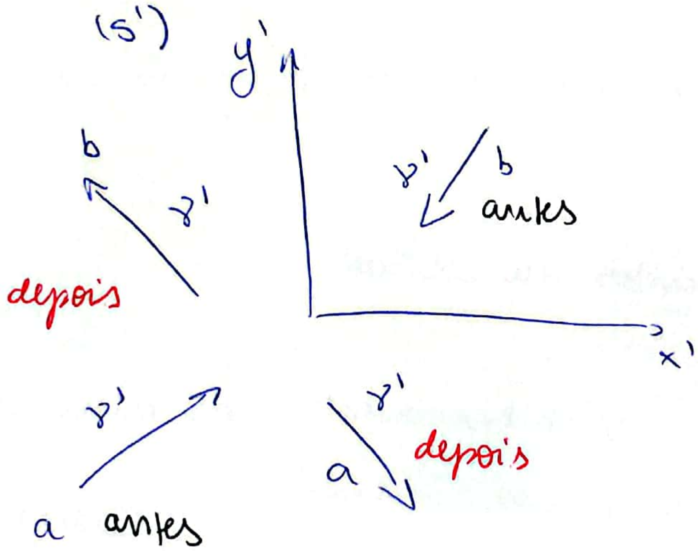
17/11/23

Momento Relativístico

$$\vec{p} = \underbrace{m(v)}_{\text{grandeza escalar}} \vec{v}$$

Vamos construir o momento relativístico a partir de um exemplo de colisão:

Duas bolinhas idênticas colidindo (colisão elástica)

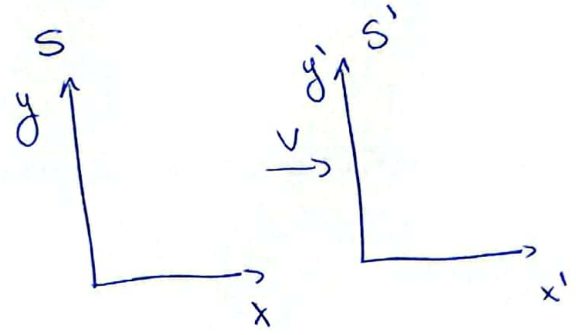


Separando as componentes da velocidade antes e depois da colisão:

$$\left(v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2}\right)$$

	a: x'	a: y'	b: x'	b: y'
antes	$+v_x'$	$+v_y'$	$-v_x'$	$-v_y'$
depois	$+v_x'$	$-v_y'$	$-v_x'$	$+v_y'$

As leis de conservação são válidas para referenciais inerciais. Porém, S' não é inercial, então devemos reescrever as velocidades da tabela no referencial S (inercial).



de S p/ S':

$$v_x' = \frac{v_x - V}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)}$$

$$v_y' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\, v_y}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)}$$

Como estamos transformando de S' p/ S, a velocidade relativa é $-V$:

eixo x da part. a antes da colisão:

$$v_x = \frac{v_x' - V}{\left(1 - \frac{v_x' V}{c^2}\right)}$$ → as ' estão trocadas pois estamos fazendo o processo "inverso".

→ verificado v_x' é positivo.

como V é, na verdade, negativo: $$v_x = \frac{v_x' + V}{\left(1 + \frac{v_x' V}{c^2}\right)}$$

Assim, preenchemos a tabela:

	a: x	a: y	b: x	b: y
antes	$v_x = \frac{v_x'+V}{1+\frac{v_x'V}{c^2}}$	$v_y = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\, v_y'}{1+\frac{v_x'V}{c^2}}$	$v_x = \frac{(-v_x'+V)}{1-\frac{v_x'V}{c^2}}$	$v_y = -\frac{\sqrt{1-\beta^2}\, v_y'}{1-\frac{v_x'V}{c^2}}$
depois	$v_x = \frac{v_x'+V}{1+\frac{v_x'V}{c^2}}$	$v_y = -\frac{\sqrt{1-\beta^2}\, v_y'}{1+\frac{v_x'V}{c^2}}$	$v_x = \frac{-v_x'+V}{1-\frac{v_x'V}{c^2}}$	$v_y = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\, v_y'}{1-\frac{v_x'V}{c^2}}$

$\boxed{\beta = \frac{V}{c}}$

No referencial inercial as leis físicas são conservadas.

Usando a conservação de momento:

$$\left[m(\gamma_a)\vec{v}_a + m(\gamma_b)\vec{v}_b\right]_{\text{antes}} = \left[m(\gamma_a)\vec{v}_a + m(\gamma_b)\vec{v}_b\right]_{\text{depois}}$$

para x (usando os valores da tabela:

$$m(\gamma_a)\left(\frac{\gamma_x' + V}{1 + \frac{\gamma_x' V}{c^2}}\right) + m(\gamma_b)\left(\frac{-\gamma_x' + V}{1 - \frac{\gamma_x' V}{c^2}}\right) = m(\gamma_a)\left(\frac{\gamma_x' + V}{1 + \frac{\gamma_x' V}{c^2}}\right) + m(\gamma_b)\left(\frac{-\gamma_x' + V}{1 - \frac{\gamma_x' V}{c^2}}\right)$$

↳ o momento é conservado!

para y:

$$m(\gamma_a)\left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}\,\gamma_y'}{1 + \frac{\gamma_x' V}{c^2}}\right) + m(\gamma_b)\left(\frac{-\sqrt{1-\beta^2}\,\gamma_y'}{1 - \frac{\gamma_x' V}{c^2}}\right) = m(\gamma_a)\left(\frac{-\sqrt{1-\beta^2}\,\gamma_y'}{1 + \frac{\gamma_x' V}{c^2}}\right) + m(\gamma_b)\left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}\,\gamma_y'}{1 - \frac{\gamma_x' V}{c^2}}\right)$$

↳ p/ γ_x' e γ_y' arbitrários, o momento só será conservado se ambos os lados forem nulos.

