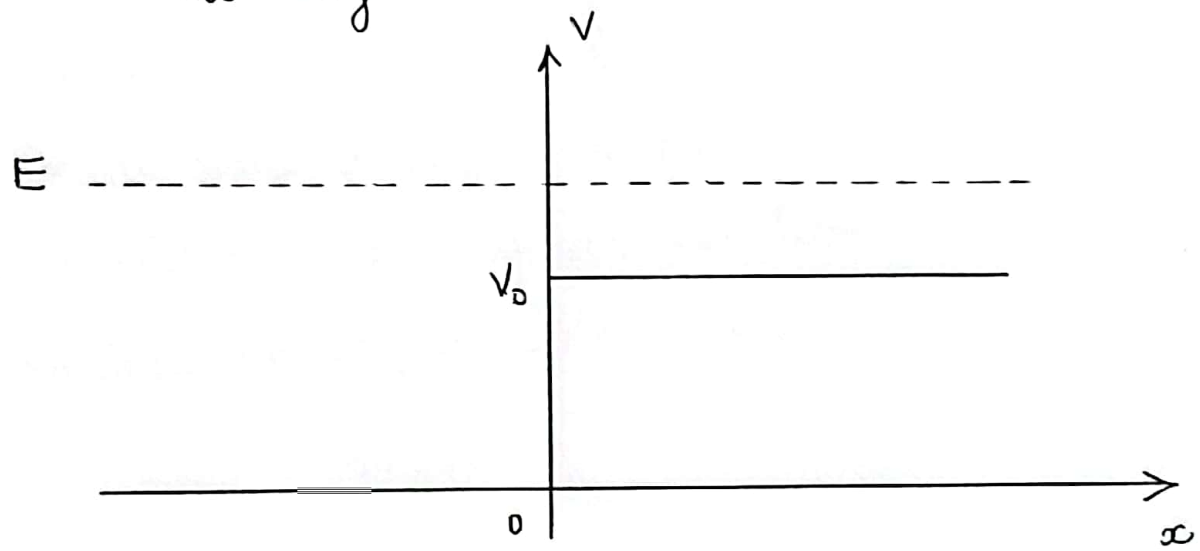
Potencial degrau

Caso 2 : partícula com energia maior que a altura do degrau



Assumiremos novamente que a partícula incide sobre o degrau a partir da região $x < 0$.

As eqs. de Schrödinger independente do tempo nas regiões $x < 0$ e $x > 0$ são dadas por

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\psi}{dx^2} = -\dfrac{2mE}{\hbar^2}\psi = -K_1^2\psi \,, & x < 0 \\[2ex] \dfrac{d^2\psi}{dx^2} = \dfrac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\psi = -\dfrac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\psi = -K_2\psi \,, & x > 0 \end{cases}$$

com $K_1 = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar} > 0$ e $K_2 = \dfrac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} > 0$, $K_2 < K_1$

As soluções gerais são então

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}, & x \leq 0 \\ C e^{ik_2 x} + D e^{-ik_2 x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Entretanto, do ponto de vista físico, dado que a partícula incide sobre o degrau a partir de $x < 0$, não há qualquer razão para a existência do termo $D e^{-ik_2 x}$ na onda transmitida da região $x > 0$. Dessa forma, tomamos

$$D = 0$$

a condição de continuidade de ψ, leva a

$$\psi(x \leq 0)\Big|_{x=0} = \psi(x \geq 0)\Big|_{x=0}$$

$$A + B = C \quad (*)$$

Temos também que

$$\frac{d\psi}{dx} = \begin{cases} ik_1 A e^{ik_1 x} - ik_1 B e^{-ik_1 x}, & x \leq 0 \\ ik_2 C e^{ik_2 x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Portanto

$$\left.\frac{d\psi(x\leqslant 0)}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{d\psi(x\geqslant 0)}{dx}\right|_{x=0} \Rightarrow iK_1 A - iK_1 B = iK_2 C$$

$$K_1 A - K_1 B = K_2 C$$

$$K_1 B + K_2 C = K_1 A \quad (**)$$

Temos então o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} B - C = -A \\ K_1 B + K_2 C = K_1 A \end{cases},$$

de forma que

$$(K_1 + K_2) B = (K_1 - K_2) A \Rightarrow B = \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}\right) A$$

e

$$(K_1 + K_2) C = 2K_1 A \Rightarrow C = \left(\frac{2K_1}{K_1 + K_2}\right) A$$

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{iK_1 x} + \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}\right) A e^{-iK_1 x}, & x \leqslant 0 \\ \left(\frac{2K_1}{K_1 + K_2}\right) A e^{+iK_2 x}, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Logo, a função de onda completa é dada por

