

Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Princípio dos Trabalhos Virtuais para a Elasticidade Tridimensional

Define-se o *trabalho virtual dos esforços internos* – as tensões – σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} , σ_{xz} e σ_{yz} para o campo das deformações virtuais por:

$$\delta\tau_i = \int_V (\delta\varepsilon_{xx}\sigma_{xx} + \delta\varepsilon_{yy}\sigma_{yy} + \delta\varepsilon_{zz}\sigma_{zz} + \delta\gamma_{xy}\sigma_{xy} + \delta\gamma_{xz}\sigma_{xz} + \delta\gamma_{yz}\sigma_{yz}) dV$$

$$\delta\tau_i = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

O *trabalho virtual dos esforços externos* é dado por:

$$\delta\tau_e = \int_V \{\delta u\}^T \{f^B\} dV + \int_{S_f} \{\delta u\}^T \{f^S\} dS$$

onde:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad \{\delta u\} = \begin{Bmatrix} \delta u(x, y, z) \\ \delta v(x, y, z) \\ \delta w(x, y, z) \end{Bmatrix}$$

O *Princípio dos Trabalhos Virtuais* para a elasticidade tridimensional pode ser escrito como:

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{f^B\} dV + \int_{S_f} \{\delta u\}^T \{f^S\} dS$$

Mostra-se que:

Dados $\{f^B\}$ em V e $\{f^S\}$ em S_f

são condições equivalentes para o campo de tensões $\{\sigma\}$ satisfazer o *Princípio dos Trabalhos Virtuais* para qualquer deslocamento virtual e satisfazer equilíbrio, *i.e.*,

Princípio dos Trabalhos Virtuais

$$\int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{f^B\} dV + \int_{S_f} \{\delta u\}^T \{f^S\} dS$$

para todo $\{\delta u\}$, $\{\delta u\} = \{0\}$ em S_u



Equilíbrio

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x^B = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y^B = 0 \quad \text{para todo } x \text{ em } V$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z^B = 0$$

$$[T]\{u\} = \{f^S\} \quad \text{para todo } x \text{ em } S_f$$

O problema da elasticidade linear pode ser formulado usando o princípio dos trabalhos virtuais.

Determinar $\{\delta u\}$, $\{\sigma\}$ e $\{\varepsilon\}$ tal que

$$\int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{f^B\} dV + \int_{S_f} \{\delta u\}^T \{f^S\} dS$$

para todo $\{\delta u\}$, $\{\delta u\} = \{0\}$ em S_u

Equilíbrio

(a)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = [\partial_\varepsilon] \{u\}$$

$$\forall \underline{x} \in V$$

Compatibilidade

(b)

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad \forall \underline{x} \in V$$

Equação Constitutiva

(c)

Substituindo as equações de compatibilidade e constitutivas ((b) e (c)) na expressão do princípio dos trabalhos virtuais (a) obtém-se a formulação somente em termos dos deslocamentos

Determinar $\{u\}$ tal que

$$\int_V \{\delta u\}^T [\partial_\varepsilon]^T [C] [\partial_\varepsilon] \{u\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{f^B\} dV + \int_{S_f} \{\delta u\}^T \{f^S\} dS$$

$$\forall \{\delta u\}, \{\delta u\} = \{0\} \quad \text{em } S_u$$

Tendo-se $\{u\}$, obtém-se

$$\{\varepsilon\} = [\partial_\varepsilon] \{u\}$$

e

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\}$$

Princípio dos Trabalhos Virtuais para a Elasticidade no Plano

Estado Plano de Tensões

Particularizando-se a expressão da elasticidade tridimensional para as condições de estado plano de tensão:

$$\begin{aligned}\int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\delta\varepsilon_{xx}\sigma_{xx} + \delta\varepsilon_{yy}\sigma_{yy} + \delta\varepsilon_{zz}0 + \delta\gamma_{xy}\sigma_{xy}) dzdA \\ &= h \int_A (\delta\varepsilon_{xx}\sigma_{xx} + \delta\varepsilon_{yy}\sigma_{yy} + \delta\gamma_{xy}\sigma_{xy}) dA\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_V \{\delta u\}^T \{f^B\} dV + \int_{S_f} \{\delta u\}^T \{f^S\} dS &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\delta u f_x^B + \delta v f_y^B) dzdA + \\ + \int_{L_f} \int_{-h/2}^{h/2} (\delta u f_x^S + \delta v f_y^S) dzdL &= h \int_A (\delta u f_x^B + \delta v f_y^B) dA + h \int_{L_f} (\delta u f_x^S + \delta v f_y^S) dL\end{aligned}$$

