Aula 13

Espaços com Produto Interno

Def: Seja U esp. vetorial sobre $\mathbb{K}$ com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Um produto interno sobre U é uma função $\langle , \rangle : U \times U \longmapsto \mathbb{K}$ que satisfaz

(i) $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \forall u, v, w \in U$

(ii) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall u, v \in U$

(iii) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \quad \forall u, v \in U$

Recall: $\overline{\cdot}$ conjugado

(iv) $\langle u, u \rangle > 0 \quad \forall u \in U / \{0\}$

$$\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

OBS:

(a) $\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0$

(b) $\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle \quad \forall u, v, w \in U$

e $\langle u, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle$ com efeito

$$\langle u, v+w \rangle = \overline{\langle v+w, u \rangle} = \overline{\langle v, u \rangle} + \overline{\langle w, u \rangle}$$

e $\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\langle \lambda v, u \rangle} = \bar{\lambda}\, \overline{\langle v, u \rangle}$

Note que se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.

(d) $\langle \sum_i u_i, \sum_j v_j \rangle = \sum_{ij} \langle u_i, v_j \rangle$.

<u>Exemplos</u>:

(a) $U = \mathbb{K}^n$ definimos (Produto interno canônico em $\mathbb{K}^n$)

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i .$$

(b) $U = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ sobre $\mathbb{K}$.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f\overline{g} \quad \text{é produto interno.}$$

$\forall f, g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$.

OBS: Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b (f_1 + i f_2)$

$$:= \int_a^b f_1 + i \int_a^b f_2 .$$

(c) $U = M_n(\mathbb{K})$ $\quad A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \overline{b_{ij}} .$$

Produto interno canônico em $M_n(\mathbb{K})$.

OBS: (i) Seja V subespaço de U, espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então $\langle \cdot, \cdot \rangle$ restrito aos elementos de V é um produto interno sobre V.

(ii) Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Suponha que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ seja produto interno em V. Seja $T: U \mapsto V$ linear injetiva. Então podemos definir o seguinte produto interno em U

$$\langle u, v \rangle_T = \langle Tu, Tv \rangle \quad \forall u, v \in U.$$

Verifique!!! Consequentemente todo espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ com dimensão finita possui produto interno.

De fato, todo espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão $n \in \mathbb{N}$ é isomorfo a $\mathbb{K}^n$ e possui produto interno induzido pelo isomorfismo.

Exemplo: Seja $T: \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \mapsto \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

$$f(t) \to t f(t) \quad t \in [0,1]$$

(i) T é linear e injetiva

(ii) $\langle f, g \rangle_T = \langle Tf, Tg \rangle = \int_0^1 t^2 f(t) \overline{g(t)} \, dt.$

Norma: Seja U espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ munido de produto interno. Para cada $u \in U$ chamamos norma de u o número

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Segue das propriedades de produto interno que

(a) $\|u\| \geq 0$ e $\|u\| = 0 \iff u = 0$

(b) $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\| \quad \forall u \in U$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Exemplos:

1) Em $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$ é produto interno e

$\|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Veja que

$\|(x_1, x_2, x_3) - (y_1, y_2, y_3)\|$ indica a distância entre os vetores.

2) Verifique que $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = 2x_1x_2 + 25y_1y_2$ é produto interno em $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ e observe que

$$\|(1,0)\| = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \|(0,1)\| = 5.$$

Algumas identidades

Pela definição temos $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle$.

Assim $\|u+v\|^2 = \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle$

$$= \overline{\langle u+v, u\rangle} + \overline{\langle u+v, v\rangle}$$

$$= \overline{\langle u,u\rangle} + \overline{\langle v,u\rangle} + \overline{\langle u,v\rangle} + \overline{\langle v,v\rangle}$$

$$= \|u\|^2 + \underbrace{\langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle}}_{2\,\mathrm{Re}\langle u,v\rangle} + \|v\|^2$$

(parte real de $\langle u,v\rangle$)

Analogamente

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle u,v\rangle + \|v\|^2.$$

Se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ obtemos

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 + \frac{1}{4}\|u-v\|^2.$$

Se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ prova-se (verifique)

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2.$$

$$+\frac{i}{4}\|u+iv\|^2 + \frac{i}{4}\|u-iv\|^2$$

identidades de polarização

Desigualdade de Schwarz

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\| \quad \forall u,v\in U.$$

dem. Para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, $u,v\in U$ temos

$$\langle \alpha u-\beta v, \alpha u-\beta v\rangle = |\alpha|^2\|u\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\alpha\bar{\beta}\langle u,v\rangle\right) + |\beta|^2\|v\|^2$$

Se tomamos $\alpha=\|v\|^2$ e $\beta=\langle u,v\rangle$

$$\alpha\bar{\beta}\langle u,v\rangle = \|v\|^2\bar{\beta}\beta = \|v\|^2|\beta|^2 \in\mathbb{R}. \text{ Logo}$$

$$0\leq\langle \alpha u-\beta v, \alpha u-\beta v\rangle = \|u\|^2\|v\|^4 - 2\|v\|^2\langle u,v\rangle^2 + \langle u,v\rangle^2\|v\|^2$$

$$= \|v\|^2 \left(\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u,v \rangle^2 \right) \quad \blacksquare$$

OBS: A igualdade $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\|v\|$ se só se $\{u,v\}$ é linearmente dependente. Com efeito,

se $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\|v\|$ então $\langle \alpha u - \beta v, \alpha u - \beta v \rangle = 0$ e assim

$$\alpha u = \beta v \quad \text{com} \quad \alpha = \|v\|^2 \text{ e } \beta = \langle u,v \rangle.$$

$\blacksquare$

Desigualdade Triangular

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u,v \in U \text{ esp. vet. com produto interno.}$$

De fato, $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle u,v \rangle + \|v\|^2$

$$\leq \|u\|^2 + 2|\langle u,v\rangle| + \|v\|^2$$

$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2.$$

Exercícios: Seção 6.1.10: 1, 2, 3, 6, 7.