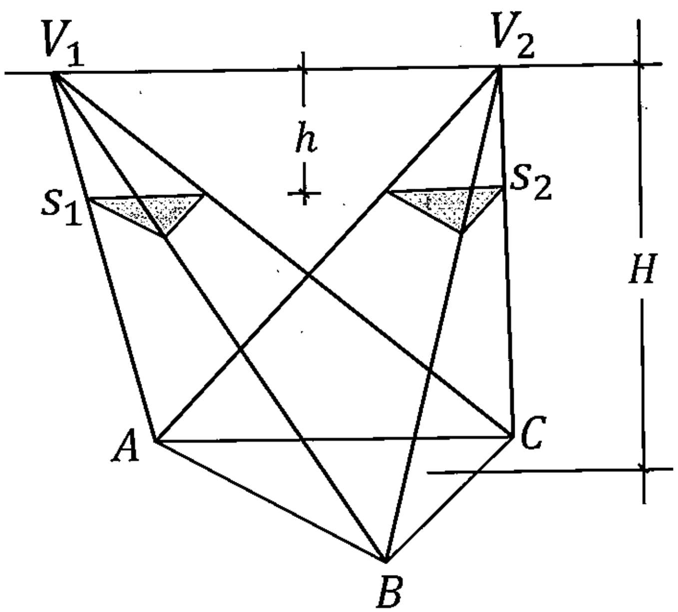

Figura 11.7

Seja A a área da base ABC e sejam A_1 e A_2 as áreas das seções S_1 e S_2, respectivamente. Pelos argumentos que citamos, temos que:

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A}$$

de onde se conclui que $A_1 = A_2$. Pelo Princípio de Cavalieri, as duas pirâmides têm mesmo volume, como queríamos demonstrar.

O fato de que podemos mover o vértice de uma pirâmide em um plano paralelo à sua base sem alterar o seu volume é a chave para a demonstração do volume da pirâmide de base triangular. Veremos isto no teorema

seguinte.

Teorema. O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

A demonstração deste teorema é elementar mas requer atenção. Para facilitar o entendimento, vamos convencionar uma notação especial. Trataremos de diversos tetraedros e como, em um tetraedro, qualquer face pode ser considerada uma base, vamos convencionar o seguinte. Se, em um tetraedro de vértices A, B, C e D, imaginamos a face ABC como base e o ponto D como vértice dessa pirâmide, vamos representá-lo por $D - ABC$. Ainda, o volume desse tetraedro será representado por

$$V(D - ABC) = V(B - ACD) = \cdots \text{ etc,}$$

dependendo de qual face estamos considerando como base.

Consideremos, então, um prisma triangular cujas bases são os triângulos ABC e $A'B'C'$, como mostra a figura 11.8. Seja A a área de ABC e seja h a altura do prisma. Como sabemos, seu volume é Ah.

Vamos, agora, dividir esse prisma em três tetraedros: $A - A'B'C'$, $B' - ACC'$ e $B' - ABC$, como mostram as figuras a seguir.