Usando a notação:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

e definindo-se

$$\{\delta u\} = \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{Bmatrix} \quad \{f^B\} = \begin{Bmatrix} f_x^B \\ f_y^B \end{Bmatrix} \quad \{f^S\} = \begin{Bmatrix} f_x^S \\ f_y^S \end{Bmatrix}$$

resulta:

$$\int_A \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_A \{\delta u\}^T \{f^B\} dA + \int_{L_f} \{\delta u\}^T \{f^S\} dL$$

Estado Plano de Deformações

As componentes de deformação ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{xy} são diferentes de zero e as componentes de tensão σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} , σ_{zz} são não nulas, então analogamente ao caso de estado plano de tensões, tem-se:

$$\int_A \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_A \{\delta u\}^T \{f^B\} dA + \int_{L_f} \{\delta u\}^T \{f^S\} dL$$

Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Considerando o Problema Plano

Equilíbrio:

$$\int_A \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dA = \int_A \{\delta u\}^T \{f^B\} dA + \int_{L_f} \{\delta u\}^T \{f^S\} dL$$

onde $\{u\}^T = \{u \quad v\}$
 $\{\delta u\}^T = \{\delta u \quad \delta v\}$

Compatibilidade:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Equação constitutiva:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (i)$$

Definindo-se

$$[\partial_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

A equação de compatibilidade pode ser reescrita como:

$$\{\varepsilon\} = [\partial_\varepsilon]\{u\} \quad (\text{ii})$$

Substituindo-se (i) e (ii) na equação de equilíbrio, resulta:

$$\int_A \{\delta u\}^T [\partial_\varepsilon]^T [C] [\partial_\varepsilon] \{u\} dA = \int_A \{\delta u\}^T \{f^B\} dA + \int_{L_f} \{\delta u\}^T \{f^S\} dL$$

Formulação do Problema da Elasticidade Plana em Termos de Deslocamentos

Determinar o campo de deslocamentos $\{u\}$, $\{u\}^T = \{ u(x,y) \ v(x,y) \}$ tal que:

$$\int_A \{\delta u\}^T [\partial_\varepsilon]^T [C] [\partial_\varepsilon] \{u\} dA = \int_A \{\delta u\}^T \{f^B\} dA + \int_{L_f} \{\delta u\}^T \{f^S\} dL$$

para qualquer $\{\delta u\}$, $\{\delta u\}^T = \{ \delta u(x,y) \ \delta v(x,y) \}$ tal que $\{\delta u\} = \{0\}$ em L_u

Vamos procurar a solução para a equação acima considerando uma determinada forma assumida para os deslocamentos.

Para se definir essa forma considere:

