Torção

Prof. Alfredo Gay Neto
Prof. Miguel Bucalem

PEFUSP
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA
DE ESTRUTURAS E GEOTÉCNICA

Torção de barras com seção circular/tubular PEFUSP

- Trata-se de um problema clássico da resistência dos materiais
  - Pequenos ângulos de torção
  - Seção transversal permanece plana
  - Material elástico linear

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

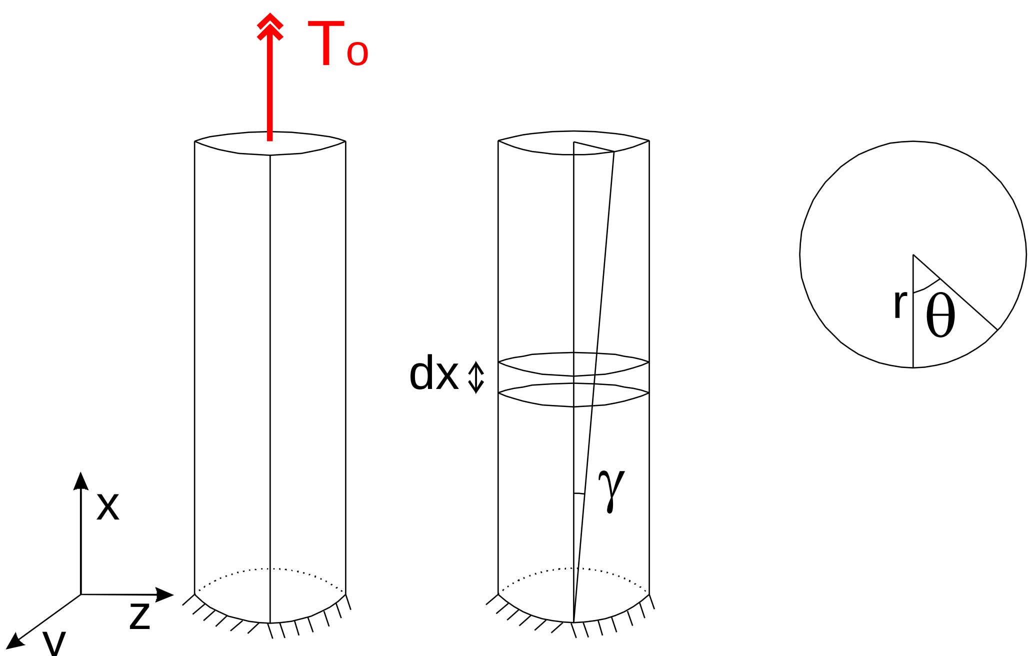
$$\tau = G\gamma$$

Relação geométrica:

$$r d\theta = \gamma dx$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{r}\gamma = \frac{\tau}{Gr}$$

$$\tau = Gr\frac{d\theta}{dx}$$



Integrando na seção transversal

PEFUSP

- Torque (T)

$$T = \int_A r\tau dA = \int_A r\left(Gr\frac{d\theta}{dx}\right)dA = G\frac{d\theta}{dx}\int_A r^2 dA = GJ\frac{d\theta}{dx}$$

- Tensões de cisalhamento

$$\tau = Gr\frac{T}{GJ} = \frac{Tr}{J}$$

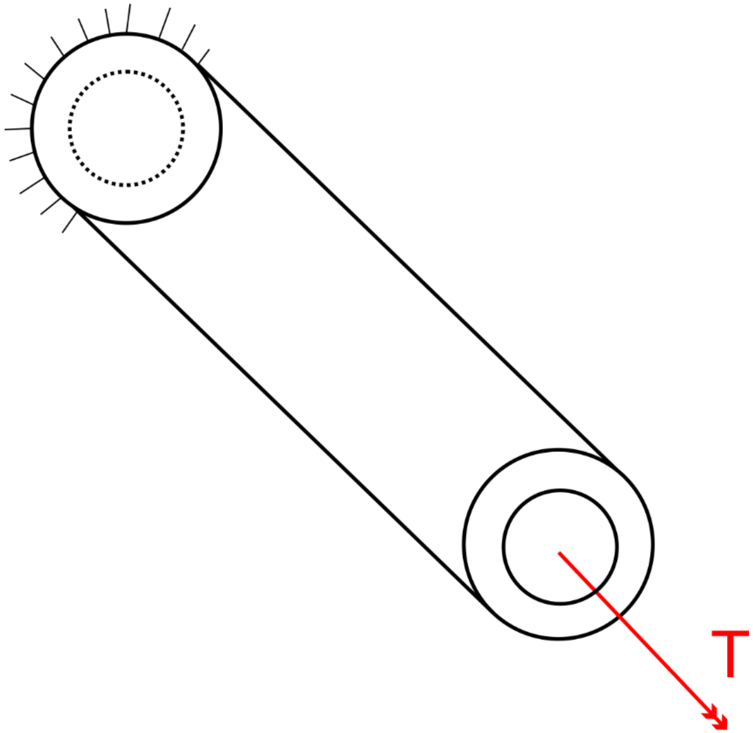
  - Variação linear da tensão cisalhante ao longo do raio
  - Reciprocidade da tensão de cisalhamento
    - Distorção no plano da seção transversal implica em distorção no plano ortogonal à seção transversal