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} A e^{i(K_1 x - \omega t)} + B e^{-i(K_1 x + \omega t)} = \Psi_I(x,t) + \Psi_R(x,t) \,, & x \leq 0 \\ C e^{i(K_2 x - \omega t)} = \Psi_T(x,t) \,, & x \geq 0 \end{cases}$$

a densidade de probabilidade na região $x \leq 0$ é

$$P(x \leq 0, t) = (\Psi_I + \Psi_R)^* (\Psi_I + \Psi_R)$$

$$= |\Psi_I|^2 + |\Psi_R|^2 + 2 \, \mathrm{Re} \left(\Psi_I^* \Psi_R \right)$$

$$= |A|^2 + \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^2 |A|^2 + 2 \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right) |A|^2 \cos(2K_1 x)$$

$$= |A|^2 \left[1 + \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right) \cos(2K_1 x) \right]$$

Ou seja, na região $x \leq 0$, a densidade de probabilidade tem como valores máximo e mínimo

$$P_{max} = |A|^2 \left[1 + \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right) \right] = |A|^2 \left[1 + \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right]^2$$

$$= \frac{4 K_1^2}{(K_1 + K_2)^2} |A|^2$$

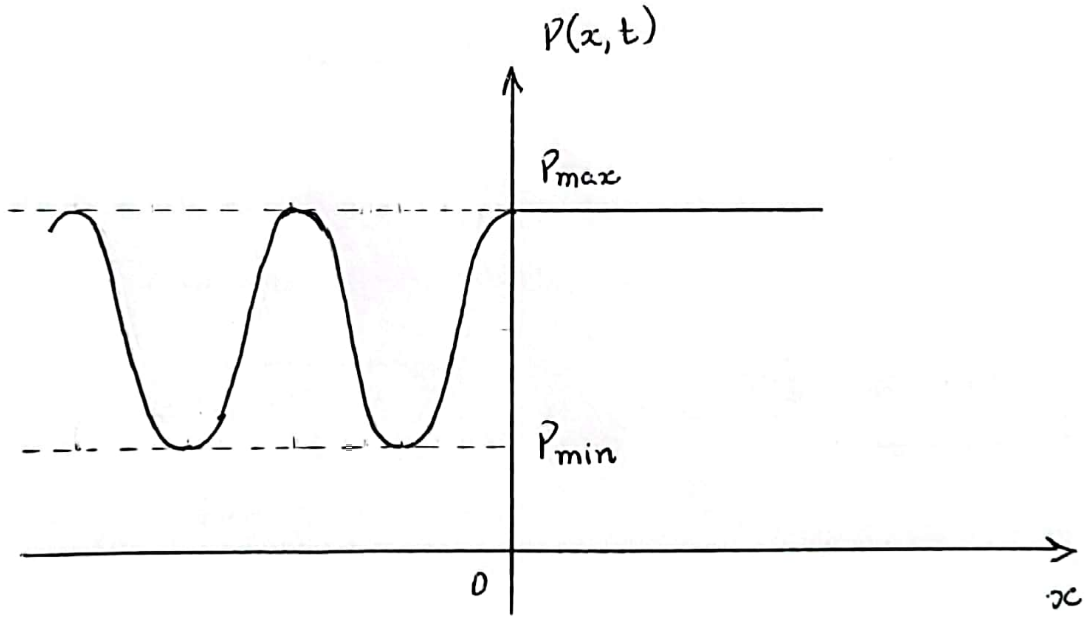
Digitalizado com CamScanner

$$P_{min} = |A|^2 \left[1 + \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^2 - 2 \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right) \right]$$

$$= |A|^2 \left[1 - \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right) \right]^2 = \frac{4 K_2^2}{(K_1 + K_2)^2} |A|^2$$

Já na região $x \geq 0$, temos

$$P(x \geq 0, t) = \Psi_T^* \Psi_T = \frac{4 K_1^2}{(K_1 + K_2)^2} |A|^2 = P_{max}$$



Perceba que assim como no caso $E < V_0$, na região $x \leq 0$, há a formação de uma onda estacionária, resultado da interferência da onda de matéria incidente $\Psi_I(x,t)$ com a onda de matéria refletida $\Psi_R(x,t)$.