$$A^{(m)}$$

Y



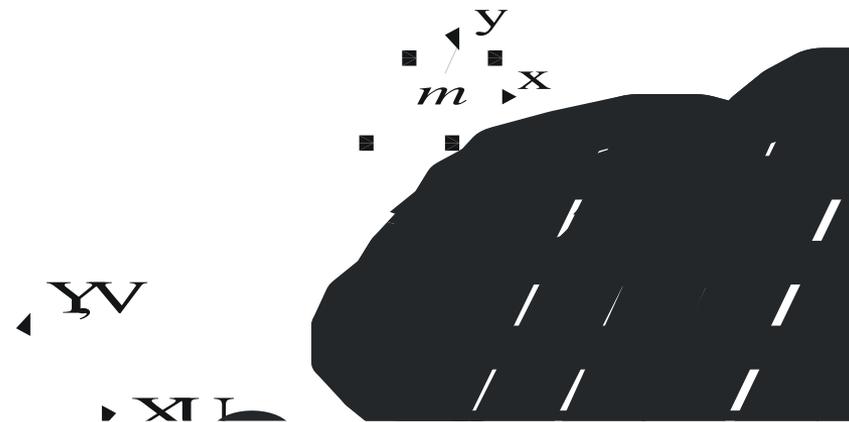
$$A^{(m)}$$

pontos
nodais

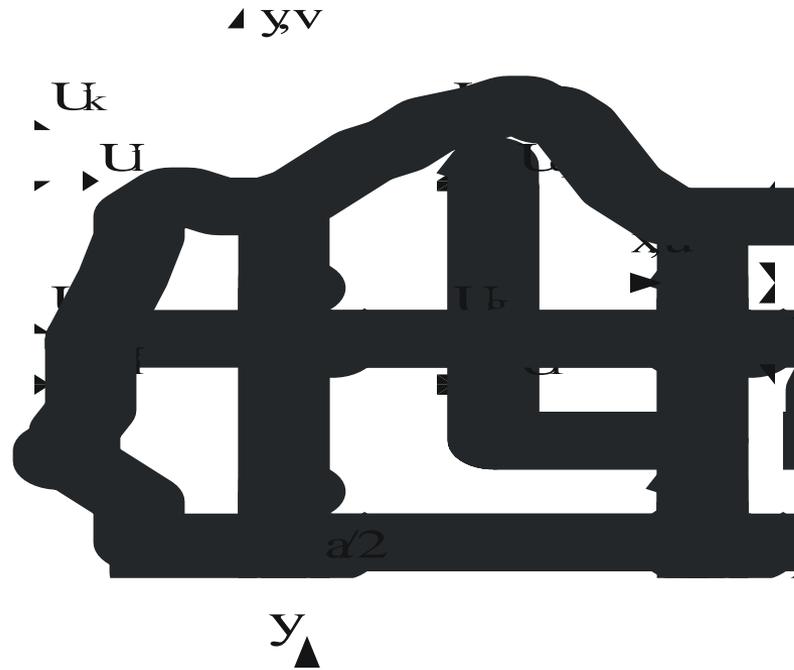
Y



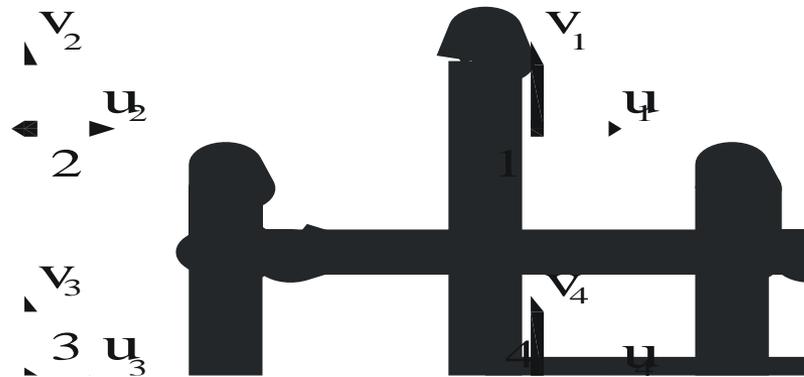
$A^{(m)}$ pontos
nodais



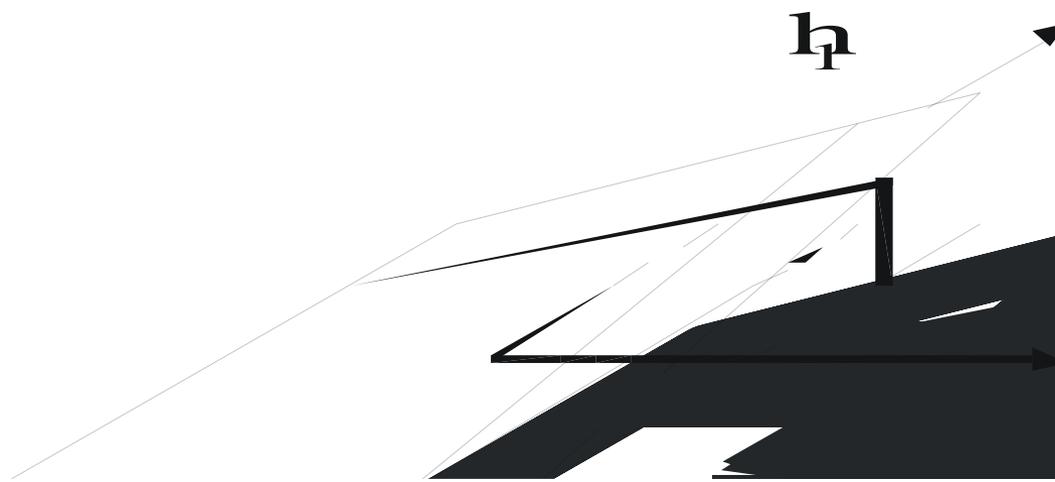
Considere um elemento genérico



e uma numeração local



define-se



Então

$$h_1(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2x}{a} \right) \left(1 + \frac{2y}{b} \right)$$

$$h_2(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2x}{a} \right) \left(1 + \frac{2y}{b} \right)$$

$$h_3(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2x}{a} \right) \left(1 - \frac{2y}{b} \right)$$

$$h_4(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2x}{a} \right) \left(1 - \frac{2y}{b} \right)$$

Define-se o campo de deslocamentos no interior do elemento por

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^4 h_i u_i$$
$$v(x, y) = \sum_{i=1}^4 h_i v_i$$

Nota-se que

$$u(x_j, y_j) = \sum_{i=1}^4 h_i(x_j, y_j) u_i$$

Como $h_i(x_j, y_j) = 1$ quando $i = j$ e $h_i(x_j, y_j) = 0$ quando $i \neq j$

$$u(x_j, y_j) = u_j$$