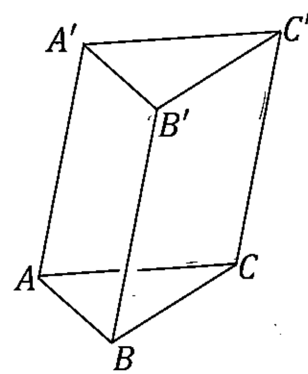

Figura 11.8

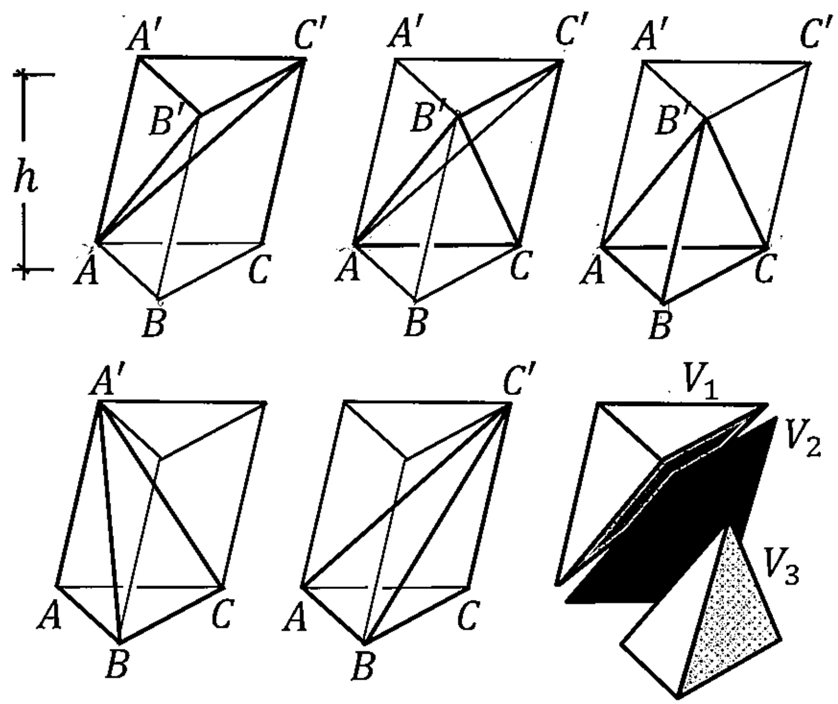

Figura 11.9: Decompondo o prisma em tetraedros de mesmo volume.

Sejam V_1, V_2 e V_3 os volumes respectivos dos três tetraedros citados e seja V o volume do prisma. Pelo teorema anterior, sabemos que o volume de uma pirâmide não se modifica, quando, mantendo a base fixa, movemos o vértice em um plano paralelo a essa base. Tendo isto em mente podemos concluir:

$$\begin{aligned} V_1 &= V(A - A'B'C') = V(A - A'BC') \\ &= V(A - A'BC) = V(A' - ABC) \\ V_2 &= V(B' - ACC') = V(B - ACC') = V(C' - ABC) \\ V_3 &= V(B' - ABC) \end{aligned}$$

Concluímos, então, que o volume do prisma é igual à soma dos volumes de três tetraedros:

$$A' - ABC, \; B' - ABC \; e \; C' - ABC,$$

com a mesma base do prisma e com alturas iguais a do prisma. Logo, cada um deles tem volume igual a um terço do volume do prisma. Demonstramos, então, que o volume de uma pirâmide de base triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Estamos agora, muito próximos do resultado geral. O teorema a seguir estende o resultado obtido para qualquer pirâmide.

Teorema. O volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura. Para justificar, observe que qualquer pirâmide pode ser dividida em pirâmides de base triangular. Essa divisão é feita dividindo-se a base em triângulos justapostos por meio de diagonais e definindo cada plano de divisão da pirâmide por uma dessas diagonais da base e pelo vértice da pirâmide.

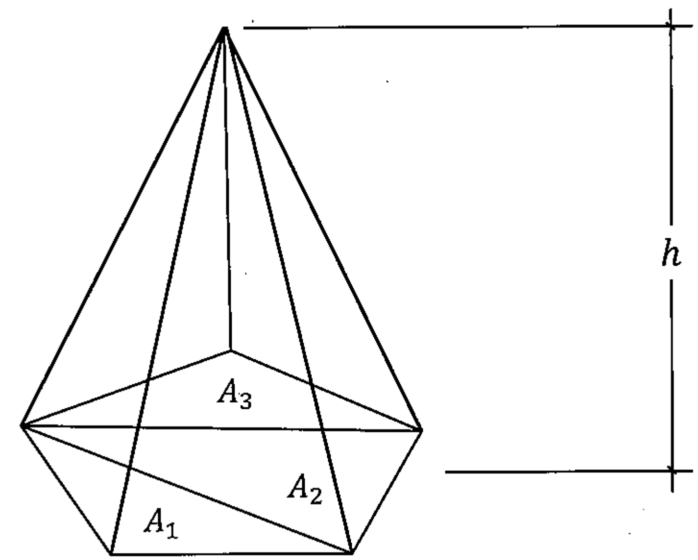

Figura 11.10

Suponha, agora, que a pirâmide tenha altura b e que sua base, de área

A, tenha sido dividida em n triângulos de áreas

$$A_1, A_2, \ldots, A_n.$$

Como o volume da pirâmide é a soma dos volumes das pirâmides triangulares, temos que seu volume é:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}A_1h + \frac{1}{3}A_2h + \cdots + \frac{1}{3}A_nh \\ V &= \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)h \\ V &= \frac{1}{3}A_h, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. Fica então estabelecido que:

$$\text{volume da pirâmide} = \frac{1}{3}(\text{área da base}) \times (\text{altura}).$$