$$\frac{d\theta}{dx} = \theta'$$

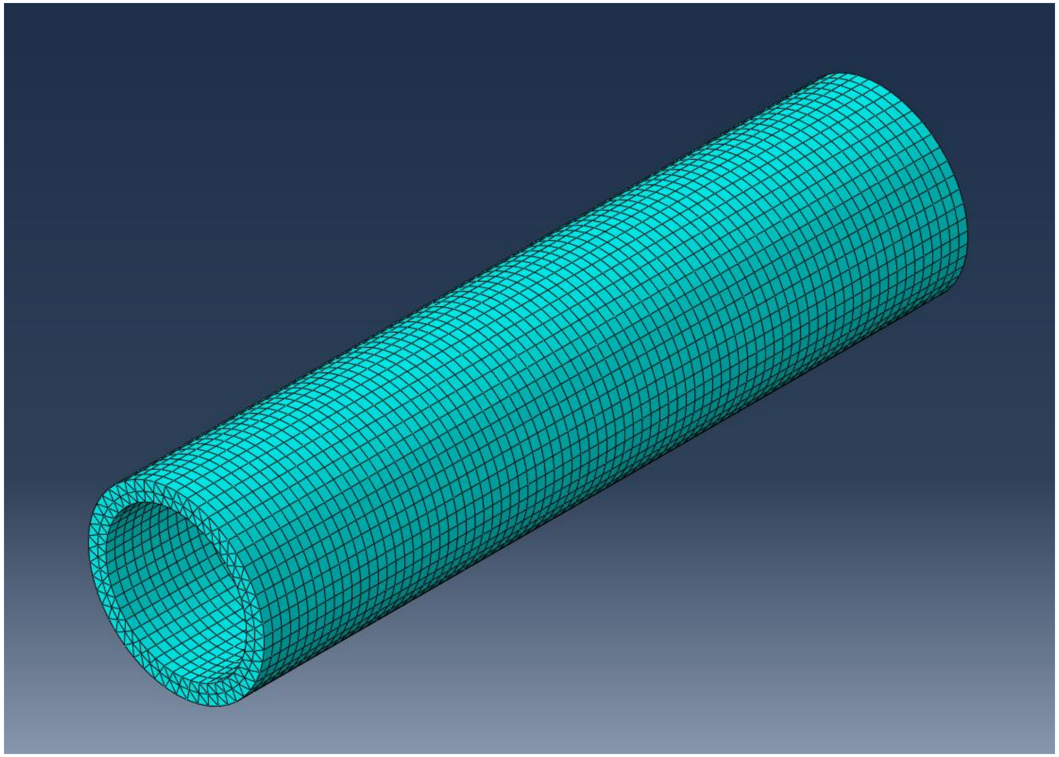
Simulação usando Elementos Finitos

PEFUSP

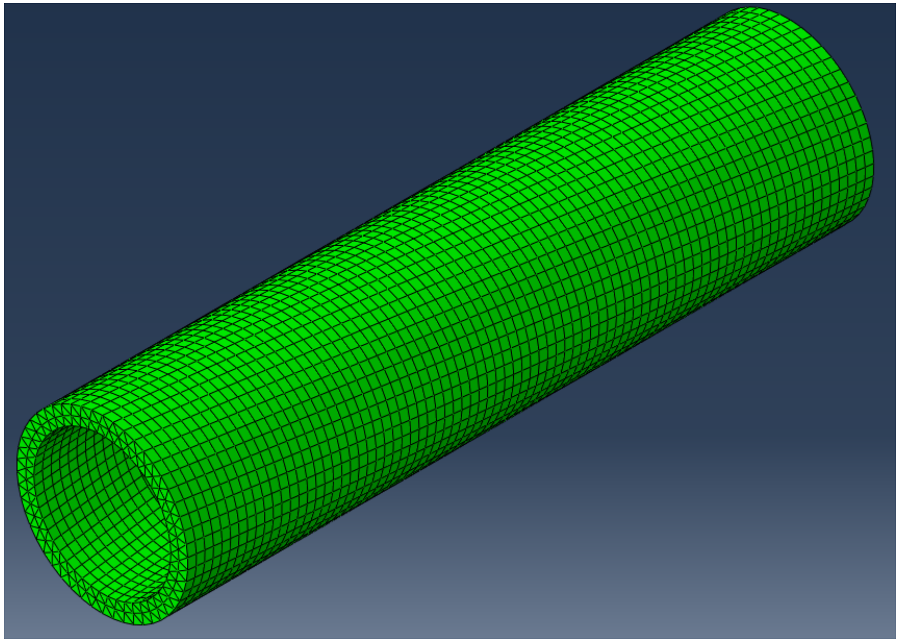