Calculemos então o coeficiente de reflexão R

$$R = \frac{|\Psi_R|^2}{|\Psi_I|^2} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}\right)^2 = \left(\frac{1 - K_2/K_1}{1 + K_2/K_1}\right)^2 < 1$$

Ou seja, diferentemente do caso $E < V_0$, quando $E > V_0$ a reflexão não é total. Esse é um efeito puramente quântico, já que do ponto de vista clássico o coeficiente de reflexão deveria ser nulo, com a partícula prosseguindo após encontrar o degrau apenas alterando seu momento e energia cinética na região $x \geq 0$.

Perceba também que como

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\sqrt{2mE}} = \left(1 - \frac{V_0}{E}\right)^{1/2} \xrightarrow{E \gg V_0} 1 \,,$$

então

$$R \xrightarrow{E \gg V_0} 0 \quad \text{(limite clássico)}$$

Calculemos agora o coeficiente de transmissão T. No caso atual em que $T \neq 0$, teremos que tomar cuidado com a maneira como definimos esse coeficiente para garantir conservação de probabilidade, ou seja, que $R + T = 1$.

Definir T simplesmente como a razão entre a densidade de probabilidade da onda transmitida $|\Psi_T|^2$ e densidade de probabilidade incidente $|\Psi_I|^2$ não garante conservação de probabilidade.

A correta definição dos coeficientes de transmissão e reflexão é através da razão de fluxos de probabilidade, ou seja, probabilidade por unidade de tempo. No caso atual, em que a velocidade da partícula quântica é distinta nas regiões $x < 0$ e $x > 0$

$$v_1 = \frac{p_1}{m} = \frac{\hbar k_1}{m} \quad e \quad v_2 = \frac{p_2}{m} = \frac{\hbar k_2}{m} < v_1 \, ,$$

os respectivos fluxos de probabilidade para as ondas incidente, refletida e transmitida para ~~regiões~~ regiões de mesma extensão Δx são dados por

$$\frac{|\Psi_I|^2 \Delta x}{\Delta t_I} \, , \quad \frac{|\Psi_R|^2 \Delta x}{\Delta t_R} \, , \quad \frac{|\Psi_T|^2 \Delta x}{\Delta t_T}$$

com intervalos de tempo Δt_I, Δt_R, Δt_T distintos, já que a partícula quântica se move com velocidade distinta em $x < 0$ e $x > 0$. Mais precisamente

$$\frac{\Delta x}{\Delta t_I} = \frac{\Delta x}{\Delta t_R} = v_1 = \frac{\hbar k_1}{m} \quad e \quad \frac{\Delta x}{\Delta t_T} = \frac{\hbar k_2}{m}$$

Logo

$$R \equiv \frac{|\Psi_R|^2 \left(\frac{\hbar K_1}{m}\right)}{|\Psi_I|^2 \left(\frac{\hbar K_1}{m}\right)} = \frac{|\Psi_R|^2}{|\Psi_I|^2} = \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}\right)^2$$

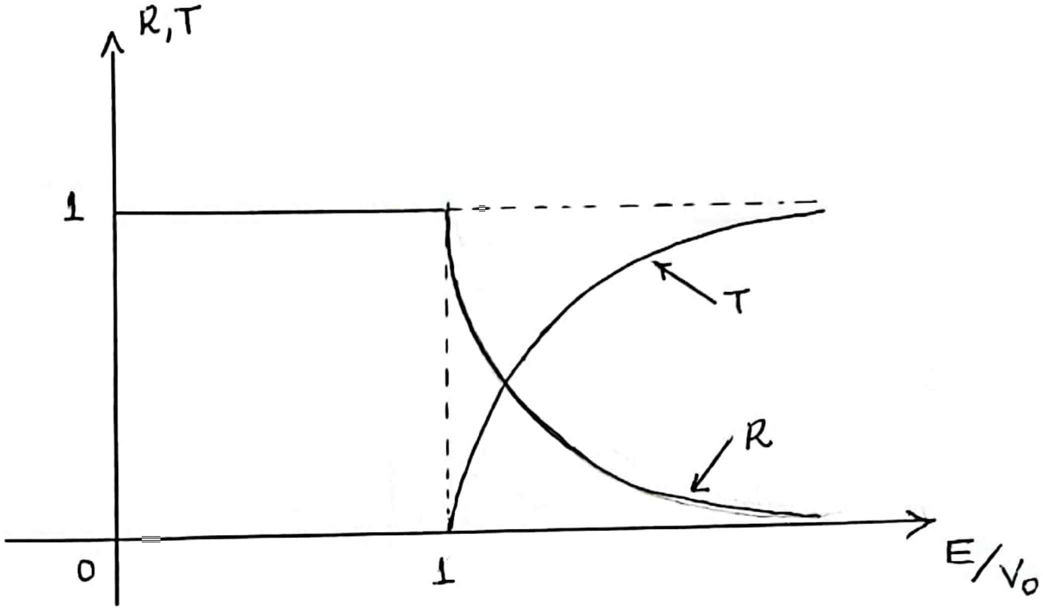
$$T \equiv \frac{|\Psi_T|^2 \left(\frac{\hbar K_2}{m}\right)}{|\Psi_I|^2 \left(\frac{\hbar K_1}{m}\right)} = \frac{|\Psi_T|^2 K_2}{|\Psi_I|^2 K_1} = \frac{4 K_1 K_2}{(K_1 + K_2)^2}$$

Com as definições acima, temos

$$R + T = \frac{K_1^2 - 2 K_1 K_2 + K_2^2}{(K_1 + K_2)^2} + \frac{4 K_1 K_2}{(K_1 + K_2)^2} = 1$$

Perceba também que a nova definição do coeficiente de reflexão R é idêntico à definição anterior já que a velocidade da partícula incidente e da refletida são as mesmas.

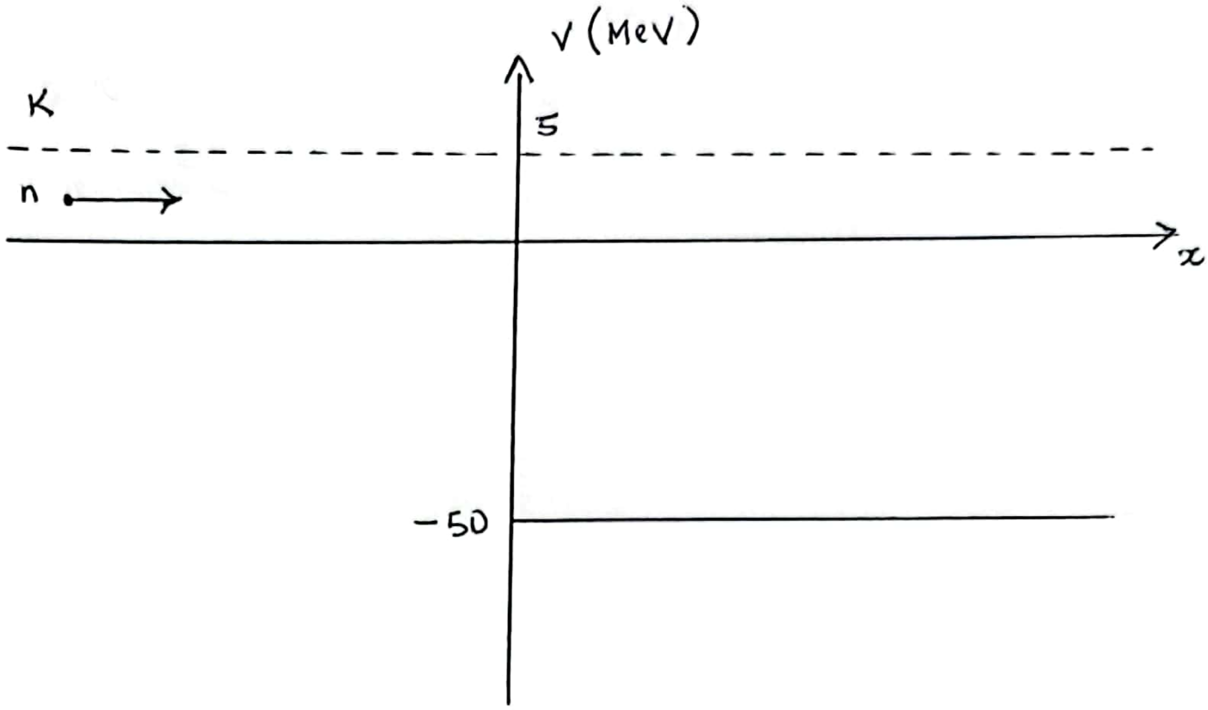
$$R = 1 - T = \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - V_0}}\right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - V_0/E}}{1 + \sqrt{1 - V_0/E}}\right)^2$$



—————//—————

Exemplo:

Quando um nêutron é capturado por um núcleo, sua energia potencial sofre uma queda ao cruzar a superfície nuclear. Essa queda é abrupta com V indo de 0 a cerca de -50 MeV tipicamente. Considere um nêutron com energia cinética inicial $K = 5$ MeV, ou seja, a energia típica de um nêutron emitido numa fissão nuclear. Estime a probabilidade de que esse nêutron seja refletido na superfície nuclear. Assuma o potencial nuclear possa ser aproximado por um degrau.