A obtenção dos volumes do prisma e da pirâmide demanda considerável esforço. E conveniente que, após esses resultados, o professor os explore em diversos sólidos regulares, em particular, prismas e pirâmides regulares. Para encontrar os elementos necessários para o cálculo do volume de um desses poliedros, será frequentemente necessário encontrar triângulos convenientes, aplicar relações métricas e calcular áreas, propiciando uma revisão dos resultados importantes da geometria plana.

Quando prismas e pirâmides são apresentados ao aluno do segundo grau, a motivação natural é o cálculo dos volumes. Entretanto, paralelamente a isso, diversas outras relações métricas e propriedades desses poliedros devem ser estudadas, como fizemos no Capítulo 9.

11.6 Cilindros e Cones

No cilindro, toda seção paralela à base, é congruente com essa base. Esse fato permite concluir, pelo Princípio de Cavalieri, que o volume do cilindro é o produto da área de sua base pela sua altura.

Se o cilindro tem altura h e base de área A contida em um plano horizontal, imaginamos um prisma qualquer (ou em particular um paralelepípedo retângulo) de altura H, com base de área A contida no mesmo plano. Se

um outro plano horizontal secciona os dois sólidos segundo figuras de áreas A_1 e A_2, então, $A_1 = A = A_2$ e, por consequência, os dois têm mesmo volume. Logo, o volume do cilindro é também o produto da área da base pela altura.

$$\text{Volume do cilindro} = (\text{área da base}) \times (\text{altura})$$

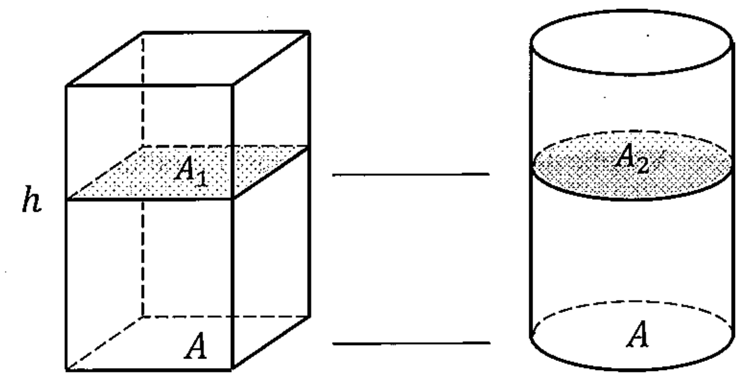

Figura 11.11

A relação entre o prisma e o cilindro é a mesma que entre a pirâmide e o cone, ou seja, o primeiro é caso particular do segundo. Optamos por demonstrar o volume do prisma e, depois, estender o resultado a um caso mais geral, o cilindro, porque esse é o caminho percorrido pela maioria dos professores da escola secundária. E concordamos com eles. O aluno do segundo grau, no seu primeiro contato com a geometria espacial, sente-se mais seguro quando compreende bem resultados obtidos em situações particulares, para depois estendê-los em casos mais gerais. O matemático profissional gosta, frequentemente, de fazer o inverso, ou seja, demonstrar um resultado geral e, depois, citar os casos particulares em que o mesmo vale.

O volume do cone segue o mesmo caminho trilhado anteriormente. Se um cone tem altura H e base de área A contida em um plano horizontal, consideramos uma pirâmide de altura H e base de área A contida nesse mesmo plano.