- Torção de um tubo circular

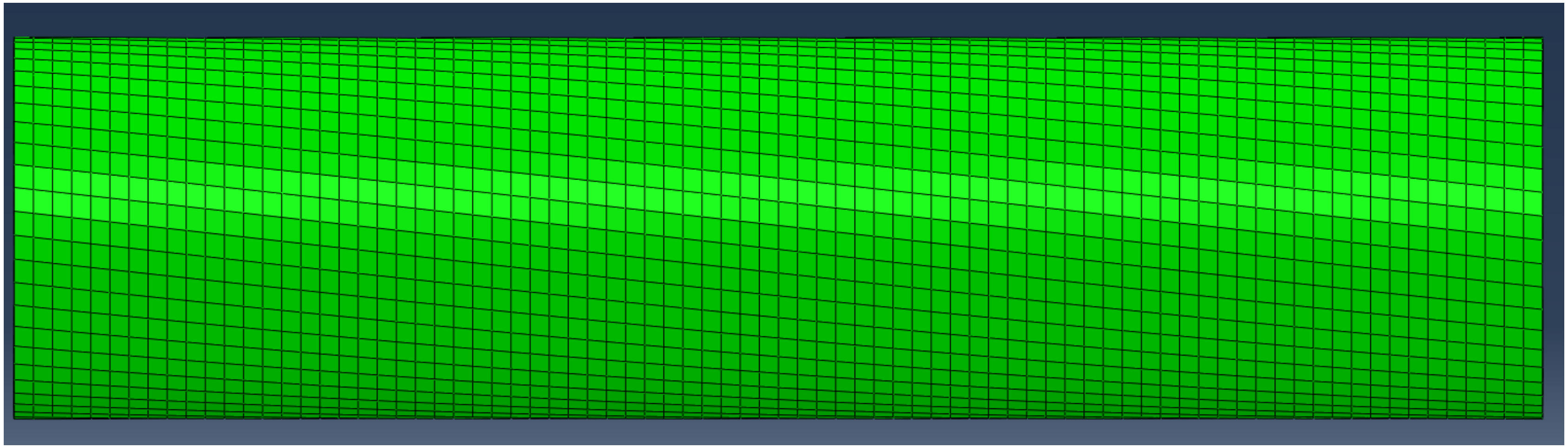


Malha do Método dos Elementos Finitos (MEF)