analogamente

$$v(x_j, y_j) = v_j$$

Definindo-se

$$\{\hat{u}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Pode-se escrever

$$\{u^{(m)}\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = [H]\{\hat{u}\}$$

onde:

$$[H] = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix}$$

Considere:

$$\{U\}^T = \{U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad U_n\}$$

onde U_i , $i = 1, \dots, n$ representam todos os deslocamentos nodais do modelo.

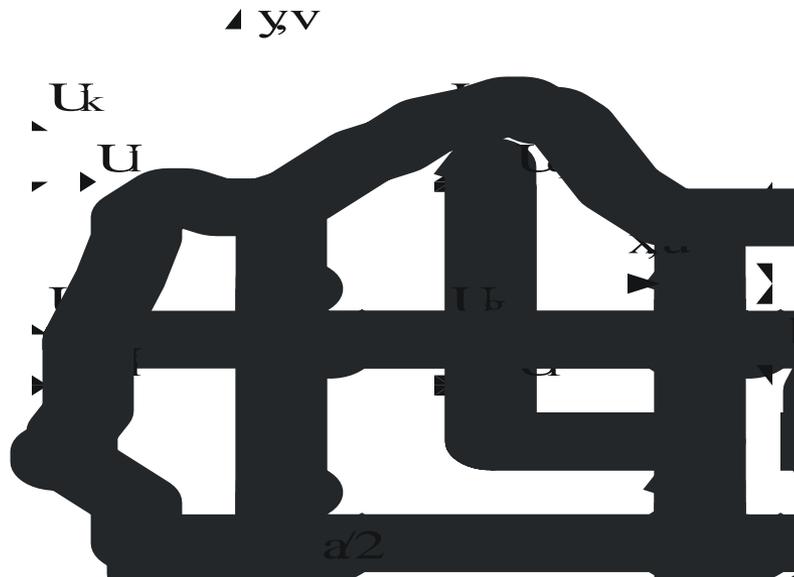
Pode-se escrever:

$$\{u^{(m)}\} = [H^{(m)}]\{U\}$$

onde

$$\{u^{(m)}\} = \begin{Bmatrix} u^{(m)}(x, y) \\ v^{(m)}(x, y) \end{Bmatrix}$$

e para o elemento (m) abaixo



tem-se

$$[H^{(m)}] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & U_K & 0 & \dots & 0 & U_\ell & U_i & \dots & U_q & \dots \\ 0 & \dots & 0 & h_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ U_f & U_p & & U_j & & U_g & & & & & & \\ h_4 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & & & & & \\ 0 & h_1 & \dots & h_3 & \dots & h_4 & \dots & & & & & \end{bmatrix}$$

Considerando as relações deslocamento-deformações

$$\{\varepsilon^{(m)}\} = [B^{(m)}]\{U\}$$

onde

$$[B^{(m)}] = [\partial_\varepsilon][H^{(m)}]$$

e usando a equação constitutiva

$$\{\sigma^{(m)}\} = [C^{(m)}]\{\varepsilon^{(m)}\}$$

sendo que

$$[C^{(m)}] = [C]$$

para material homogêneo.

Lembrando o enunciado do *Princípio dos Trabalhos Virtuais*

$$\int_A \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dA = \int_A \{\delta u\}^T \{f^B\} dA + \int_{L_f} \{\delta u\}^T \{f^S\} dL$$

pode-se escrevê-lo considerando-se a interpolação de elementos finitos

$$\{u^{(m)}\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = [H^{(m)}] \{U\}$$

E considerando ainda que os deslocamentos virtuais são interpolados da mesma forma que os deslocamentos

$$\{\delta u^{(m)}\} = [H^{(m)}] \{\delta U\}$$

$$\{\delta\varepsilon^{(m)}\} = [B^{(m)}] \{\delta U\}$$

então resulta

$$\begin{aligned} & \{\delta U\}^T \left[\sum_{m=1}^{n_e} \int_{A^{(m)}} [B^{(m)}]^T [C^{(m)}] [B^{(m)}] dA^{(m)} \right] \{U\} \\ & = \\ & \{\delta U\}^T \left[\sum_{m=1}^{n_e} \left(\int_{A^{(m)}} [H^{(m)}]^T \{f^{B^{(m)}}\} dA^{(m)} \right) \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{n_e} \left(\int_{L_1^{(m)}, \dots, L_q^{(m)}} [H^{(m)}]^T \{f^{S^{(m)}}\} dL^{(m)} \right) \right] \end{aligned}$$

onde $L_1^{(m)}, L_2^{(m)}, \dots, L_f^{(m)}$ lados do elemento (m) que pertencem a fronteira do domínio L_f .

Definindo-se

$$[K^{(m)}] = \int_{A^{(m)}} [B^{(m)}]^T [C^{(m)}] [B^{(m)}] dA^{(m)}$$

$$\{R_B^{(m)}\} = \int_{A^{(m)}} [H^{(m)}]^T \{f^{B^{(m)}}\} dA^{(m)}$$

$$\{R_S^{(m)}\} = \int_{L_1^{(m)}, \dots, L_q^{(m)}} [H^{(m)}]^T \{f^{S^{(m)}}\} dL^{(m)}$$

$$[K] = \sum_{m=1}^{n_e} [K^{(m)}]$$

$$\{R_B\} = \sum_{m=1}^{n_e} \{R_B^{(m)}\} \quad \{R_S\} = \sum_{m=1}^{n_e} \{R_S^{(m)}\} \quad \{R\} = \{R_B\} + \{R_S\}$$

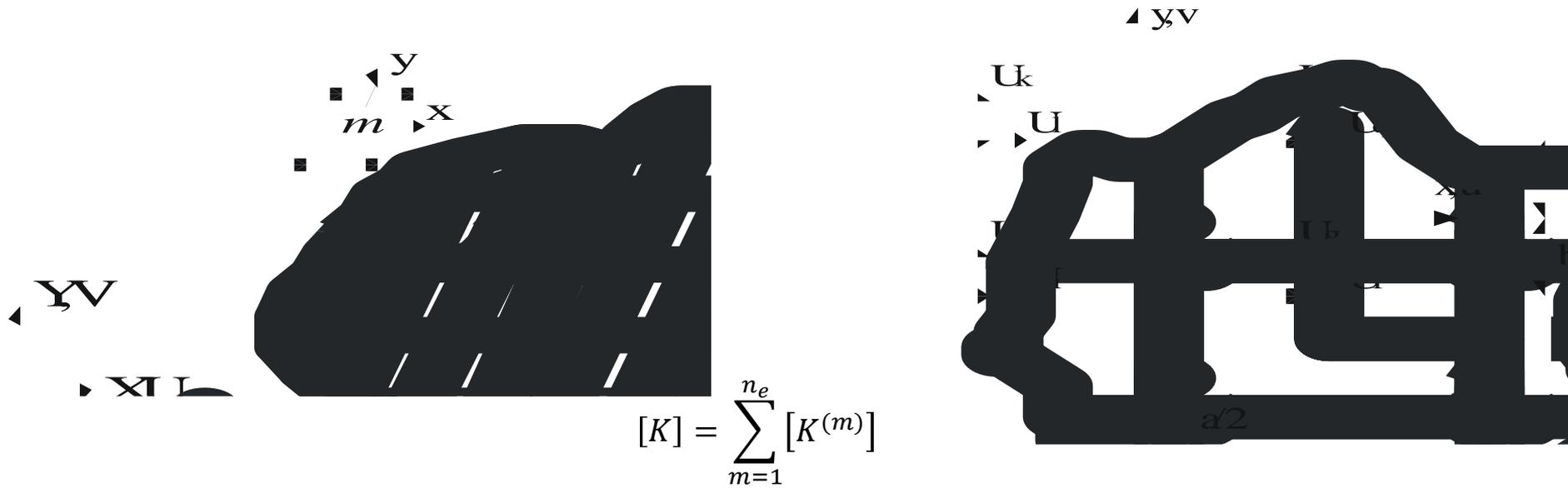
Pode-se escrever

$$\{\delta U\}^T ([K]\{U\} - \{R\}) = 0$$

Como os deslocamentos virtuais são arbitrários, $\{\delta U\}$ pode ser tomado arbitrariamente levando a:

$$[K]\{U\} = \{R\}$$

Montagem da Matriz de Rigidez

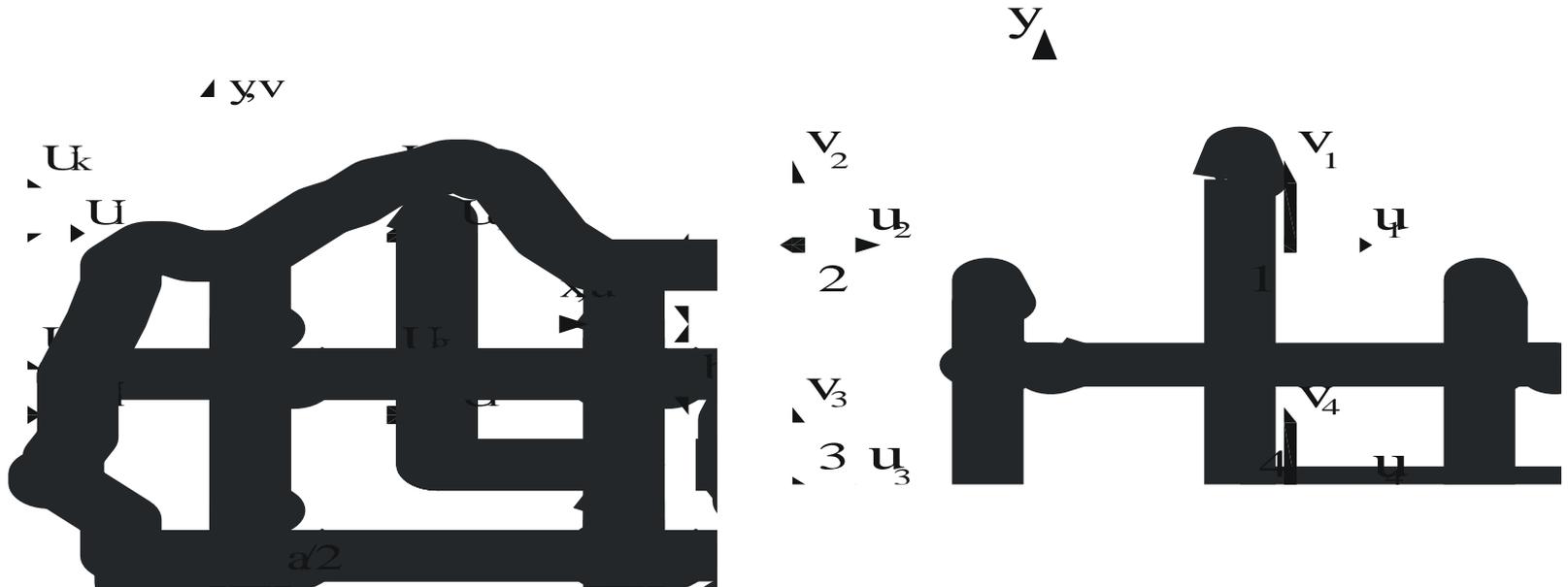


$$K_{ij}^{(m)} = \int_{A^{(m)}} \{B^{(m)}\}_i^T [C] \{B^{(m)}\}_j dA^{(m)}$$

$$[B^{(m)}] = \left[\dots \left| \begin{array}{c} \{B^{(m)}\}_i \\ \uparrow \\ i \end{array} \right| \dots \left| \begin{array}{c} \{B^{(m)}\}_j \\ \uparrow \\ j \end{array} \right| \dots \right]$$

$K_{ij}^{(m)} \neq 0$ somente se os graus de liberdade U_i e U_j pertencerem ao elemento (m)

Montagem da Matriz de Rigidez



Recorda-se

$$\{u^{(m)}\}_{2 \times 1} = [H^{(m)}]_{2 \times N} \{U\}_{N \times 1} = [H]_{2 \times 8} \{\hat{u}\}_{8 \times 1}$$

Analogamente

$$\{\varepsilon^{(m)}\}_{3 \times 1} = [B^{(m)}]_{3 \times N} \{U\}_{N \times 1} = [B]_{3 \times 8} \{\hat{u}\}_{8 \times 1}$$

Definindo

$$[k]_{8 \times 8} = \int_A [B]^T [C] [B] dA$$

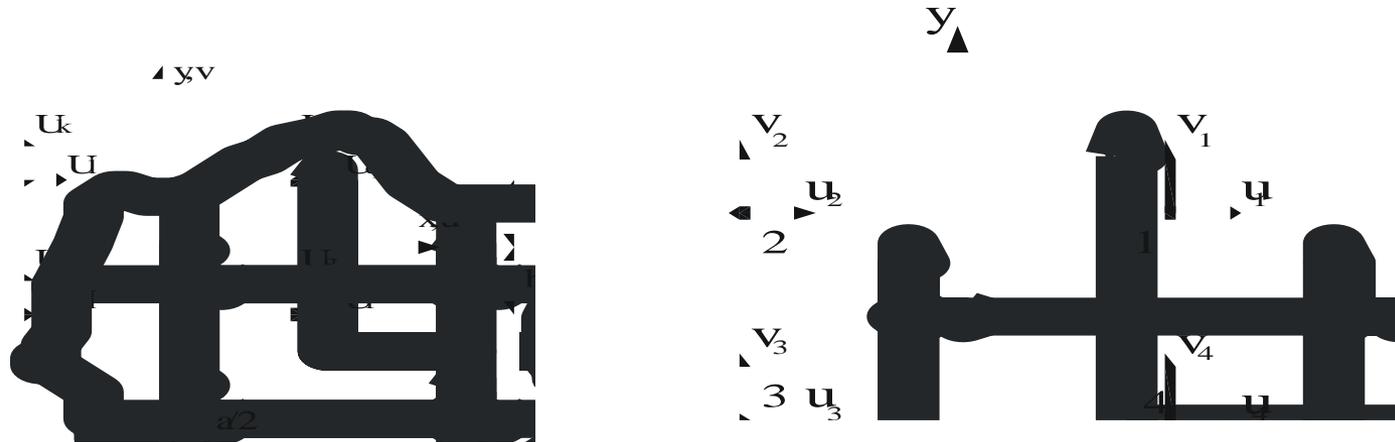
$$K_{ij}^{(m)} = k_{56}$$

$$\begin{array}{ll} U_i & u_3 \\ U_j & v_3 \end{array}$$

$$\{\hat{u}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Os termos de $[K^{(m)}]$ que não são encontrados em $[k]$ são nulos

Montagem da Matriz de Rigidez



Define-se

$$\{LM^{(m)}\}^T = \{q \quad p \quad l \quad k \quad i \quad j \quad f \quad g\}$$

As contribuições da matriz de rigidez do elemento (m) para a matriz $[K]$ podem ser obtidas somando-se

k_{11} na posição qq de $[K]$

k_{12} na posição qp de $[K]$

⋮

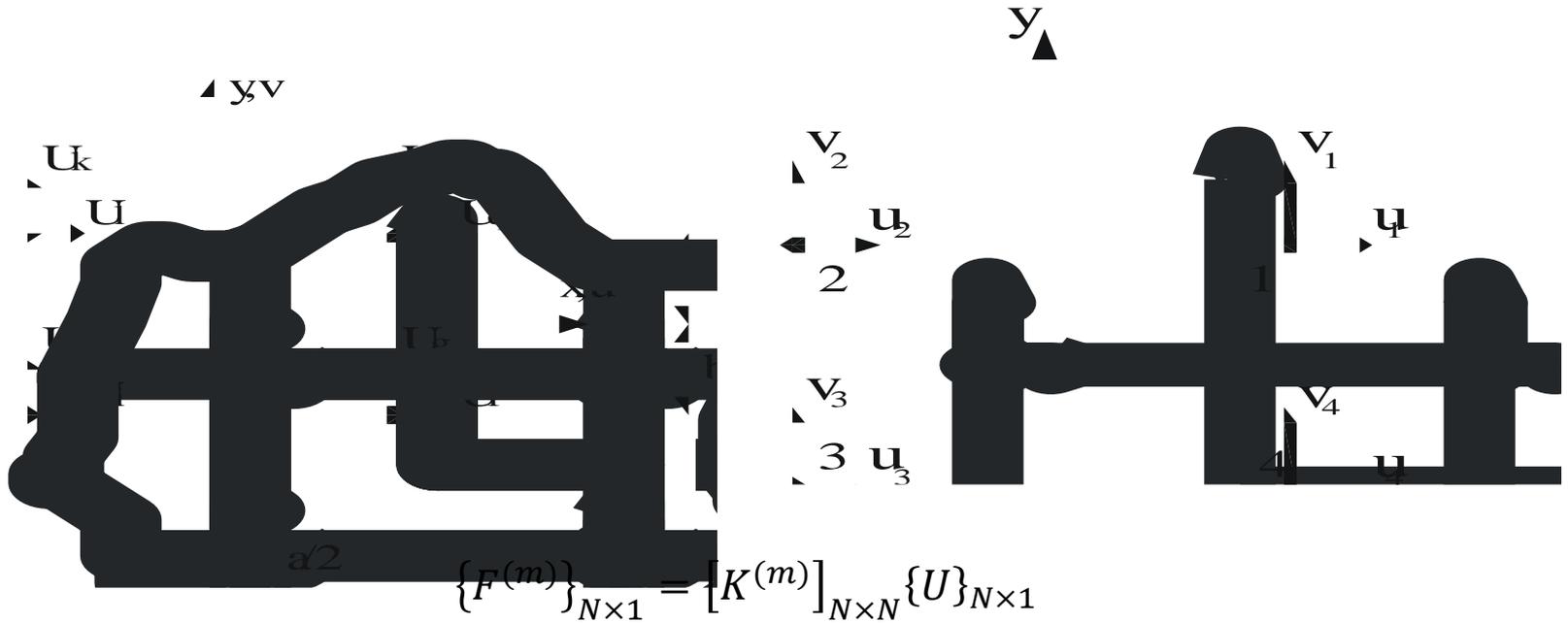
k_{18} na posição qg de $[K]$

k_{22} na posição pp de $[K]$

⋮

k_{28} na posição pg de $[K]$

Forças Nodais



$$\{f\} = [k]\{\hat{u}\}$$