O coeficiente de reflexão é dado por

$$R = \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - V_0}}\right)^2, \quad \text{com} \begin{cases} V_0 = -50 \text{ MeV} \\ E = 5 \text{ MeV} \end{cases}$$

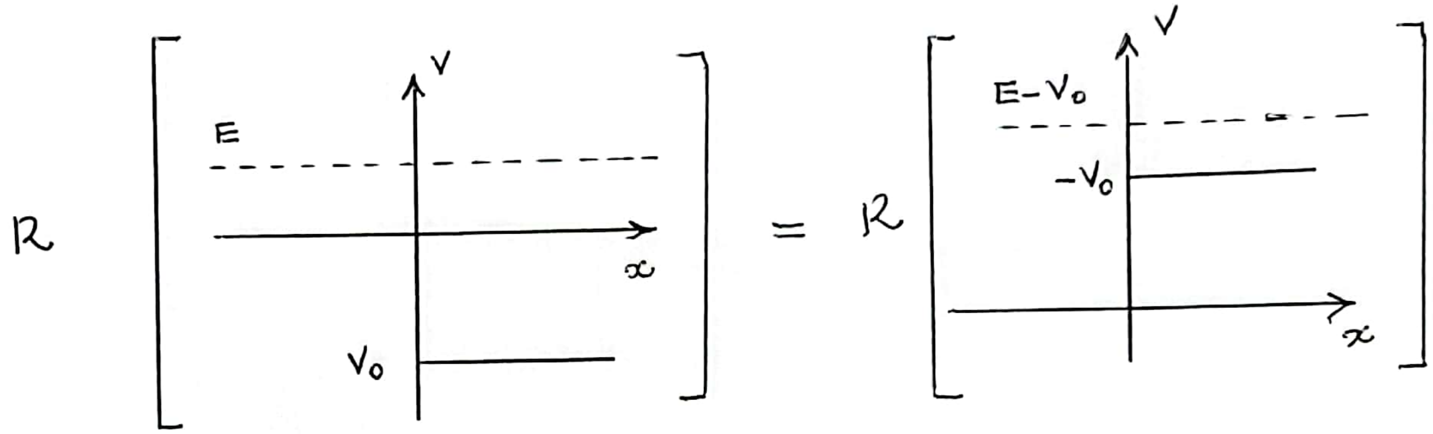
É interessante notar que podemos escrever R na forma

$$R = \left(\frac{\sqrt{E - V_0} - \sqrt{E}}{\sqrt{E - V_0} + \sqrt{E}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E - V_0} - \sqrt{E - V_0 + V_0}}{\sqrt{E - V_0} + \sqrt{E - V_0 + V_0}}\right)^2$$

$$= \left[\frac{1 - \sqrt{1 + \frac{V_0}{E - V_0}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{V_0}{E - V_0}}}\right]^2 = \left[\frac{1 - \sqrt{1 - 50/55}}{1 + \sqrt{1 - 50/55}}\right]^2$$

Logo $R \simeq 0,29$

Em outras palavras, pudemos relacionar o coeficiente de reflexão para um degrau positivo com aquele de um degrau negativo no caso $E > V_0$



A igualdade dos coeficientes acima é chamada de propriedade de reciprocidade.

O valor $R \simeq 0{,}29$ deve ser tomado apenas como uma estimativa grosseira do coeficiente de reflexão para neutrons de $K = 5\,MeV$. Isso se deve ao fato de que para esses nêutrons a aproximação de degrau para o potencial nuclear não é tão boa assim. Lembre-se, por exemplo, que a dimensão típica de núcleos atômicos é de $\sim 10\,Fm$. Já o comprimento de onda de de Broglie para nêutrons de $K = 5\,MeV$ é

$$\lambda = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{(2Mc^2K)^{1/2}}\frac{1}{\left(1+\frac{K}{2Mc^2}\right)^{1/2}} \simeq \frac{hc}{(2Mc^2K)^{1/2}}$$

$$= \frac{(4{,}135\times 10^{-15}\,eV\,s)(3\times 10^{8}\,m\,s^{-1})}{[2\times(9{,}4\times 10^{8}\,eV)\times(5\times 10^{6}\,eV)]^{1/2}} = 1{,}3\times 10^{-14}\,m$$

$$= 13\,Fm$$