Configuração deformada

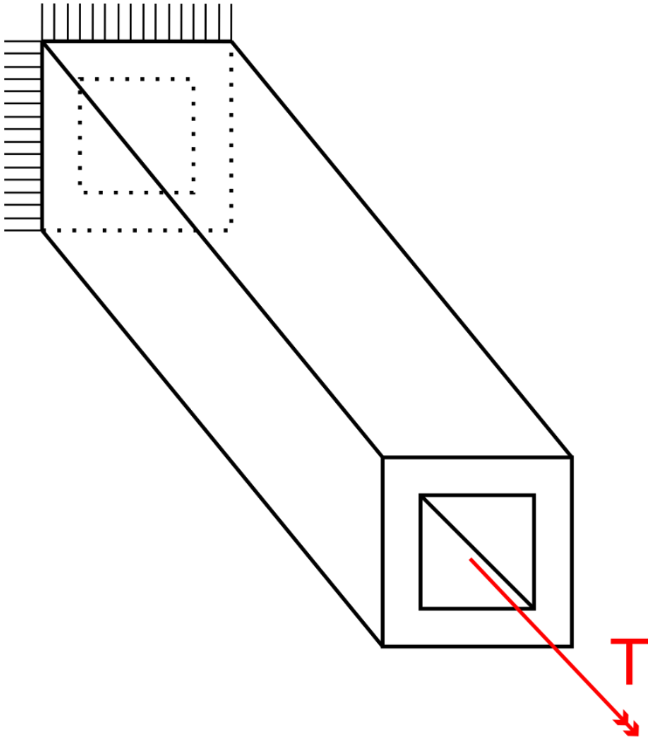




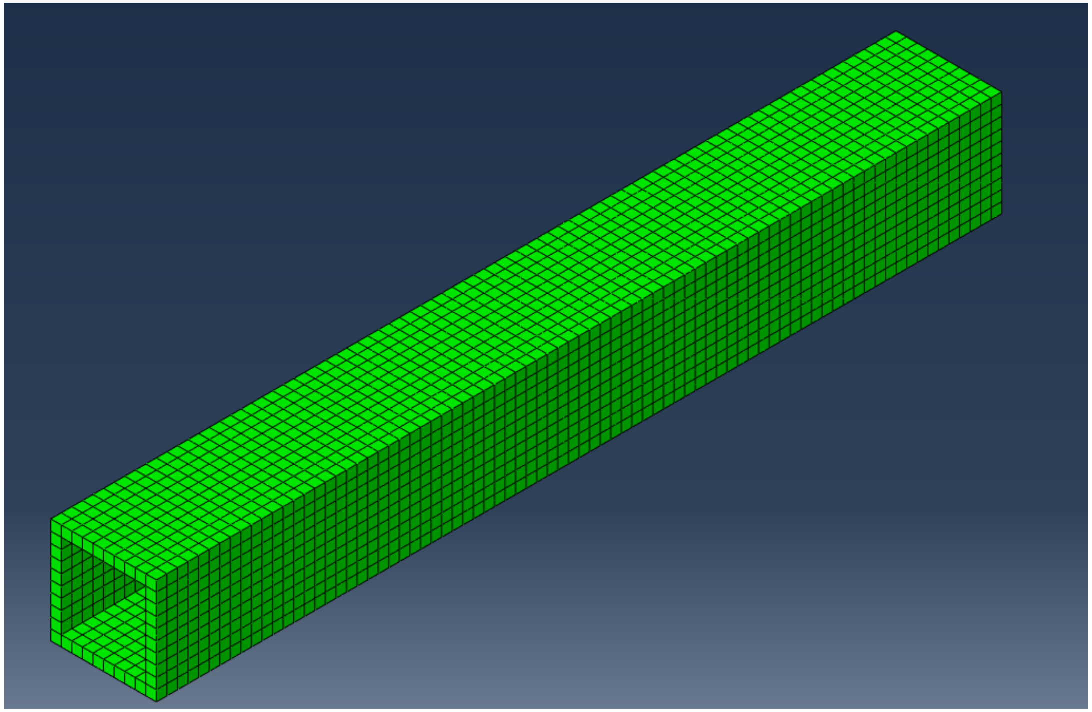
Simulação usando Elementos Finitos

PEFUSP

- Torção de um tubo quadrado

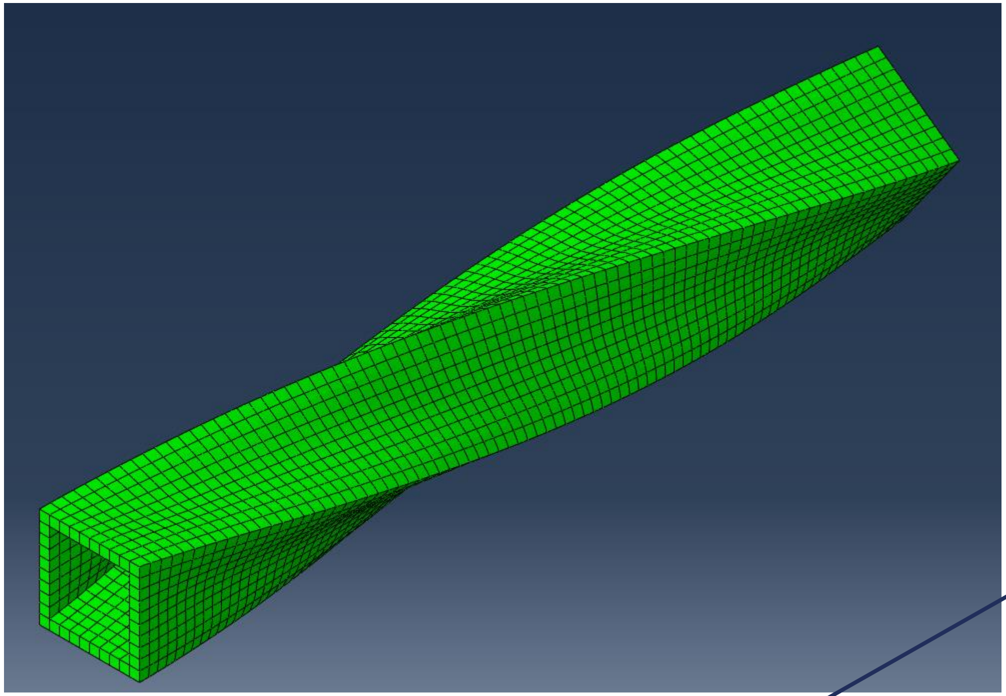


Malha do Método dos Elementos Finitos (MEF)

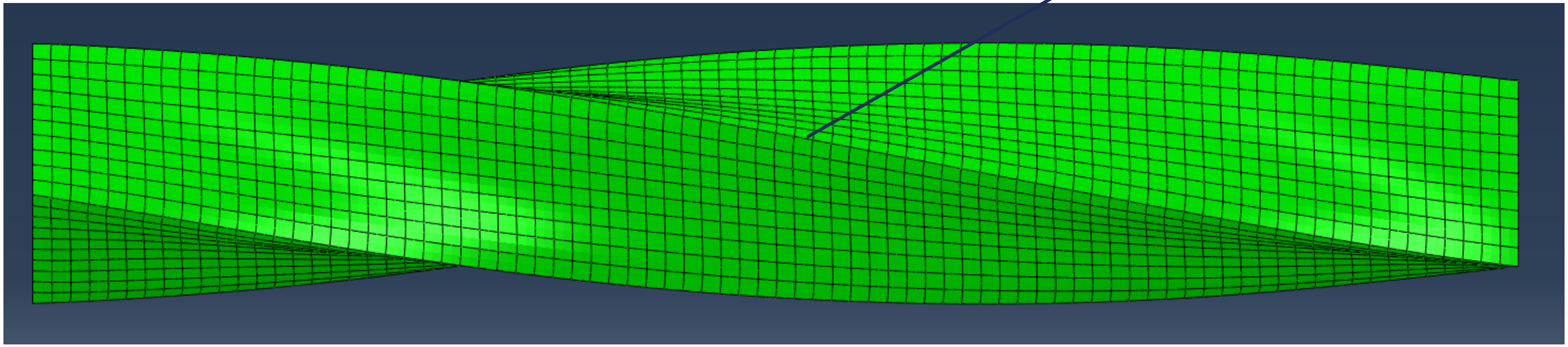


Configuração deformada

PEFUSP

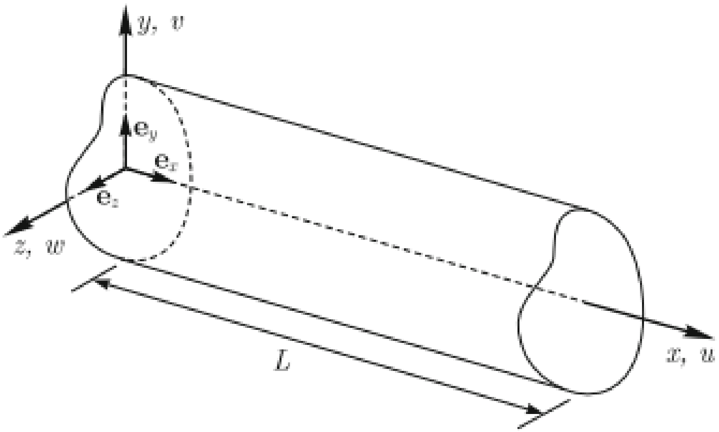


Detalhe do empenamento da seção



Torção de Saint-Venant

- A seção transversal circular não empena
- A seção transversal retangular apresenta empenamento
- É necessário desenvolver uma teoria de torção mais ampla para prever o empenamento da seção transversal
  - Torção uniforme de Saint-Venant
- Método semi-inverso
  - Proposição de um campo cinemático com base em intuição para posterior verificação de sua validade