Se um outro plano horizontal, distando h do vértice desses sólidos secciona ambos segundo figuras de áreas A_1 e A_2, então:

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A},$$

ou seja, $A_1 = A_2$. O Princípio de Cavalieri nos garante que os dois sólidos têm mesmo volume e, portanto, concluímos que o volume do cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

$$\text{Volume do cone} = \frac{1}{3}\,(\text{área da base}) \times (\text{altura}).$$

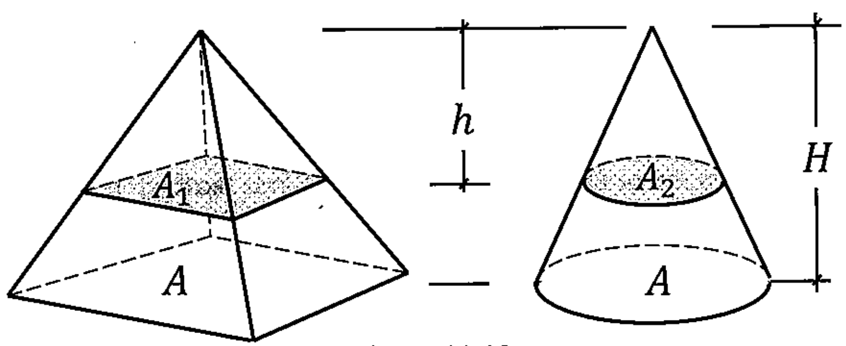

Figura 11.12

Os casos mais interessantes para os alunos são os cilindros e cones *retos* de base circular, porque eles estão mais relacionados com os objetos do cotidiano. Ainda nesses objetos, a superfície lateral pode ser obtida de forma simples.

A superfície lateral de um cilindro reto de raio R e altura h, pode ser desenrolada e transformada em um retângulo de base $2\pi r$ e altura h. A área lateral do cilindro é igual à área desse retângulo, que vale $2\pi Rh$.

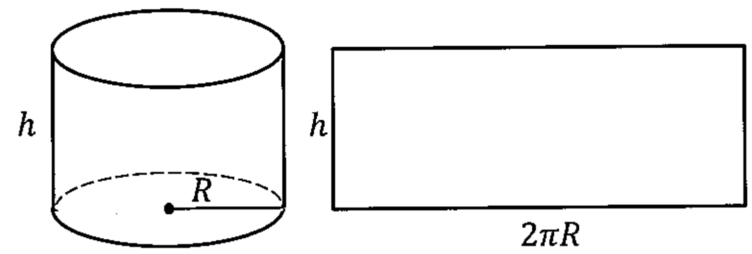

Figura 11.13: Área lateral do cilindro $= 2\pi Rh$

A superfície lateral de um cone reto de raio R e geratriz g, pode ser desenrolada e transformada em um setor de raio g cujo arco tem comprimento $2\pi R$. A área A desse setor é igual à área lateral do cone e, para calculá-la, usaremos apenas uma elementar regra de três. Diremos que a área A desse setor está para a área do círculo de raio g, assim como o comprimento do arco $2\pi R$ está para o comprimento total da circunferência $2\pi g$. Com isso, concluímos que a área lateral do cone reto vale πRg.

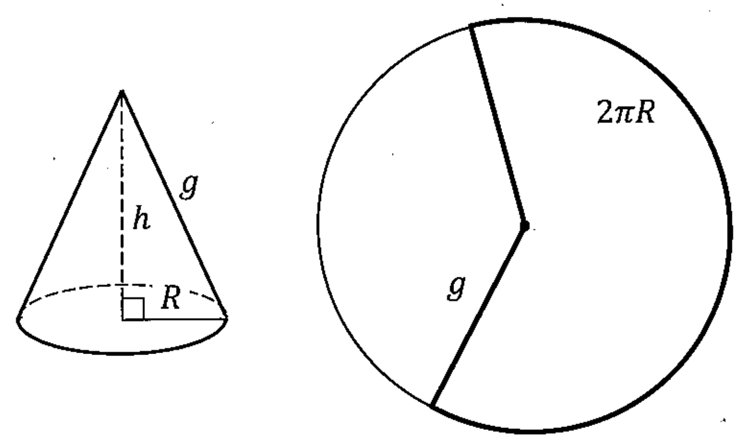

Figura 11.14

O leitor deve reparar que, ao utilizar a regra de três, estamos usando o fato de que a área de um setor circular é diretamente proporcional ao comprimento do arco que ele subtende (veja Nota 2 deste capítulo).

11.7 Atividades para Sala de Aula

Cilindros e cones retos de base circular devem ser associados às suas esferas inscrita e circunscrita. Além disso, inúmeras embalagens de produtos são cilíndricas, o que fornece diversos problemas interessantes. Vamos listar algumas atividades que podem ser desenvolvidas com os alunos.

1. O *cilindro equilátero* (isto é, o cilindro circular reto em que a altura é igual ao diâmetro da base) possui uma interessante propriedade. De todos os cilindros de mesmo volume, o cilindro equilátero é o que possui a menor área total. Assim, se o industrial deseja comercializar seu produto em embalagens cilíndricas que gastem um mínimo de material em sua fabricação, ele deve preferir o cilindro equilátero. É o caso, por exemplo, das latas de leite condensado. Elas são cilindros equiláteros. A demonstração dessa propriedade requer o uso de cálculo e, portanto, não está ainda acessível aos alunos do segundo grau. Entretanto, o professor poderá calcular a área de um cilindro equilátero e depois calcular a área de um outro cilindro com mesmo volume, para que os alunos vejam que é maior.

2. Quando se desenrola a superfície lateral de um cone, obtemos um setor. É interessante investigar o valor do ângulo central desse setor. Esse ângulo define a *forma* do cone. Se o cone tiver um raio pequeno comparado com sua altura (tipo chapéu de bruxa), o ângulo do setor será pequeno. Se, por outro lado, o raio do cone for grande quando comparado com sua altura (tipo chapéu de chinês), o ângulo do setor será também grande. O professor poderá demonstrar, utilizando também uma regra de três que o ângulo desse setor é, em radianos, igual a $2\pi R/g$ e, com isso, mostrar que, no cone equilátero (cone que tem a geratriz igual ao diâmetro da base), esse ângulo é de 180°.

11.8 A Esfera

O volume da esfera será obtido também como aplicação do Princípio de Cavalieri. Para isso, devemos imaginar um certo sólido, de volume conhecido e tal que seções produzidas por planos horizontais na esfera e nesse sólido tenham áreas iguais. Repare que, em uma esfera de raio R, uma seção que dista h do centro é um círculo de área $\pi(R^2 - h^2)$. Mas esta é também a área de uma coroa circular limitada por circunferências de raios R e h.

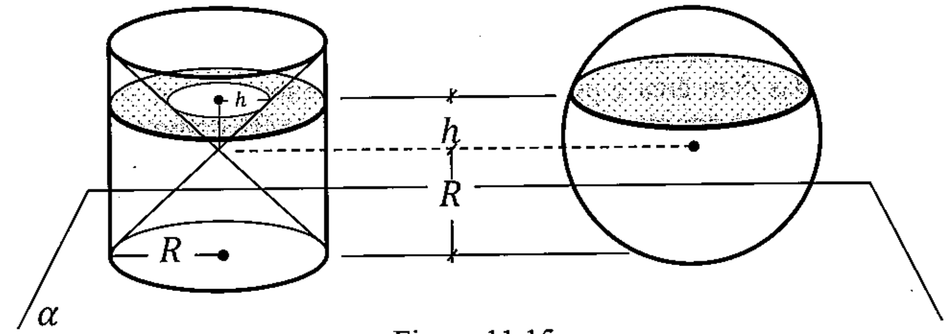

Figura 11.15

Consideremos, então, uma esfera de raio R apoiada em um plano horizontal e, ao lado, um cilindro equilátero de raio R com base também sobre esse plano. Do cilindro, vamos subtrair dois cones iguais, cada um deles com base em uma base do cilindro e vértices coincidentes no centro do cilindro. Este sólido C (chamado *clépsidra*) é tal que qualquer plano horizontal distando h do seu centro (ou do centro da esfera, o que é o mesmo), produz uma seção que é uma coroa circular cujo raio externo é R e cujo raio interno é h. Logo, o volume da esfera é igual ao de C.

O volume de C é o volume do cilindro de raio R e altura $2R$ subtraído de dois cones de raio R e altura R. Isso dá:

$$\pi R^2 2R - 2\frac{1}{3}\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

que é o volume da esfera.

$$\text{Volume da esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Adotando o Princípio de Cavalieri, pudemos calcular o volume da esfera. Entretanto, a área da esfera não pode ser obtida pelo método sugerido para o cilindro e para o cone. A superfície da esfera não é "desenvolvível", ou seja, não é possível fazer cortes nela e depois aplicá-la sobre um plano sem dobrar nem esticar.

Qualquer que seja o método que imaginarmos para obter a área da esfera, em algum momento precisaremos de uma "passagem ao limite". Entretanto, para justificar o valor $4\pi R^2$ para a área da esfera ao aluno do segundo grau, existem processos que, apesar de não constituírem uma demonstração, tornam esse resultado bastante aceitável. Um deles, está no

livro Medida e Forma em Geometria, pág. 81, o outro pode ser o seguinte. Suponha a esfera de raio R, dividida em um número n muito grande de regiões, todas com área e perímetro muito pequenos. Como se a esfera estivesse coberta por uma rede de malha muito fina. Cada uma dessas regiões, que é "quase" plana se n for muito grande, será base de um cone com vértice no centro da esfera. Assim, a esfera ficará dividida em n cones, todos com altura aproximadamente igual a R (tanto mais aproximadamente quanto menor for a base do cone).
Se A é a área da esfera e $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são as áreas das diversas regiões, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}\pi R^3 &= \frac{1}{3}A_1R + \frac{1}{3}A_2 + \cdots + \frac{1}{3}A_nR \\
\frac{4}{3}\pi R^3 &= \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)R \\
\frac{4}{3}\pi R^3 &= \frac{1}{3}AR \\
A &= 4\pi R^2.
\end{aligned}$$

É preciso deixar claro que esses cálculos não demonstram nada. Afinal, usamos a palavra "aproximadamente" muitas vezes e com significado pouco preciso. No ensino do segundo grau, atitudes desse tipo são corretas. Se não podemos demonstrar resultado, deveremos mostrar argumentos que, pelo menos os façam plausíveis, aceitáveis, e dizer, honestamente, aos alunos que a demonstração requer o uso de Cálculo ou de outras ferramentas que eles vão aprender depois. Afinal de contas, a forma de ensinar, e os argumentos que podemos utilizar, dependem do nível de desenvolvimento dos estudantes. Como dizia o professor Zoroastro, a verdade nem sempre pode ser dita de uma vez só.

11.9 Atividades para Sala de Aula

Utilizamos a palavra *esfera* com dois significados. Ora, ela representa a superfície, a casca do sólido. Ora, ela representa o interior. Não há problema nisso. Repare que, na geometria plana, o mesmo já ocorria. Por exemplo, a palavra *quadrado* era utilizada tanto para representar a união dos quatro lados (o bordo) quanto para o interior. Os estudantes deverão compreender o significado de acordo com a situação que está sendo estudada.

Sugerimos algumas atividades relacionadas com áreas e volumes na esfera.

1. Para praticar as fórmulas de área e de volume, é interessante demonstrar o seguinte fato descoberto por Arquimedes: se uma esfera está inscrita em um cilindro (reto), então, a razão entre as áreas desses sólidos é igual à razão entre seus volumes.

2. O professor pode também pedir aos alunos para calcular a área e o volume de um fuso esférico (isto é, a região delimitada por dois meridianos). É simples convencê-los de que tanto a área como o volume de um fuso esférico é proporcional ao ângulo desse fuso. Portanto, se α é a medida em graus do ângulo de um fuso em uma esfera de raio R, a área desse fuso será

$$\frac{\alpha}{360}4\pi R^2.$$

3. É bom aproveitar as fórmulas da área e do volume da esfera (em que aparecem, respectivamente, R^2 e R^3) para reforçar o fato de que as razões entre áreas e volumes de figuras semelhantes são iguais, respectivamente, ao quadrado e ao cubo da razão de semelhança. O professor pode, por exemplo, perguntar aos alunos que relação existe entre as massas de duas bolas de gude, uma com raio igual ao dobro do da outra.

11.10 Exercícios

1. Uma piscina tem 10 m de comprimento, 6 m de largura e $1,6$ m de profundidade.

a) Calcule seu volume em litros.

b) Determine quantos ladrilhos quadrados com 20cm de lado são necessários para ladrilhar essa piscina.

2. Um tablete de doce de leite medindo 12cm por 9cm por 6cm, está inteiramente coberto com papel laminado. Esse tablete é dividido em cubos com 1cm de aresta.

a) Quantos desses cubos não possuem nenhuma face coberta com o papel laminado?

b) Quantos desses cubos possuem apenas uma face coberta com papel?

c) Quantos desses cubos possuem exatamente duas faces cobertas com papel?

d) Quantos desses cubos possuem três faces cobertas com papel?

3. Determine o volume do maior tetraedro que pode ser guardado dentro de um cubo de aresta a.

4. Considere um triângulo equilátero ABC de lado a. Pelo centro G do triângulo, considere um segmento GD perpendicular ao plano do triângulo.

a) Calcule o comprimento de GD para que os segmentos DA, DB e DC tenham também comprimento a.

b) Nas condições do item a), o tetraedro $ABCD$ é regular. Calcule, então, o volume de um tetraedro regular de aresta a.

5. Um cubo de aresta a é seccionado por oito planos. Cada plano contém os pontos médios das três arestas que concorrem em um vértice. Retirando-se os tetraedros formados, obtemos um poliedro P.

a) Descreva as faces de P.

b) Calcule o volume de P.

c) Calcule o raio da esfera circunscrita ao poliedro P.

6. Calcule o volume de um octaedro regular de aresta a.

7. Calcule o volume do octaedro cujos vértices são os centros das faces de um cubo de volume V.

8. a) Mostre que a soma das distâncias de um ponto interior a um tetraedro regular às suas faces é constante.

b) A partir do item anterior, calcule o raio da esfera inscrita a um tetraedro regular de aresta a.

9. Uma pirâmide chama-se regular quando a sua base é um polígono regular e a projeção do vértice sobre o plano da base é o seu centro.

Uma pirâmide regular de altura 4cm tem por base um quadrado de lado 6cm. Calcule seu volume, sua área e os raios das esferas inscrita e circunscrita.

10. Um cilindro reto possui uma esfera inscrita. Mostre que a razão entre as áreas desses dois sólidos é igual à razão entre seus volumes (Teorema de Arquimedes).

11. Um copo cônico de papel foi feito a partir de um setor de 12cm de raio e ângulo central de 120°. Calcule o volume desse copo.

12. Um cone reto tem 3cm de raio e 4cm de altura. Calcule seu volume, área e os raios das esferas inscrita e circunscrita.

13. Um copo cilíndrico tem 3cm de raio e 12cm de altura. Estando inicialmente cheio d'água, o copo é inclinado até que o plano de sua base faça 45° com o plano horizontal. Calcule o volume de água que permaneceu no copo.

14. Teorema: Se dois sólidos são semelhantes com razão de semelhança k, então, a razão entre seus volumes é k^3.

Demonstre este teorema em casos particulares utilizando paralelepípedo retângulo, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.

15. Uma garrafa de bebida com 30cm de altura tem uma miniatura perfeitamente semelhante com 10cm de altura. Se a miniatura tem 50ml de volume, qual é o volume da garrafa original?

16. Um cone tem altura h e volume V. Este cone é seccionado por um plano paralelo à sua base, distando $h/3$ dessa base. Calcule os volumes das partes em que esse cone ficou dividido.

17. Um tanque subterrâneo tem a forma de um cone invertido com 12m de profundidade. Este tanque está completamente cheio com 27000 litros de água e 37000 litros de petróleo. Calcule a altura da camada de petróleo.

18. Utilizando um pouco de cálculo (ou de imaginação).

Um fabricante de leite condensado deseja comercializar seu produto em embalagens cilíndricas de volume V. Determine as dimensões dessa embalagem para que seja gasto um mínimo de material em sua fabricação (ou seja, a superfície da lata deve ser mínima).

19. O professor perguntou ao aluno qual seria o volume gerado pela rotação de um retângulo em torno de um eixo que contém um de seus lados. O aluno respondeu corretamente, calculando o volume de um cilindro. Em seguida, o professor traçou a diagonal do retângulo e perguntou ao aluno quais seriam os volumes gerados pelos dois triângulos formados. O aluno, então, dividiu a resposta anterior por dois. Está certo isso?