Usando o lado esquerdo da equação:

$$m(\gamma_a)\left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}\,\gamma_y'}{1 + \frac{\gamma_x' V}{c^2}}\right) + m(\gamma_b)\left(\frac{-\sqrt{1-\beta^2}\,\gamma_y'}{1 - \frac{\gamma_x' V}{c^2}}\right) = 0$$

$$m(\gamma_a)\left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}\,\gamma_y'}{1+\frac{\gamma_x' V}{c^2}}\right) = m(\gamma_b)\left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}\,\gamma_y'}{1-\frac{\gamma_x' V}{c^2}}\right)$$

$$\frac{m(\gamma_a)}{m(\gamma_b)} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\,\gamma_y'}{1-\frac{\gamma_x' V}{c^2}} \cdot \frac{1+\frac{\gamma_x' V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}\,\gamma_y'} = \boxed{\frac{1+\frac{\gamma_x' V}{c^2}}{1-\frac{\gamma_x' V}{c^2}}}$$

Usando a identidade mostrada anteriormente:

$$1-\frac{\gamma'^2}{c^2} = \frac{\left(1-\frac{\gamma^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{V}}{c^2}\right)^2} \quad , \beta = \frac{-V}{c}$$

neste caso.

Passando do referencial S' para S e sabendo que $\vec{v}\cdot\vec{V} = -\gamma_x' V$ (a)

$\vec{v}'\vec{V} = +\gamma_x' V$ (b)

$$\sqrt{1-\frac{\gamma_a^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{\gamma'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{\gamma_x' V'}{c^2}} \Rightarrow 1+\frac{\gamma_x' V}{c^2} = \frac{\sqrt{1-\frac{\gamma'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{\gamma_a^2}{c^2}}}$$

$$\sqrt{1-\frac{\gamma_b^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{\gamma'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{\gamma_x' V}{c^2}} \Rightarrow 1-\frac{\gamma_x' V}{c^2} = \frac{\sqrt{1-\frac{\gamma'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{\gamma_b^2}{c^2}}}$$

Então: $$\frac{1+\frac{v_x' V}{c^2}}{1-\frac{v_x' V}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v_b^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\frac{v_b^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}}$$

Usando este resultado na equação anterior:

$$\frac{m(v_a)}{m(v_b)} = \frac{1+\frac{v_x' V}{c^2}}{1-\frac{v_x' V}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{v_b^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}} \Rightarrow \sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}\, m(v_a) = \sqrt{1-\frac{v_b^2}{c^2}}\, m(v_b)$$

Ambas ~~são~~ idênticas mas os escalares $m(v_a)$ e $m(v_b)$ não são os mesmos p/ $v_a \neq v_b$

Então: $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, m(v)$ independe da magnitude v da velocidade,

e, assim, é considerado <u>invariante</u>.

Assim escrevemos: $m(v) = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $m_0 \equiv m(0)$

↳ valor próprio de $m(v)$ ou massa de repouso.

Finalmente, escrevemos o momento relativístico:

$$\vec{p} = m(v)\,\vec{v} \;; \quad m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Exercício: (14 cap 6, Moyses vol 4)

Uma partícula de massa m_0, em repouso na origem em $t=0$ é submetida a uma força constante F_0 até o instante t

no limite não-relativístico: $F_0 = m_0 a$, $a = \frac{F_0}{m_0}$

$$v(t) = \cancel{v_0}^{\,0} + at = \frac{F_0}{m_0}\,t$$

$$x(t) = \cancel{x_0}^{\,0} + v_0 t + \frac{a t^2}{2} = \frac{F_0}{2m}\,t^2$$

no limite relativístico: $F_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot a \Rightarrow v(t) = \frac{F_0 t}{m_0}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

↳ usar expansão

$$v(t) = \frac{F_0 t}{m_0\sqrt{1+\left(\frac{F_0 t}{m_0}\right)^2}} \xrightarrow{\text{integrando}} x(t) = \frac{m_0 c^2}{F_0}\sqrt{1+\left(\frac{F_0 t}{m_0}\right)^2}$$

p/ t muito longo $\Rightarrow v \to c$!

p/ $v = 0,6c$: $m(v) = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{0,36c^2}{c^2}}} = 1,25\, m_0$

No caso do próton:

$|p| = m_0 \gamma \cdot v = 1,25\, m_0 \cdot 0,6c = 0,75\, m_0 c = 0,75 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}\, Kg \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

$= 3,75 \cdot 10^{-19}\, Kg\, \frac{m}{s}$.