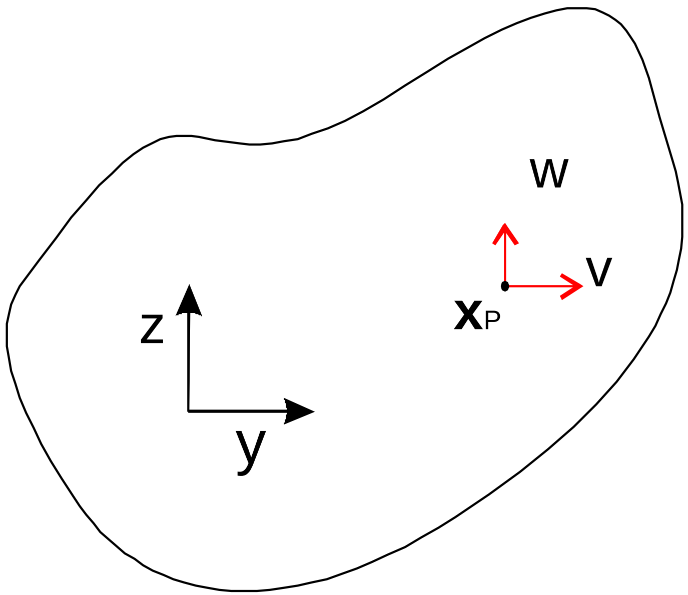
Barra submetida a momentos de torção auto equilibrados nas seções de extremidade:

$$\boldsymbol{M_t} = M_t \boldsymbol{e_x} \text{ em x} = \text{L}$$

$$\boldsymbol{M_t} = -M_t \boldsymbol{e_x} \text{ em x} = 0$$

Hipótese cinemática

- O movimento de cada seção transversal é decomposto em duas partes:
  - Rotação da seção (como no caso da seção circular)
  - Empenamento da seção (movimento ortogonal ao plano da seção)
  - Assumem-se pequenas rotações



$$u = \psi(y,z)\theta'$$

$$v = -\theta' xz$$

$$w = +\theta' xy$$

$\theta' x$ é a magnitude da rotação de uma seção transversal

$$\theta' = \frac{d\theta}{dx} = constante$$

$$\theta(x) = \theta' x$$

$$assumindo\ \theta(0) = 0$$

θ' – taxa de rotação

$\psi(y,z)$ – função de empenamento

Campo de deformações (infinitesimais)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \ , \ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \ , \ \varepsilon_{xx} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \theta' \frac{\partial \psi}{\partial y} - \theta' z = \theta' \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta' \frac{\partial \psi}{\partial z} + \theta' y = \theta' \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta' x + \theta' x = 0$$

Campo de tensões

PEFUSP

Considerando o material homogêneo e isotrópico:

$$\tau_{xx} = \frac{E\,(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\,\upsilon)}\left[\varepsilon_{xx} + \frac{\upsilon}{1-\upsilon}\,(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\right]$$

$$\tau_{yy} = \frac{E\,(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\,\upsilon)}\left[\varepsilon_{yy} + \frac{\upsilon}{1-\upsilon}\,(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})\right]$$

$$\tau_{zz} = \frac{E\,(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\,\upsilon)}\left[\varepsilon_{zz} + \frac{\upsilon}{1-\upsilon}\,(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\right]$$

Que leva a:

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = 0$$

Campo de tensões

Para as tensões de cisalhamento:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\theta'\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - z\right)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\theta'\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + y\right)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = 0$$

Equações de equilíbrio

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = 0$$

Que leva à equação de Laplace em ψ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

Condições de contorno

- Superfícies laterais se encontram descarregadas (tensão nula)
- A tensão de cisalhamento no plano da seção transversal, ao longo de uma curva perimetral, deve ser tangente à curva

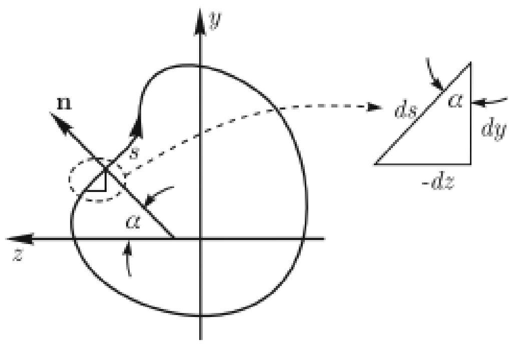


Figura 2. Seção transversal genérica.

$$n_y = sen(\alpha)$$
$$n_z = \cos(\alpha)$$
$$ds\cos(\alpha) = dy$$
$$ds\,\mathrm{sen}(\alpha) = -dz$$

$$\mathbf{Tn} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = 0$$

Condições de contorno

Substituindo n_y e n_z na equação anterior:

$$\tau_{xy}\frac{dz}{ds} - \tau_{xz}\frac{dy}{ds} = 0$$

Substituindo τ_{xy} e τ_{xz}:

$$G\theta'\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + y\right)\frac{dy}{ds} - G\theta'\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - z\right)\frac{dz}{ds} = 0$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + y\right)\frac{dy}{ds} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - z\right)\frac{dz}{ds} = 0$$

Problema de Valor de Contorno

Determinar $\psi(y, z)$ tal que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0 \text{ no domínio da seção} \\ \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial z} + y\right)\dfrac{dy}{ds} - \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial y} - z\right)\dfrac{dz}{ds} = 0 \text{ no contorno} \end{cases}$$

Note que a solução $\psi(y, z)$ depende somente da forma da seção transversal

- A primeira equação de equilíbrio implica em:

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

- Observando esse resultado, podemos propor uma função φ tal que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \tau_{xy} \text{ e } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\tau_{xz}$$

- Essa função é denominada Função de Prandtl
- Satisfaz naturalmente o equilíbrio
  - Se φ apresenta suas derivadas cruzadas de ordem 2 contínuas em todo o domínio, então vale (Teorema se Schwarz):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}$$

Relacionando com a função empenamento...

Pode-se escrever:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = G\theta' \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z\right) \Longrightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = G\theta' \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} - 1\right)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = G\theta' \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y\right) \Longrightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -G\theta' \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + 1\right)$$

E obter-se:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -2G\theta'$$

(assumindo-se que a função empenamento também obedece as condições do Teorema de Schwarz)

Condição de Contorno

PEFUSP

- Temos a condição já definida para o contorno da seção transversal:

$$\tau_{xy}\frac{dz}{ds} - \tau_{xz}\frac{dy}{ds} = 0$$

- Substituindo as expressões das tensões, escritas com a função de Prandtl:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = 0$$

- Essa expressão pode ser interpretada como sendo a derivada total (substantiva) de φ em relação a s:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 0$$

- Conclusão: a função de Prandtl deve ser constante no contorno. Em particular, podemos adotar o valor nulo.

Problema de Valor de Contorno

Determinar $\varphi(y, z)$ tal que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -2G\theta' \text{no domínio da seção} \\ \varphi = 0 \text{ no contorno} \end{cases}$$

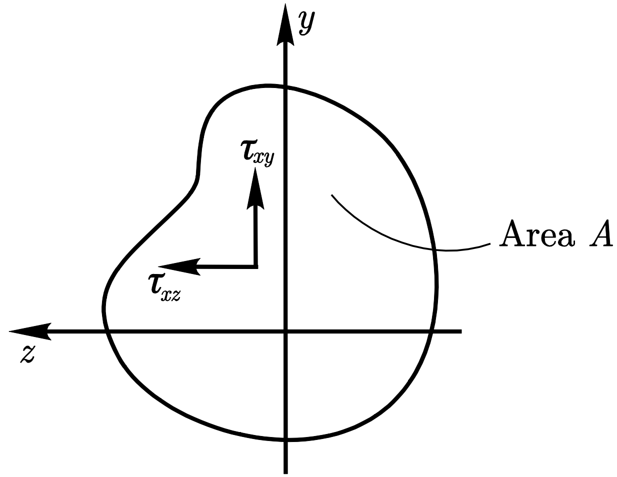
Tendo-se determinado φ: obtem-se ψ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = G\theta'\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z\right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -G\theta'\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y\right)$$

Integrando as tensões: obtenção dos esforços solicitantes

Considere:



$\boldsymbol{f}^S = \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_x$ em x = L

$$\begin{bmatrix} f_x^S \\ f_y^S \\ f_z^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}$$

$$N = \int_A \tau_{xx} dA = 0,\ M_y = \int_A \tau_{xx} z dA = 0,\ M_z = \int_A -\tau_{xx} y dA = 0$$

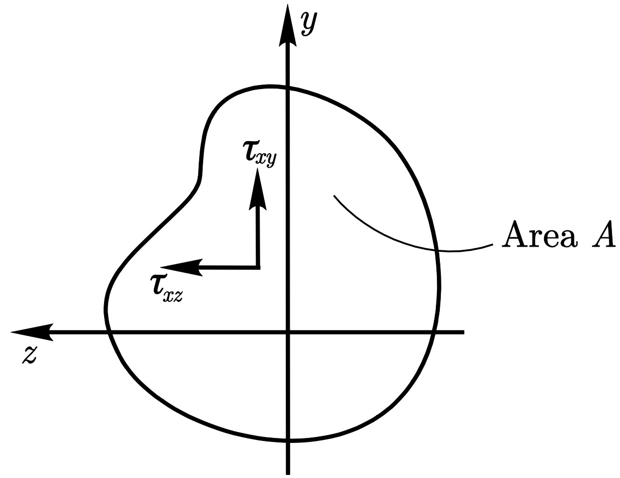
Por integração de τ_{xy} e τ_{xz} escritas em termos de φ, mostra-se que:

$$V_y = \int_A \tau_{xy} dA = 0,\ V_z = \int_A \tau_{xz} dA = 0$$

Momento de torção

O único esforço solicitante não nulo é o momento de torção:

$$M_t = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z)\, dA$$



Que resulta em (Teorema do Divergente):

$$M_t = 2\int_A \varphi\, dA$$

e:

$$M_t = G\theta' \int_A \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + y\right) y - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - z\right) z\right] dA = G\theta' \int_A \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} y - \frac{\partial\psi}{\partial y} z\right) + (y^2 + z^2)\right] dA$$

Momento de torção

PEFUSP

O que permite definir:

$$I_t = \int_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} y - \frac{\partial \psi}{\partial y} z \right) + (y^2 + z^2) \right] dA$$

Onde:

I_t – Momento de inércia à torção.

E portanto:

$$\frac{M_t}{G I_t} = \theta'$$

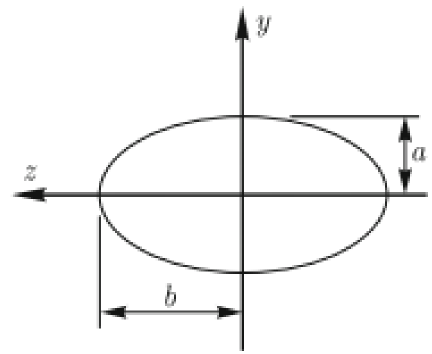
Deduções análogas podem ser feitas para x = 0.

Exemplo – Seção transversal elíptica

Barra de seção elíptica submetida a momentos auto equilibrados

$$\boldsymbol{M_t} = M_t \boldsymbol{e_x} \text{ em x = L e}$$

$$-\boldsymbol{M_t} \text{ para x = 0}$$



Exemplo – Seção transversal elíptica

Considere a função:

$$\varphi = C\left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1\right)$$

com C sendo uma constante real.

Satisfaz $\varphi = 0$ no contorno e $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -2G\theta'$ no domínio da seção quando:

$$C = -\frac{a^2 b^2 G\theta'}{a^2 + b^2}$$

Portanto:

$$\varphi = -\frac{a^2 b^2 G\theta'}{a^2 + b^2}\left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1\right)$$

Exemplo – Seção transversal elíptica

E resulta em:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = G\theta' \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right)$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial y} = G\theta' \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) = -\frac{2a^2}{a^2 + b^2} z, \; \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) = \frac{2b^2}{a^2 + b^2} y$$

E por integração de ψ :

$$\psi = yz \; - \frac{2a^2}{a^2 + \; b^2} zy + f(z)$$

$$\psi = -yz + \frac{2b^2}{a^2 + \; b^2} zy + f(y)$$

Exemplo – Seção transversal elíptica

Resultando:

$$\psi = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} zy + K$$

onde K é uma constante real.

Admitindo-se $u = 0$ para $y = z = 0$, tem-se:

$$\psi(y, z) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} zy$$

Exemplo – Seção transversal elíptica

Usando:

$$I_t = \int_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} y - \frac{\partial \psi}{\partial y} z \right) + (y^2 + z^2) \right] dA$$

Chega-se a:

$$I_t = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

E pode-se calcular:

$$\theta' = \frac{M_t}{G I_t} = \frac{M_t}{G} \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3}$$

Exemplo – Seção transversal elíptica

Os deslocamentos são dados por:

$$u = \theta'\psi(y,z) = \frac{M_t}{G}\frac{b^2 - a^2}{\pi a^3 b^3} yz$$

$$v = -\theta' xz = -\frac{M_t}{G}\frac{b^2 + a^2}{\pi a^3 b^3} xz$$

$$w = \theta' xy = \frac{M_t}{G}\frac{b^2 + a^2}{\pi a^3 b^3} xy$$

E as tensões:

$$\tau_{xy} = \frac{-2M_t a^2}{\pi a^3 b^3} z$$

$$\tau_{xz} = \frac{2M_t b^2}{\pi a^3 b^3} y$$

Exemplo – Seção transversal elíptica

PEFUSP

Graficamente: