CAPÍTULO

1 Os Fundamentos: Lógica e Demonstrações

As regras da lógica especificam o significado de sentenças matemáticas. Propositalmente, essas regras nos ajudam a entender proposições tais como "Existe um inteiro que não é a soma de dois quadrados" e "Para cada inteiro positivo n, a soma dos inteiros positivos menores que ou iguais a n é $n(n + 1) / 2$", bem como a raciocinar sobre elas. Lógica é a base de todo raciocínio matemático e de todo raciocínio automatizado. Ela tem aplicações práticas no desenvolvimento de máquinas de computação, em especificação de sistemas, em inteligência artificial, em programação de computadores, em linguagens de programação e em outras áreas da ciência da computação, bem como em outros campos de estudo.

Para entender matemática, precisamos entender o que torna um argumento matemático correto, ou seja, uma demonstração. Primeiro, demonstramos que uma afirmação é verdadeira e a chamamos de teorema. Um conjunto de teoremas sobre determinado tópico organiza o que conhecemos sobre esse tópico. Para aprender um tópico de matemática, uma pessoa precisa construir ativamente argumentos matemáticos nesse tópico, e não apenas ler algumas exposições. Além disso, conhecer a demonstração de um teorema, com freqüência, torna possível modificar o resultado em alguma outra situação; demonstrações são essenciais para o desenvolvimento de novas idéias. Estudantes de ciência da computação freqüentemente se surpreendem em relação ao quanto as demonstrações são importantes em sua área. De fato, elas são essenciais quando queremos verificar se um programa computacional está dando uma saída correta para todos os possíveis valores de entrada, quando mostramos que algoritmos sempre produzem resultados corretos, quando estabelecemos a segurança de um sistema e quando criamos inteligência artificial. Sistemas de raciocínio automatizado têm sido construídos para permitir que computadores construam suas próprias demonstrações.

Neste capítulo, vamos explicar o que torna um argumento matemático correto e introduzir ferramentas para construir esses argumentos. Vamos desenvolver um arsenal de métodos de demonstração diferentes que nos tornarão capazes de demonstrar muitos tipos de resultados. Depois de introduzir os diferentes métodos de demonstração, introduziremos alguma estratégia para a construção de demonstrações e também a noção de conjectura, e explicaremos o processo de desenvolvimento da matemática pelo estudo das conjecturas.

1.1 Lógica Proposicional

Introdução

As regras de lógica nos dão um significado preciso para sentenças matemáticas. Essas regras são usadas para distinguir entre argumentos matemáticos válidos e inválidos. Como o objetivo principal deste livro é ensinar nosso leitor a entender e a construir argumentos matemáticos corretos, começaremos nosso estudo de matemática discreta com uma introdução à lógica.

Paralelamente à sua importância no entendimento do raciocínio matemático, a lógica tem numerosas aplicações em ciência da computação. Suas regras são usadas no design de circuitos de computador, na construção de programas, na verificação da correção de programas e de muitas outras formas. Além do mais, sistemas de softwares têm sido desenvolvidos para construir demonstrações automaticamente. Vamos discutir essas aplicações da lógica nos próximos capítulos.

Proposições

Nossa discussão começa com uma introdução à construção dos blocos básicos de lógica — proposições. Uma **proposição** é uma sentença declarativa (isto é, uma sentença que declara um fato), que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambas.

EXEMPLO 1 Todas as seguintes sentenças declarativas são proposições.

Exemplos Extras

1. Brasília é a capital do Brasil.
2. Toronto é a capital do Canadá.
3. $1 + 1 = 2$.
4. $2 + 2 = 3$.

As proposições 1 e 3 são verdadeiras, assim como 2 e 4 são falsas.

Algumas sentenças que não são proposições são dadas no Exemplo 2.

EXEMPLO 2 Considere as seguintes sentenças.

1. Que horas são?
2. Leia isto cuidadosamente.
3. $x + 1 = 2$.
4. $x + y = z$.

As sentenças 1 e 2 não são proposições porque não são sentenças declarativas. As sentenças 3 e 4 não são proposições porque não são nem verdadeiras nem falsas. Note que as sentenças 3 e 4 podem se tornar proposições se atribuirmos um valor para as variáveis. Também vamos discutir outros meios de transformar tais sentenças em proposições na Seção 1.3.

Usamos letras para indicar **variáveis proposicionais (ou variáveis declarativas)**, que são variáveis que representam proposições, assim como letras são usadas para indicar variáveis numéricas. As letras convencionalmente usadas para variáveis proposicionais são $p, q, r, s, \ldots$. O **valor-verdade** de uma proposição é verdadeiro, indicado por V, se for uma proposição verdadeira, e falso, indicado por F, se for uma proposição falsa.

A área da lógica que se preocupa com as proposições é chamada de **cálculo proposicional** ou **lógica proposicional**, e foi desenvolvida sistematicamente a primeira vez pelo filósofo grego Aristóteles, há mais de 2.300 anos.

Links

ARISTÓTELES (384 a.C.–322 a.C.) Aristóteles nasceu em Estagira, norte da Grécia. Seu pai era o médico particular do rei da Macedônia. Como seu pai morreu quando Aristóteles era jovem, o filósofo não pôde seguir o costume de ter a mesma profissão de seu pai. Aristóteles ficou órfão cedo, pois sua mãe também morreu logo. O guardião que o criou ensinou-lhe poesia, retórica e grego. Aos 17 anos, seu guardião o enviou a Atenas para continuar sua educação. Aristóteles juntou-se à Academia de Platão, onde freqüentou durante 20 anos as aulas de Platão, e posteriormente apresentou suas próprias leituras de retórica. Quando Platão morreu em 347 a.C., Aristóteles não foi escolhido para ser seu sucessor na Academia, pois suas idéias eram muito diferentes das de Platão. Assim, Aristóteles se juntou à corte do rei Hérmias, onde permaneceu por três anos e casou-se com a sobrinha do rei. Como os persas derrotaram Hérmias, Aristóteles se mudou para Mitilena e, convidado pelo rei Filipe da Macedônia, tornou-se tutor de Alexandre, filho de Filipe, que mais tarde se tornaria Alexandre, o Grande. Aristóteles foi tutor de Alexandre durante cinco anos e, depois da morte do rei Filipe, retornou a Atenas e organizou sua própria escola, chamada "Liceu".

Os seguidores de Aristóteles eram chamados de "peripatéticos", que significa "os que passeiam", já que Aristóteles costumava caminhar quando discutia questões filosóficas. Aristóteles ensinou no "Liceu" por 13 anos, dando lições aos seus estudantes mais avançados pela manhã e aos populares em um auditório aberto, à noite. Quando Alexandre, o Grande, morreu em 323 a.C., uma reação violenta contra tudo relacionado a Alexandre iniciou um grande ataque de ímpetos contra Aristóteles, que fugiu para o Cálcis para evitar um processo. Ele viveu apenas um ano em Cálcis, morrendo por um problema estomacal em 322 a.C.

Aristóteles escreveu três tipos de trabalho: aqueles escritos para uma audiência popular, compilações de fatos científicos e tratados sistemáticos. Estes últimos incluem trabalhos de lógica, filosofia, psicologia, física e história natural. Os escritos de Aristóteles foram preservados por um estudante e escondidos em uma cripta, sendo descobertos por um colecionador de livros 200 anos depois. Eles foram levados para Roma, onde foram estudados por eruditos e publicados em novas edições para serem preservados para a posteridade.

Links

Agora voltaremos nossa atenção para métodos de produção de novas proposições a partir daquelas que já temos. Esses métodos foram discutidos pelo matemático inglês George Boole em 1854, em seu livro *The Laws of Thought*. Muitas sentenças matemáticas são construídas combinando-se uma ou mais proposições. Novas proposições, chamadas de **proposições compostas**, são criadas a partir de proposições existentes usando-se operadores lógicos.

DEFINIÇÃO 1 Seja p uma proposição. A *negação de p*, indicada por $\neg p$ (e também por $\overline{p}$), é a sentença

"Não é o caso de p."

A proposição $\neg p$ é lida "não p". O valor-verdade da negação de p, $\neg p$, é o oposto do valor-verdade de p.

EXEMPLO 3 Encontre a negação da proposição

"Hoje é sexta-feira."

Exemplos Extras

e expresse-a em português.

Solução: A negação é

"Não é o caso de hoje ser sexta-feira."

A negação pode ser expressa simplesmente por

"Hoje não é sexta-feira."

ou

"Não é sexta-feira hoje." ◀

EXEMPLO 4 Encontre a negação da proposição

"No mínimo 10 mm de chuva caíram hoje em São Paulo."

e expresse-a em português.

Solução: A negação é

"Não é o caso de no mínimo 10 mm de chuva ter caído hoje em São Paulo."

E pode ser expressa por

"Menos de 10 mm de chuva caíram hoje em São Paulo." ◀

Lembre-se: No sentido estrito, sentenças que envolvem advérbios de tempo como essas dos exemplos 3 e 4 não são proposições até que um tempo fixo seja assumido. O mesmo ocorre para advérbios de lugar, até que um lugar fixo seja assumido, e para pronomes, até que um indivíduo seja assumido. Nós sempre assumiremos um instante fixo, um lugar definido ou um indivíduo determinado nessas sentenças, a não ser que indiquemos o contrário.

TABELA 1 A Tabela-Verdade para a Negação de uma Proposição.

p	$\neg p$
V	F
F	V

A Tabela 1 nos mostra a **tabela-verdade** para a negação de uma proposição p. Essa tabela tem uma linha para cada uma das possibilidades de valor-verdade da proposição p – Verdadeiro e Falso. Cada linha mostra o valor-verdade de $\neg p$ correspondente ao valor-verdade de p nesta linha.

A negação de uma proposição pode também ser considerada o resultado da operação do **operador de negação** em uma proposição. O operador de negação constrói novas proposições a partir de proposições preexistentes. Agora, introduziremos os operadores lógicos que são usados para criar novas proposições a partir de outras duas ou mais já existentes. Os operadores lógicos são também chamados de **conectivos**.

DEFINIÇÃO 2 Sejam p e q proposições. A *conjunção* de p e q, indicada por $p \wedge q$, é a proposição "p e q". A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira quando ambas são verdadeiras, e falsa caso contrário.

A Tabela 2 nos mostra a tabela-verdade para $p \wedge q$. Essa tabela tem uma linha para cada combinação de valores-verdade para as proposições p e q. As quatro linhas correspondem aos pares VV, VF, FV e FF, em que o primeiro valor-verdade é o valor de p e o segundo é o valor de q.

Note que em lógica a palavra "mas" é freqüentemente usada no lugar do "e" em uma conjunção. Por exemplo, a frase "O sol está brilhando, mas está chovendo" é uma outra maneira de dizer "O sol está brilhando e está chovendo". (Em nossa linguagem natural, existe uma diferença substancial entre "mas" e "e", mas não vamos nos preocupar com essa nuança aqui.)

EXEMPLO 5 Encontre a conjunção das proposições p e q, em que p é a proposição "Hoje é sexta-feira" e q é a proposição "Hoje está chovendo".

Solução: A conjunção $p \wedge q$ dessas proposições é a proposição "Hoje é sexta-feira e hoje está chovendo". Essa proposição é verdadeira em uma sexta-feira chuvosa e é falsa em qualquer outro caso. ◀

DEFINIÇÃO 3 Sejam p e q proposições. A *disjunção* de p e q, indicada por $p \vee q$, é a proposição "p ou q". A disjunção $p \vee q$ é falsa se p e q são ambas falsas, e verdadeira em qualquer outro caso.

A Tabela 3 nos mostra a tabela-verdade para $p \vee q$.

O uso do conectivo *ou* em uma disjunção corresponde a uma das formas de uso da palavra *ou* em português, chamado *ou inclusivo*. Uma disjunção é verdadeira quando ao menos uma das proposições é verdadeira. Por exemplo, o ou inclusivo foi usado na frase

"Estudantes que têm aulas de cálculo ou ciência da computação podem assistir a estas aulas."

TABELA 2 **A Tabela-Verdade para a Conjunção de Duas Proposições.**

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

TABELA 3 **A Tabela-Verdade para a Disjunção de Duas Proposições.**

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Aqui, queremos dizer que estudantes que têm aulas de cálculo e ciência da computação podem assistir a estas aulas, bem como estudantes que têm aulas em apenas um dos cursos. Por outro lado, se queremos usar o *ou exclusivo*, dizemos

> "Estudantes que têm aulas de cálculo ou ciência da computação, mas não ambas, podem assistir a estas aulas."

Nesse caso, queremos dizer que estudantes que têm aulas nesses dois cursos, cálculo e ciência da computação, não podem assistir a estas aulas.

De maneira similar, quando em um cardápio de restaurante está escrito "Sopa ou salada é servida como entrada", o restaurante quer dizer que uma das duas entradas pode ser pedida, mas não ambas. Portanto, esse é um ou exclusivo, e não um ou inclusivo.

EXEMPLO 6 Qual é a disjunção das proposições p e q, em que p e q são as proposições do Exemplo 5?

Exemplos Extras

Solução: A disjunção $p \vee q$ dessas proposições é a proposição

> "Hoje é sexta-feira ou hoje está chovendo."

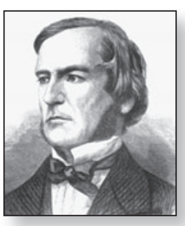
Essa proposição é verdadeira em uma sexta-feira ou em um dia chuvoso e somente é falsa no caso em que não é sexta-feira nem chove. ◀

Como tínhamos observado anteriormente, o uso do conectivo *ou* em uma disjunção corresponde a uma das formas da palavra *ou* usadas em português, denominada forma inclusiva. Então, uma disjunção é verdadeira se uma das proposições o é. Às vezes usamos *ou* da maneira exclusiva. Quando a maneira exclusiva é usada para conectar as proposições p e q, a proposição "*p ou q (mas não ambas)*" é obtida. Essa proposição é verdadeira se uma, e apenas uma, das proposições é verdadeira, e é falsa quando p e q são ambas falsas ou ambas verdadeiras.

DEFINIÇÃO 4 Sejam p e q proposições. A *disjunção exclusiva* (ou *ou exclusivo*) de p e q, indicada por $p \oplus q$, é a proposição que é verdadeira quando exatamente uma das duas é verdadeira e falsa nos outros casos.

A tabela-verdade para o ou exclusivo de duas proposições é mostrada na Tabela 4.

Links



GEORGE BOOLE (1815–1864) George Boole, filho de um sapateiro, nasceu em Lincoln, na Inglaterra, em novembro de 1815. Por causa da difícil situação financeira da família, Boole teve que se esforçar para educar-se enquanto a sustentava. No entanto, ele se tornou um dos matemáticos mais importantes do século XIX. Embora considerasse a carreira como um clérigo, ele preferiu, em vez disso, entrar no mundo do ensino e mais tarde abrir sua própria escola. Em sua preparação para ensinar matemática, Boole — insatisfeito com os livros de sua época — decidiu ler os trabalhos dos grandes matemáticos. Enquanto lia os trabalhos do grande matemático francês Lagrange, Boole fez descobertas no cálculo de variantes, o campo de análise que lida com a descoberta de curvas e superfícies e, assim, otimiza certos parâmetros.

Em 1848, Boole publicou o livro *The Mathematical Analysis of Logic*, o primeiro de sua contribuição à lógica simbólica. Em 1849, ele foi convidado para ser professor de matemática da Universidade de Queen, em Cork, Irlanda. Em 1854, publicou *The Laws of Thought*, seu mais famoso trabalho. Nesse livro, Boole introduziu o que passou a ser chamado de *álgebra booleana*, em sua homenagem. Boole escreveu livros de teoria de equações diferenciais que foram usados na Grã-Bretanha até o final do século XIX. Casou-se em 1855; sua mulher era a sobrinha do professor de grego da Universidade de Queen. Em 1864, Boole morreu de pneumonia, contraída por manter-se lendo mesmo encharcado depois de uma tempestade.

TABELA 4 A Tabela-Verdade para o Ou Exclusivo de Duas Proposições.

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

TABELA 5 A Tabela-Verdade para as Sentenças Condicionais $p \to q$.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proposições Condicionais

Vamos, agora, discutir outros modos importantes sobre os quais podemos combinar proposições.

DEFINIÇÃO 5 Sejam p e q proposições. A *proposição condicional* $p \to q$ é a proposição "se p, então q". A condicional $p \to q$ é falsa quando p é verdadeira e q é falsa, e verdadeira em qualquer outro caso. Na condicional $p \to q$, p é chamada de *hipótese* (ou *antecedente* ou *premissa*) e q é chamada de *conclusão* (ou *conseqüência* ou *conseqüente*).

Auto-avaliação

A proposição $p \to q$ é chamada de condicional porque $p \to q$ afirma que q é verdadeira na condição de que p também o seja. Uma proposição condicional é também chamada de **implicação**.

A tabela-verdade para a condicional $p \to q$ é mostrada na Tabela 5. Note que $p \to q$ é verdadeira quando ambos o são e quando p é falsa (não importando qual o valor-verdade de q).

Como a condicional é usada como uma regra essencial no raciocínio matemático, uma variedade de termos pode ser usada para expressar $p \to q$. Você pode encontrar algumas das seguintes formas para expressar a condicional:

"se p, então q"
"se p, q"
"p é suficiente para q"
"q se p"
"q quando ocorrer p"
"uma condição necessária para p é q"
"q a menos que $\neg p$"
"p implica q"
"p apenas se q"
"uma condição suficiente para q é p"
"q sempre que p"
"q é necessário para p"
"q segue de p"

Uma maneira usual de entender a tabela-verdade de uma condicional é pensar em uma obrigação ou um contrato. Por exemplo, uma promessa que muitos políticos fazem quando são candidatos é

"Se eu for eleito, então vou diminuir os impostos."

Se o político for eleito, os eleitores devem esperar que esse político diminua os impostos. No entanto, se o político não for eleito, os eleitores não terão nenhuma expectativa sobre o que tal político fará com os impostos, mesmo que a pessoa tenha influência suficiente para baixá-los. Será apenas quando o político for eleito, mas não baixar os impostos, que os eleitores poderão dizer que o político quebrou sua promessa de campanha. Esse último cenário corresponde ao caso em que p é verdadeira e q é falsa em $p \to q$.

Similarmente, considere a proposição que um professor pode fazer:

"Se você tirar nota 10 no exame final, então terá conceito A."

Se tirar nota 10 no exame final, então você espera receber o conceito A. Se não tirar 10, você pode ou não receber o conceito A dependendo de outros fatores. No entanto, se tirar 10, mas o professor não lhe der o conceito A, então você se sentirá trapaceado.

Muitas pessoas acham confuso que "p somente se q" expresse o mesmo que "se p então q". Para lembrar isto, note que "p somente se q" significa que p não pode ser verdadeira quando q não é. Ou seja, a proposição é falsa se p é verdadeira, mas q é falsa. Quando p é falsa, q pode ser verdadeira ou falsa, porque a proposição não diz nada sobre o valor-verdade de q. Um erro comum é pensar que "q somente se p" é uma possibilidade de expressar $p \to q$. No entanto, essas proposições têm valores-verdade diferentes quando p e q têm valores-verdade diferentes.

A expressão "a menos que" é freqüentemente usada para expressar condicionais. Observe que "q a menos que $\neg p$" significa que se $\neg p$ é falsa, então q deve ser verdadeira. Ou seja, a proposição "q a menos que $\neg p$" é falsa quando p é verdadeira e q é falsa, mas é verdadeira em qualquer outro caso. Conseqüentemente, "q a menos que $\neg p$" e $p \to q$ têm o mesmo valor-verdade.

Ilustraremos a tradução entre condicionais e proposições em português no Exemplo 7.

EXEMPLO 7 Seja p a proposição "Maria aprende matemática discreta" e q a proposição "Maria vai conseguir um bom emprego". Expresse $p \to q$ em português.

Exemplos Extras

Solução: Da definição de condicional, vemos que, quando p é a proposição "Maria aprende matemática discreta" e q é a proposição "Maria vai conseguir um bom emprego", $p \to q$ representa a proposição

"Se Maria aprender matemática discreta, então ela vai conseguir um bom emprego."

Existem muitas outras maneiras de expressar essa condicional em português. Algumas das mais naturais são:

"Maria vai encontrar um bom emprego quando aprender matemática discreta."

"Para conseguir um bom emprego, é suficiente que Maria aprenda matemática discreta."

e

"Maria vai conseguir um bom emprego, a menos que não aprenda matemática discreta." ◀

Note que o modo que definimos a condicional é mais geral do que o significado intrínseco às proposições em português. Veja que a proposição condicional no Exemplo 7 e a proposição

"Se hoje está ensolarado, então vou à praia."

são proposições utilizadas em linguagem natural, em que há uma relação entre a hipótese e a conclusão. Além disso, a primeira proposição é verdadeira, a menos que Maria aprenda matemática discreta, mas não consiga um bom emprego, e a segunda é verdadeira, a menos que seja um dia ensolarado e eu não vá à praia. Por outro lado, a proposição

"Se hoje é sexta-feira, então $2 + 3 = 5$."

é verdadeira pela definição de proposição condicional, porque a conclusão é verdadeira. (O valor-verdade da hipótese não faz diferença nesse caso.) A proposição condicional

"Se hoje é sexta-feira, então $2 + 3 = 6$."

é verdadeira para todos os dias, exceto às sextas-feiras, já que $2 + 3 = 6$ é falso.

Não usamos essas duas últimas condicionais em linguagem natural (exceto sarcasticamente), porque não existe uma relação entre a hipótese e a conclusão nos dois casos. No raciocínio matemático, consideramos a condicional de uma forma mais geral que a usada na língua portuguesa. O conceito matemático de condicional é independente de relações de causa–efeito entre a hipótese e a conclusão. Nossa definição de condicional especifica seus valores-verdade; não tem como base a sua utilização em português. A linguagem proposicional é uma linguagem artificial; nós apenas usamos o paralelo em português para torná-la fácil de ser utilizada e lembrada.

A construção se-então usada em muitas linguagens de programação é diferente da usada em lógica. A maioria das linguagens de programação contém declarações tais como **if** p **then** S, em que p é uma proposição e S é um segmento do programa (uma ou mais declarações a serem executadas). Quando a execução do programa encontra tal declaração, S é executado se p é verdadeira, mas S não é executado se p é falsa, como ilustrado no Exemplo 8.

EXEMPLO 8 Qual o valor da variável x depois da declaração

if $2 + 2 = 4$ **then** $x := x + 1$

se $x = 0$ antes de a declaração ser encontrada? (O símbolo $:=$ significa atribuição. A declaração $x := x + 1$ significa que o valor $x + 1$ será atribuído a x.)

Solução: Como $2 + 2 = 4$ é verdadeira, a declaração de atribuição $x := x + 1$ é executada. Portanto, x tem o valor $0 + 1 = 1$ depois da declaração encontrada. ◀

OPOSTA, CONTRAPOSITIVA E INVERSA Podemos formar muitas outras proposições começando com a condicional $p \rightarrow q$. Em particular, existem três proposições condicionais relacionadas que ocorrem tão freqüentemente que damos nomes a elas. A proposição $q \rightarrow p$ é chamada de **oposta** de $p \rightarrow q$. A **contrapositiva** de $p \rightarrow q$ é a proposição $\neg q \rightarrow \neg p$. A proposição $\neg p \rightarrow \neg q$ é chamada de **inversa** de $p \rightarrow q$. Veremos que, dessas três condicionais formadas a partir de $p \rightarrow q$, apenas a contrapositiva sempre tem o mesmo valor-verdade que $p \rightarrow q$.

Primeiro vamos mostrar que a contrapositiva, $\neg q \rightarrow \neg p$, de uma condicional $p \rightarrow q$ sempre tem o mesmo valor-verdade que $p \rightarrow q$. Para ver isso, note que a contrapositiva é falsa apenas no caso de $\neg p$ falsa e $\neg q$ verdadeira, que é apenas quando q é falsa e p é verdadeira. Agora podemos ver que nem a oposta, $q \rightarrow p$, nem a inversa, $\neg p \rightarrow \neg q$, têm o mesmo valor-verdade que $p \rightarrow q$, para todos os possíveis valores-verdade de p e q. Note que, quando p é verdadeira e q é falsa, a condicional original é falsa, mas a oposta e a inversa são ambas verdadeiras.

Quando duas proposições compostas têm sempre o mesmo valor-verdade, nós as chamamos **equivalentes**, de modo que a proposição condicional e a contrapositiva são equivalentes. A oposta e a inversa também são proposições equivalentes, como o leitor pode verificar, mas não são equivalentes à condicional original. (Vamos estudar proposições equivalentes na Seção 1.2.) Considere nota que um dos erros mais comuns na lógica é assumir que a inversa ou a oposta de uma condicional é equivalente a essa condicional.

Ilustraremos o uso das proposições condicionais no Exemplo 9.

EXEMPLO 9 Qual é a contrapositiva, a oposta e a inversa da proposição condicional

"O time da casa ganha sempre que está chovendo."?

Exemplos Extras

Solução: Como "q sempre que p" é uma das maneiras de escrever a condicional $p \rightarrow q$, a proposição original pode ser reescrita como

"Se está chovendo, então o time da casa ganha."

Conseqüentemente, a contrapositiva dessa condicional é

"Se o time da casa não ganha, então não está chovendo."

A oposta é

"Se o time da casa ganha, então está chovendo."

A inversa é

"Se não está chovendo, então o time da casa não ganha."

Apenas a contrapositiva é equivalente à condicional original. ◀

BICONDICIONAIS Vamos agora introduzir uma nova maneira de combinar proposições que expressa que duas proposições têm o mesmo valor-verdade.

DEFINIÇÃO 6 Sejam p e q proposições. A *proposição bicondicional* $p \leftrightarrow q$ é a proposição "p se e somente se q". A bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeira sempre que p e q têm o mesmo valor-verdade, e falsa caso contrário. Bicondicionais são também chamadas de *bi-implicações*.

A tabela-verdade para $p \leftrightarrow q$ está representada na Tabela 6. Note que $p \leftrightarrow q$ é verdadeira, quando ambas as condicionais $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ são verdadeiras, e falsa, caso contrário. Este é o motivo pelo qual usamos a expressão "se e somente se" para expressar o conectivo e porque ele é simbolicamente escrito pela combinação de $\rightarrow$ e $\leftarrow$. Existem muitas outras maneiras comuns de expressar $p \leftrightarrow q$:

"p é necessária e suficiente para q"
"se p então q, e vice-versa"
"p sse q" ("p iff q").

A última maneira de expressar uma bicondicional usa a abreviação "sse" para "se e somente se". Note que $p \leftrightarrow q$ é exatamente o mesmo que $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

EXEMPLO 10 Seja p a proposição "Você pode tomar o avião" e q a proposição "Você comprou uma passagem". Então $p \leftrightarrow q$ é a proposição

"Você pode tomar o avião se e somente se você comprou uma passagem."

Exemplos Extras

Essa proposição é verdadeira se p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas, ou seja, se você comprou uma passagem e pode tomar o avião ou se você não comprou uma passagem e não pode tomar o avião. E ela é falsa quando p e q têm valores-verdade opostos, ou seja, quando você comprou uma passagem, mas não pode tomar o avião (como se a empresa aérea o impedisse) ou quando não comprou uma passagem e pode tomar o avião (como se você tivesse ganho uma viagem). ◀

TABELA 6 A Tabela-Verdade para a Bicondicional $p \leftrightarrow q$.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

USO IMPLÍCITO DE BICONDICIONAIS Devemos estar cientes de que nem sempre bicondicionais estão explícitas em nossa linguagem natural. Em particular, a construção “se e somente se” é raramente usada na linguagem comum. Em vez disso, bicondicionais são freqüentemente expressas usando a construção “se, então” ou “somente se”. A outra parte do “se e somente se” fica implícita. Ou seja, a proposição oposta está implícita, mas não escrita (ou falada). Considere, por exemplo, a frase em português “Se terminar o almoço, então você pode comer a sobremesa”. Essa frase tem significado exato “Você pode comer a sobremesa se, e somente se, terminar o almoço”. Essa proposição é logicamente equivalente às duas proposições “Se terminar o almoço, então você pode comer a sobremesa” e “Você pode comer sobremesa somente se terminar o almoço”. Como temos essa imprecisão na linguagem natural, precisamos assumir que uma proposição condicional na linguagem natural inclui sua oposta. Como a precisão é essencial em matemática e em lógica, vamos sempre fazer distinção entre condicional e bicondicional.

Tabelas-Verdade para Proposições Compostas

Demo

Agora, já estão introduzidos os quatro importantes conectivos lógicos — conjunções, disjunções, condicional e bicondicional —, assim como as negações. Podemos usar esses conectivos para construir proposições mais complicadas que envolvem qualquer número de variáveis proposicionais. Você pode usar tabelas-verdade para determinar o valor-verdade dessas proposições, como ilustrado no Exemplo 11. Usamos uma coluna para achar o valor-verdade de cada expressão composta que ocorre na proposição composta original, exatamente como está construída. O valor-verdade da proposição composta para cada combinação de valores-verdade das variáveis proposicionais é expresso na última coluna da tabela.

EXEMPLO 11 Construa a tabela-verdade da proposição composta

$$(p \vee \neg\, q) \rightarrow (p \wedge q).$$

Solução: Como essa proposição envolve apenas duas variáveis proposicionais p e q, existem quatro linhas nessa tabela, correspondentes às combinações dos valores-verdade VV, VF, FV e FF. As primeiras duas colunas são usadas para os valores-verdade de p e q, respectivamente. Na terceira coluna, achamos os valores-verdade de $\neg q$, necessários para encontrar os valores de $p \vee \neg q$, que podem ser achados na quarta coluna. Os valores-verdade de $p \wedge q$ são encontrados na quinta coluna. Finalmente, os valores-verdade da proposição composta $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$ são encontrados na última coluna. A tabela-verdade resultante é mostrada na Tabela 7. ◀

Prioridade de Operadores Lógicos

Podemos construir proposições compostas usando a negação e os operadores lógicos já definidos antes. Vamos geralmente usar parênteses para especificar a ordem em que os operadores lógicos são aplicados em uma proposição composta. Por exemplo, $(p \vee q) \wedge (\neg r)$ é a conjunção de

TABELA 7 A Tabela-Verdade de $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$.

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F

TABELA 8
Prioridade do Operador Lógico.

Operador	*Prioridade*
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

$p \vee q$ e $\neg r$. No entanto, para reduzir o número de parênteses, especificamos que a negação é aplicada antes de qualquer outro operador. Isso significa que $\neg p \wedge q$ é a conjunção de $\neg p$ e q, não a negação da conjunção de p e q.

Outra regra geral de prioridade é que a conjunção tem prioridade sobre a disjunção, então $p \wedge q \vee r$ significa $(p \wedge q) \vee r$ em vez de $p \wedge (q \vee r)$. Como essa regra pode ser mais difícil de ser lembrada, vamos continuar usando parênteses até que a ordem fique clara.

Finalmente, é uma regra aceita que a condicional e a bicondicional têm prioridade menor que a conjunção e a disjunção. Conseqüentemente, $p \vee q \rightarrow r$ é o mesmo que $(p \vee q) \rightarrow r$. Vamos usar parênteses quando a prioridade dos conectivos condicional e bicondicional estiver em ordem inversa; tal seqüência será: o condicional deve ter prioridade maior que o bicondicional. A Tabela 8 mostra os níveis de prioridade dos operadores lógicos, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$.

Traduzindo Sentenças em Português

Existem muitas razões para traduzir sentenças em português para expressões que envolvem variáveis proposicionais e conectivos lógicos. Em particular, o português (e muitas outras linguagens humanas) é freqüentemente ambíguo. Traduzir sentenças como proposições compostas (e outros tipos de expressões lógicas, as quais vamos introduzir mais tarde neste capítulo) acaba com essa ambigüidade. Note que isso pode envolver um conjunto de fatos assumidos com base no significado de cada sentença. Mais ainda, uma vez traduzidas do português para expressões lógicas, podemos analisar seus valores-verdade, manipulá-las e ainda usar regras de inferência (as quais discutiremos na Seção 1.5) para raciocinar sobre elas.

Para ilustrar o processo de tradução de uma sentença do português para uma expressão lógica, considere os exemplos 12 e 13.

EXEMPLO 12 Como podemos traduzir esta sentença do português para expressões lógicas?

> "Você pode acessar a Internet a partir deste campus somente se você é um expert em ciência da computação ou não é um novato."

Exemplos Extras

Solução: Existem muitas maneiras de traduzir essa sentença para uma expressão lógica. Por exemplo, poderíamos representá-la por uma simples variável proposicional p, mas isso pode não ser usual quando queremos analisar o significado dela ou raciocinar sobre ela. No entanto, podemos usar variáveis proposicionais para cada sentença que forma a proposição e determinar os conectivos lógicos que devem estar entre elas. Em particular, podemos usar a, c e f representando "Você pode acessar a Internet a partir deste campus", "Você é um expert em ciências da computação" e "Você é um novato", respectivamente. Note que "somente se" é uma forma de a condicional ser expressa, então podemos representar a sentença por

$$a \rightarrow (c \vee \neg f).$$ ◄

EXEMPLO 13 Como podemos traduzir esta sentença do português para expressões lógicas?

> "Você pode pular de pára-quedas se você tem autorização de seus pais ou se tem mais de 18 anos."

Solução: Sejam q, r e s as representações de "Você pode pular de pára-quedas", "Você tem autorização de seus pais" e "Você tem mais de 18 anos", respectivamente. Então, a sentença pode ser traduzida por

$$(r \wedge \neg s) \rightarrow \neg q.$$

É claro que existem muitas outras maneiras de traduzir a sentença, mas essa já é suficiente. ◄

Sistemas de Especificações

A tradução de sentenças da linguagem natural para expressões lógicas é uma parte essencial para a especificação de sistemas de hardware e sistemas de software. Sistemas e engenheiros de software tomam afirmações em linguagem natural e produzem especificações precisas e sem ambigüidade que podem ser usadas como base de um sistema de desenvolvimento. O Exemplo 14 mostra como proposições compostas podem ser usadas nesse processo.

EXEMPLO 14 Expresse a especificação "A resposta automática não pode ser enviada quando o sistema está sobrecarregado", usando conectivos lógicos.

Exemplos Extras

Solução: Um meio de traduzir é tomar p como "A resposta automática pode ser enviada" e q como "O sistema está sobrecarregado". Então, $\neg p$ representa "Não é o caso de a resposta automática poder ser enviada" ou "A resposta automática não pode ser enviada". Conseqüentemente, nossa especificação pode ser representada por $q \rightarrow \neg p$. ◄

Sistemas de especificações devem ser **consistentes**, ou seja, não podem conter especificações conflitantes que possam ser usadas para derivar uma contradição. Quando as especificações não são consistentes, pode não haver um meio de desenvolver um sistema que satisfaça todas as especificações.

EXEMPLO 15 Determine se este sistema de especificações é consistente:

"A mensagem de diagnóstico é armazenada no buffer ou é retransmitida."
"A mensagem de diagnóstico não é armazenada no buffer."
"Se a mensagem de diagnóstico é armazenada no buffer, então ela é retransmitida."

Solução: Para determinar se esse sistema é consistente, primeiro vamos reescrevê-lo como expressões lógicas. Seja p "A mensagem de diagnóstico é armazenada no buffer" e q "A mensagem de diagnóstico é retransmitida". As especificações podem ser escritas como $p \vee q$, $\neg p$ e $p \rightarrow q$. Uma valoração que torna as três especificações verdadeiras deve ter p falsa para que $\neg p$ seja verdadeira. Como queremos que $p \vee q$ seja verdadeira e temos p falsa, devemos ter q verdadeira. Ainda como $p \rightarrow q$ é verdadeira quando p é falsa e q é verdadeira, concluímos que essas especificações são consistentes porque são verdadeiras quando p é falsa e q é verdadeira. Poderíamos chegar à mesma conclusão analisando as tabelas-verdade e examinando as quatro possibilidades de valores-verdade para p e q. ◄

EXEMPLO 16 O sistema de especificações do Exemplo 15 continua consistente se adicionarmos a especificação "A mensagem de diagnóstico não é retransmitida"?

Solução: Verificando o Exemplo 15, notamos que o sistema é consistente se p é falsa e q é verdadeira, mas a nova especificação representa $\neg q$, que somente é verdadeira se q é falsa. Conseqüentemente, esse novo sistema é inconsistente. ◄

Buscadores Booleanos

Links

Conectivos lógicos são largamente usados em buscadores de grandes conjuntos de informações, tais como índices de páginas da Internet. Como esses buscadores utilizam técnicas da lógica proposicional, eles são chamados de **buscadores booleanos**.

Em buscadores booleanos, o conectivo *E (AND)* é usado para encontrar informações que contenham ambos os termos procurados; o conectivo *OU (OR)* é usado para encontrar informações que contenham um ou ambos os termos procurados; e o conectivo *NÃO (NOT)*, às vezes escrito *E NÃO (AND NOT),* é usado para excluir alguma informação que contenha esse termo na procura. Um estudo cuidadoso de como são usados os conectivos lógicos é necessário quando buscadores booleanos são usados para localizar alguma informação de interesse potencial. O Exemplo 17 ilustra como funcionam os buscadores booleanos.

EXEMPLO 17 **Pesquisando Páginas da Internet** A maioria dos buscadores na Web, os quais usualmente podem nos ajudar a encontrar páginas da Internet sobre algum objeto específico, utiliza técnicas de buscadores booleanos. Por exemplo, usando um buscador booleano para achar uma página da Web sobre universidades em São Paulo, devemos procurar por páginas que trabalhem com SÃO *AND* PAULO *AND* UNIVERSIDADES. Os resultados dessa busca incluirão as páginas que contêm as três palavras SÃO, PAULO e UNIVERSIDADES. Isso deve incluir todas as páginas de interesse, assim como páginas sobre universidades que têm algum texto sobre São Paulo. (Note que, no Google e em muitos outros buscadores, a palavra "AND" não é necessária; essa fica subentendida porque todos os termos são incluídos.) Segundo, para encontrar páginas de universidades em São Paulo ou Paraná, devemos procurar por páginas que trabalhem com (SÃO *AND* PAULO *OR* PARANÁ) *AND* UNIVERSIDADES. (*Nota*: Aqui o operador *AND* tem prioridade maior que o operador *OR*. Além disso, no Google, os termos usados devem ser SÃO PAULO *OR* PARANÁ.) O resultado dessa busca deve incluir todas as páginas com a palavra UNIVERSIDADES e/ou uma ou ambas as palavras SÃO e PAULO ou PARANÁ. Novamente, páginas com textos que incluem essas palavras, mas que não são de interesse, serão listadas. Finalmente, para encontrar páginas sobre universidades em São Paulo, não públicas, podemos primeiro fazer uma busca com SÃO *AND* PAULO *AND* UNIVERSIDADES, mas essa busca incluirá as páginas sobre as universidades também públicas; então, podemos buscar por (SÃO *AND* PAULO *AND* UNIVERSIDADES) *NOT* PÚBLICAS. O resultado listará as páginas que contêm as palavras SÃO e PAULO e UNIVERSIDADES e não contêm a palavra PÚBLICAS. (No Google e em muitos outros buscadores, a palavra "NOT" é substituída pelo sinal de subtração "–"; nesse caso, a busca seria SÃO PAULO UNIVERSIDADES – PÚBLICAS.) ◄

Exemplos Extras

Quebra-Cabeças Lógicos

Links

Enigmas que podem ser resolvidos por raciocínio lógico são chamados de **quebra-cabeças lógicos**. Resolver quebra-cabeças lógicos é um excelente meio de treinar as regras da lógica. Também os programas de computadores que devem trabalhar com raciocínio lógico freqüentemente usam conhecidos quebra-cabeças para demonstrar sua capacidade. Muitas pessoas apreciam resolver esses quebra-cabeças lógicos, os quais são publicados em livros e periódicos como atividade de recreação.

Vamos discutir dois quebra-cabeças lógicos. Começaremos com um originalmente proposto por Raymond Smullyan, um mestre desses jogos, que publicou muitos livros com quebra-cabeças desafiantes que envolvem raciocínio lógico.

EXEMPLO 18 Em [Sm78] Smullyan propôs muitos quebra-cabeças sobre uma ilha que contém dois tipos de habitantes: cavaleiros, que sempre falam a verdade, e bandidos, que sempre mentem. Você encontra duas pessoas A e B. Quem são A e B, se A diz "B é um cavaleiro" e B diz "Nós dois somos tipos opostos de habitantes"?

Exemplos Extras

Solução: Sejam p e q as proposições "A é um cavaleiro" e "B é um cavaleiro", respectivamente, então $\neg p$ e $\neg q$ são as afirmações que dizem ser A e B bandidos, respectivamente.

Primeiro, vamos considerar a possibilidade de A ser cavaleiro; ou seja, a proposição p é verdadeira. Se isso ocorre, então ele está falando a verdade, o que implica que B é um cavaleiro. Sendo assim, o que B fala é verdade também; no entanto, ele diz que os dois são de tipos diferentes e estamos concluindo que ambos são cavaleiros, o que é absurdo. Então, devemos pensar que A é um bandido, logo está falando mentira, e portanto B também é bandido. Este fato é plausível, pois se ele está mentindo também, então ambos devem ser habitantes do mesmo tipo, o que é verdade. Podemos, então, concluir que ambos são bandidos. ◀

Proporemos mais desses quebra-cabeças de Smullyan sobre cavaleiros e bandidos nos exercícios 55 a 59 do fim desta seção. Agora, proporemos o conhecido como **o quebra-cabeça das crianças enlameadas**, que fala de duas crianças.

EXEMPLO 19 Um pai diz aos filhos, um menino e uma menina, para brincarem no quintal sem se sujarem. No entanto, enquanto brincavam, os dois sujaram a testa de lama. Quando pararam de brincar, o pai disse: "Ao menos um de vocês está com lama na testa", e depois pediu que cada criança respondesse sim ou não à pergunta: "Você sabe se você tem lama na testa?". O pai faz essa pergunta duas vezes. O que as crianças vão responder cada vez que a pergunta for feita, assumindo que cada criança pode ver a testa da outra, mas não pode ver sua própria testa? Assuma que cada criança é honesta e que as crianças respondem à pergunta simultaneamente.

Solução: Seja s a proposição que diz que o filho tem a testa suja e d a proposição que diz que a filha tem a testa suja. Quando o pai diz que ao menos uma das duas crianças tem a testa suja, ele está afirmando que a disjunção $s \vee d$ é verdadeira. Ambas as crianças vão responder "não" na primeira vez que a pergunta for feita, pois elas estão vendo o rosto uma da outra e que está sujo; logo, acreditam que a outra está suja e não elas próprias. Ou seja, o filho diz que d é verdadeira e s é falsa. E a filha diz exatamente o contrário, d é falsa e s é verdadeira.

Depois da resposta negativa do menino, a menina conclui que sua testa está suja, já que o menino afirmou que d é verdadeira. Isso pode ser concluído, pois o pai afirmou e o menino não pode ver sua própria testa.

Links

RAYMOND SMULLYAN (NASCIDO EM 1919) Raymond Smullyan abandonou os estudos no colegial. Ele queria estudar aquilo que realmente lhe interessava e não o conteúdo padrão do colegial. Depois de passar de uma universidade para outra, ele conquistou um diploma de graduação em matemática pela Universidade de Chicago, em 1955. Ele pagou suas despesas universitárias trabalhando com mágica em festas e clubes. Ele obteve seu Ph.D. em lógica em 1959, em Princeton, orientado por Alonzo Church. Depois da graduação em Princeton, ele ensinou matemática e lógica nas Universidades de Dartmouth, de Princeton, de Yeshiva e na Universidade da Cidade de Nova York. Ele se juntou ao departamento de filosofia da Universidade de Indiana em 1981, onde é agora professor emérito.

Smullyan escreveu muitos livros sobre lógica recreacional e matemática, incluindo *Satan, Cantor, and Infinity; What Is the Name of This Book?; The Lady or the Tiger?; Alice in Puzzleland; To Mock a Mockingbird; Forever Undecided;* e *The Riddle of Scheherazade: Amazing Logic Puzzles, Ancient and Modern.* Por seus quebra-cabeças lógicos serem desafiantes e provocantes, ele é considerado um Lewis Carroll dos dias atuais. Smullyan também escreveu diversos livros sobre a lógica dedutiva aplicada ao xadrez, três coleções de ensaios filosóficos e aforismos e muitos livros avançados de lógica matemática e teoria dos conjuntos. Ele se interessa particularmente por auto-referência e tem trabalhado em alguns resultados de Gödel que mostram que é impossível escrever um programa de computador que solucione problemas matemáticos. Ele também se interessa por explicar as idéias da matemática lógica ao público em geral.

Smullyan é um músico talentoso e geralmente toca piano com sua esposa, que é uma pianista de concerto. Fazer telescópios é um de seus hobbies. Ele também se interessa por ótica e fotografia em estéreo. Seu lema: "Eu nunca tive um conflito entre o ensino e a pesquisa, assim como algumas pessoas, porque, quando estou ensinando, estou pesquisando".

TABELA 9 Tabela para os Operadores Binários *OR, AND* e *XOR*.

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

Note que a menina pode concluir que d é verdadeira, pois, se d fosse falsa, o menino deveria concluir s e responder "sim", ou seja, tinha lama na própria testa. Sendo assim, ela conclui que tem lama na própria testa e responde "sim" na segunda vez que a pergunta foi feita. Com um raciocínio análogo, o menino conclui que também tem lama na testa e também responde "sim" na segunda vez que a pergunta foi feita. ◄

Lógicas e Operações Bit

Valor-Verdade	*Bit*
V	1
F	0

Computadores representam informações usando bits. Um **bit** é um símbolo com dois valores possíveis, 0 (zero) e 1 (um). O significado da palavra bit vem de *binary digit* (dígito binário), porque zeros e uns são os únicos dígitos usados na numeração binária. O conhecido estatístico John Tukey introduziu este termo em 1946. Um bit pode ser usado para representar um valor-verdade, pois existem dois valores-verdade, *verdadeiro* e *falso*. Como é costumeiramente feito, vamos usar um bit 1 para representar o verdadeiro e um bit 0 para representar o falso. Ou seja, 1 representa V, 0 representa F. Uma variável é chamada de **variável booleana** se seu valor puder ser verdadeiro ou falso. Conseqüentemente, uma variável booleana pode ser representada por um bit.

Links

Uma computação chamada de **operação bit** (ou **operação binária**) corresponde aos conectivos lógicos, trocando verdadeiro por 1 e falso por 0 nas tabelas-verdade dos operadores $\wedge$, $\vee$ e $\oplus$; a Tabela 9 mostra as operações binárias obtidas. Também vamos usar a notação *AND, OR* e *XOR* para os operadores $\wedge$, $\vee$ e $\oplus$, como em algumas linguagens computacionais.

Informações são freqüentemente representadas usando seqüências binárias (bit strings), que são seqüências de zeros e uns. Quando isso é feito, operações nas seqüências binárias podem ser usadas para manipular essas informações.

DEFINIÇÃO 7 Uma *seqüência binária* é uma seqüência de zero ou mais bits. A *extensão* dessa seqüência é o número de dígitos (bits) que ela contém.

EXEMPLO 20 101010011 é uma seqüência binária de comprimento nove. ◄

Podemos estender operações bit para seqüências binárias. Definimos a **seqüência binária tipo *OU***, a **seqüência binária tipo *E*** e a **seqüência binária tipo *OU*-exclusivo** (**bitwise *OR*, bitwise *AND*** e **bitwise *XOR***) de duas seqüências binárias de mesmo comprimento como aquela que tem como seus bits os bits correspondentes ao *OU*, *E* e *OU*-exclusivo para os respectivos dígitos das duas seqüências originais. Usaremos os símbolos dos operadores $\vee$, $\wedge$ e $\oplus$ para representar as seqüências binárias tipo *OU*, tipo *E* e tipo *OU*-exclusivo, respectivamente. Vamos ilustrar essas operações com o Exemplo 21.

EXEMPLO 21 Encontre a seqüência binária tipo *OU*, a seqüência binária tipo *E* e a seqüência binária tipo *OU*-exclusivo das seqüências 01 1011 0110 e 11 0001 1101. (Aqui, e em todo o livro, as seqüências serão separadas em blocos de quatro bits para facilitar a leitura.)

Solução: As seqüências são:

01 1011 0110	
11 0001 1101	
11 1011 1111	*OU*
01 0001 0100	*E*
10 1010 1011	*OU*-exclusivo

◀

Exercícios

1. Quais dessas sentenças são proposições? Quais são os valores-verdade das que são proposições?

a) Curitiba é a capital do Paraná.

b) Joinville é a capital de Santa Catarina.

c) $2 + 3 = 5$. **d)** $5 + 7 = 10$.

e) $x + 2 = 11$. **f)** Responda esta questão.

2. Quais destas são proposições? Quais são os valores-verdade das que são proposições?

a) Não ultrapasse.

b) Que horas são?

c) Não há moscas pretas em Brasília.

d) $4 + x = 5$.

e) A lua é feita de queijo verde.

f) $2^n \geq 100$.

3. Qual é a negação de cada proposição a seguir?

a) Hoje é quinta-feira.

b) Não há poluição em São Paulo.

c) $2 + 1 = 3$.

d) O verão no Rio é quente e ensolarado.

4. Considere que p e q são proposições:

p: Eu comprei um bilhete de loteria esta semana.

q: Eu ganhei a bolada de um milhão de dólares na sexta-feira.

Expresse cada uma dessas proposições em uma sentença em português.

a) $\neg p$ **b)** $p \vee q$ **c)** $p \rightarrow q$

d) $p \wedge q$ **e)** $p \leftrightarrow q$ **f)** $\neg p \rightarrow \neg q$

g) $\neg p \wedge \neg q$ **h)** $\neg p \vee (p \wedge q)$

5. Considere que p e q são as proposições: "Nadar na praia em Nova Jersey é permitido." e "Foram descobertos tubarões perto da praia.", respectivamente. Expresse cada uma dessas proposições compostas como uma sentença em português.

a) $\neg q$ **b)** $p \wedge q$ **c)** $\neg p \vee q$

d) $p \rightarrow \neg q$ **e)** $\neg q \rightarrow p$ **f)** $\neg p \rightarrow \neg q$

g) $p \leftrightarrow \neg q$ **h)** $\neg p \wedge (p \vee \neg q)$

Links

JOHN WILDER TUKEY (1915–2000) Tukey, nascido em New Bedford, Massachusetts, era filho único. Seus pais, ambos professores, decidiram que a educação em casa seria a melhor opção para o desenvolvimento de seu potencial. Sua educação formal iniciou-se na Universidade de Brown, onde estudou matemática e química. Tukey recebeu o mestrado em química da Brown e continuou seus estudos em Princeton. Com o início da Segunda Guerra Mundial, ele se juntou ao Fire Control Research Office, onde começou a trabalhar com estatística. Tukey, em suas pesquisas com estatísticas, impressionou muitos estatísticos com suas habilidades. Em 1945, com o fim da guerra, Tukey retornou ao departamento de matemática de Princeton como professor de estatística e também associou-se ao laboratório AT&T. Tukey fundou o Departamento de Estatística da Princeton em 1966 e foi seu primeiro catedrático. Fez contribuições significativas em muitas áreas da estatística, incluindo análise de variantes, estimativa do espectro das séries de tempo, inferências sobre valor de um grupo de parâmetros de um experimento e filosofia da estatística. Entretanto, ele é muito conhecido por sua invenção, em parceria com J. W. Cooley, da transformação rápida de Fourier. Além de suas contribuições em estatística, Tukey é visto como um habilidoso conhecedor de Wordsmith; tem o crédito de cunhar os termos *bit* e *software*.

Tukey contribuiu com sua visão e conhecimento servindo o Comitê Consultivo de Ciência do Presidente. Ele liderou diversos comitês importantes, lidando com meio ambiente, educação, química e saúde. Ele também serviu nos comitês de desarmamento nuclear. Tukey recebeu muitos prêmios, incluindo a Medalha Nacional de Ciência.

NOTA HISTÓRICA Há muitas outras denominações para dígito binário, como *binit* e *bigit*, mas nunca foram mundialmente aceitas. A adoção da palavra bit é ligada a sua semelhança com a palavra em inglês. Para uma descrição da cunhagem da palavra *bit* por Tukey, veja a revista *Anais da História da Computação*, de abril de 1984.

6. Considere que p e q são proposições: "A eleição está decidida" e "Os votos foram contados", respectivamente. Expresse cada uma destas proposições compostas como uma sentença em português.

a) $\neg p$ **b)** $p \vee q$
c) $\neg p \wedge q$ **d)** $q \rightarrow p$
e) $\neg q \rightarrow \neg p$ **f)** $\neg p \rightarrow \neg q$
g) $p \leftrightarrow q$ **h)** $\neg q \vee (\neg p \wedge q)$

7. Considere que p e q são proposições:

p: Está abaixo de zero.
q: Está nevando.

Escreva estas proposições usando p, q e conectivos lógicos.

a) Está abaixo de zero e nevando.
b) Está abaixo de zero, mas não está nevando.
c) Não está abaixo de zero e não está nevando.
d) Está ou nevando ou abaixo de zero (ou os dois).
e) Se está abaixo de zero, está também nevando.
f) Está ou nevando ou abaixo de zero, mas não está nevando se estiver abaixo de zero.
g) Para que esteja abaixo de zero é necessário, e suficiente, que esteja nevando.

8. Considere que p, q e r são as proposições:

p : Você está com gripe.
q : Você perde a prova final.
r : Você foi aprovado no curso.

Expresse cada uma destas proposições compostas como uma sentença em português.

a) $p \rightarrow q$ **b)** $\neg q \leftrightarrow r$
c) $q \rightarrow \neg r$ **d)** $p \vee q \vee r$
e) $(p \rightarrow \neg r) \vee (q \rightarrow \neg r)$
f) $(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$

9. Considere que p e q são proposições:

p : Você dirige a mais de 104 km/h.
q : Você recebe uma multa por excesso de velocidade.

Escreva estas proposições usando p, q e conectivos lógicos.

a) Você não dirige a mais de 104 km/h.
b) Você dirige a mais de 104 km/h, mas não recebe uma multa por excesso de velocidade.
c) Você receberá uma multa por excesso de velocidade, se você dirigir a mais de 104 km/h.
d) Se você não dirigir a mais de 104 km/h, você não receberá uma multa por excesso de velocidade.
e) Dirigir a mais de 104 km/h é suficiente para receber uma multa por excesso de velocidade.
f) Você recebe uma multa por excesso de velocidade, mas você não dirige a mais de 104 km/h.
g) Sempre que receber uma multa por excesso de velocidade, você estará dirigindo a mais de 104 km/h.

10. Considere que p, q e r são proposições:

p : Você tira um A no exame final.
q : Você faz todos os exercícios deste livro.
r : Você tira um A nesta matéria.

Escreva estas proposições usando p, q, r e conectivos lógicos.

a) Você tira um A nesta matéria, mas não faz todos os exercícios deste livro.
b) Você tira um A no exame final, faz todos os exercícios deste livro e tira um A nesta matéria.
c) Tirar um A nesta matéria é necessário para tirar um A no exame final.
d) Você tira um A no exame final, mas não faz todos os exercícios deste livro; no entanto, tira um A nesta matéria.
e) Tirar um A no exame final e fazer todos os exercícios deste livro é suficiente para tirar A nesta matéria.
f) Você vai tirar um A nesta matéria se e somente se você fizer todos os exercícios deste livro ou você tirar um A no exame final.

11. Considere que p, q e r são proposições:

p : Ursos-cinzentos são vistos na área.
q : Fazer caminhada na trilha é seguro.
r : As bagas estão maduras ao longo da trilha.

Escreva estas proposições usando p, q, r e conectivos lógicos.

a) As bagas estão maduras ao longo da trilha, mas os ursos-cinzentos não são vistos na área.
b) Ursos-cinzentos não são vistos na área e fazer caminhada na trilha é seguro, mas as bagas estão maduras ao longo da trilha.
c) Se as bagas estão maduras ao longo da trilha, fazer caminhada é seguro se e somente se os ursos-cinzentos não forem vistos na área.
d) Não é seguro fazer caminhada na trilha, mas os ursos-cinzentos não são vistos na área e as bagas ao longo da trilha estão maduras.
e) Para a caminhada ser segura, é necessário, mas não suficiente, que as bagas não estejam maduras ao longo da trilha e que os ursos-cinzentos não sejam vistos na área.
f) Caminhada não é segura ao longo da trilha sempre que os ursos-cinzentos são vistos na área e as bagas estão maduras ao longo da trilha.

12. Determine se estes bicondicionais são verdadeiros ou falsos.

a) $2 + 2 = 4$ se e somente se $1 + 1 = 2$.
b) $1 + 1 = 2$ se e somente se $2 + 3 = 4$.
c) $1 + 1 = 3$ se e somente se macacos puderem voar.
d) $0 > 1$ se e somente se $2 > 1$.

13. Determine se cada uma destas proposições condicionais é verdadeira ou falsa.

a) Se $1 + 1 = 2$, então $2 + 2 = 5$.
b) Se $1 + 1 = 3$, então $2 + 2 = 4$.
c) Se $1 + 1 = 3$, então $2 + 2 = 5$.
d) Se macacos puderem voar, então $1 + 1 = 3$.

14. Determine se cada uma destas proposições condicionais é verdadeira ou falsa.

a) Se $1 + 1 = 3$, então unicórnios existem.
b) Se $1 + 1 = 3$, então cachorros podem voar.
c) Se $1 + 1 = 2$, então cachorros podem voar.
d) Se $2 + 2 = 4$, então $1 + 2 = 3$.

15. Para cada uma destas sentenças, determine se o ou é inclusivo ou exclusivo. Explique sua resposta.
   a) Café ou chá vem com o jantar.
   b) Uma senha deve ter ao menos três dígitos ou oito caracteres de comprimento.
   c) O pré-requisito para o curso é um curso em teoria dos números ou um curso em criptografia.
   d) Você pode jogar usando dólares americanos ou euros.

16. Para cada uma destas sentenças, determine se o ou é inclusivo ou exclusivo. Explique sua resposta.
   a) Experiência em C++ ou Java é necessária.
   b) O almoço inclui sopa ou salada.
   c) Para entrar no país, é necessário um passaporte ou um cartão de registro eleitoral.
   d) Publique ou sucumba.

17. Para cada sentença, identifique o que significa a sentença, se o ou é inclusivo (ou seja, uma disjunção) ou exclusivo. Quais dos significados do ou você pensa ser intencional?
   a) Para cursar matemática discreta, você deve ter tido cálculo ou um curso de ciência da computação.
   b) Quando você compra um novo carro da Companhia Acme Motor, você pega de volta \$ 2.000 ou um empréstimo de 2%.
   c) Jantar para dois inclui dois itens da coluna A ou três itens da coluna B.
   d) A escola fecha se cair mais de dois pés de neve ou se a sensação térmica estiver abaixo de –100.

18. Escreva cada uma destas proposições na forma "se p, então q" em português. (*Dica*: Recorra à lista de maneiras comuns de expressar proposições condicionais inserida nesta seção.)
   a) É necessário lavar o carro do chefe para ser promovido.
   b) Ventos do sul implicam um degelo primaveril.
   c) Uma condição suficiente para a garantia ser válida é que você tenha comprado o computador em menos de um ano.
   d) Leo é pego sempre que ele trapaceia.
   e) Você pode acessar o site apenas se você pagar uma taxa de assinatura.
   f) Escolha as companhias certas, conhecendo as pessoas certas.
   g) Carol fica enjoada sempre que está em um barco.

19. Escreva cada uma destas proposições na forma "se p, então q" em português. (*Dica*: Recorra à lista de maneiras comuns de expressar proposições condicionais inserida nesta seção.)
   a) Neva sempre que o vento sopra do nordeste.
   b) As macieiras florescerão se continuar quente por uma semana.
   c) O Palmeiras ganhar o campeonato implica derrotar o São Paulo.
   d) É necessário andar 8 milhas para chegar ao topo do "Pico Long".
   e) Para conseguir mandato como professor, é suficiente ser famoso mundialmente.
   f) Se você dirigir por mais de 400 milhas, terá de comprar gasolina.
   g) Sua garantia é válida apenas se você comprou seu aparelho de som em menos de 90 dias.
   h) Jan nadará a menos que a água esteja muito fria.

20. Escreva cada uma destas proposições na forma "se p, então q" em português. (*Dica*: Recorra à lista de maneiras comuns de expressar proposições condicionais inserida nesta seção.)
   a) Eu lembrarei de enviar para você o endereço apenas se você me mandar um e-mail.
   b) Para ser um cidadão americano, é suficiente que você tenha nascido nos Estados Unidos.
   c) Se você mantiver seu livro teórico, ele será uma referência útil em seus cursos futuros.
   d) O São Paulo vencerá o Campeonato Brasileiro se seu goleiro jogar bem.
   e) Conseguir o emprego implica você ter as melhores credenciais.
   f) Haverá erosão na praia sempre que houver uma tempestade.
   g) Para ter uma senha válida, é necessário que inicie uma conexão no servidor.
   h) Você alcançará o cume a menos que você comece a escalada muito tarde.

21. Escreva cada uma destas proposições na forma "p se e somente se q" em português.
   a) Se está calor lá fora, você compra um sorvete e se você compra um sorvete é porque está calor lá fora.
   b) Para que você ganhe na loteria, é necessário e suficiente que você tenha o único bilhete premiado.
   c) Você será promovido apenas se você tiver contatos, e você só terá contatos se for promovido.
   d) Se você assistir à televisão sua mente se deteriorará, e vice-versa.
   e) Os trens atrasam exatamente nos dias em que eu os pego.

22. Escreva cada uma destas proposições na forma "p se e somente se q" em português.
   a) Para que você obtenha um A neste curso, é necessário e suficiente que você aprenda como resolver problemas de matemática discreta.
   b) Se você ler jornal todos os dias, você estará informado, e vice-versa.
   c) Chove se é final de semana, e é final de semana quando chove.
   d) Você poderá ver o feiticeiro apenas se ele não estiver escondido, e o feiticeiro não estará escondido apenas se você puder vê-lo.

23. Determine a oposta, a contrapositiva e a inversa de cada uma das proposições condicionais.
   a) Se nevar hoje, esquiarei amanhã.
   b) Eu venho à aula sempre que há uma prova.
   c) Um inteiro positivo é um primo apenas se não tem divisores além de 1 e dele mesmo.

24. Determine a oposta, a contrapositiva e a inversa de cada uma das proposições condicionais.
   a) Se nevar esta noite, então ficarei em casa.
   b) Eu vou à praia sempre que faz um dia ensolarado de verão.
   c) Quando me deito tarde, é necessário que eu durma até o meio-dia.

25. Quantas linhas aparecem em uma tabela-verdade para cada uma destas proposições compostas?
   a) $p \rightarrow \neg p$

b) $(p \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg s)$
c) $q \vee p \vee \neg s \vee \neg r \vee \neg t \vee u$
d) $(p \wedge r \wedge t) \leftrightarrow (q \wedge t)$

26. Quantas linhas aparecem em uma tabela-verdade para cada uma destas proposições compostas?
a) $(q \to \neg p) \vee (\neg p \to \neg q)$
b) $(p \vee \neg t) \wedge (p \vee \neg s)$
c) $(p \to r) \vee (\neg s \to \neg t) \vee (\neg u \to v)$
d) $(p \wedge r \wedge s) \vee (q \wedge t) \vee (r \wedge \neg t)$

27. Construa uma tabela-verdade para cada uma destas proposições compostas.
a) $p \wedge \neg p$ **b)** $p \vee \neg p$
c) $(p \vee \neg q) \to q$ **d)** $(p \vee q) \to (p \wedge q)$
e) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
f) $(p \to q) \to (q \to p)$

28. Construa uma tabela-verdade para cada uma destas proposições compostas.
a) $p \to \neg p$ **b)** $p \leftrightarrow \neg p$
c) $p \oplus (p \vee q)$ **d)** $(p \wedge q) \to (p \vee q)$
e) $(q \to \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
f) $(p \leftrightarrow q) \oplus (p \leftrightarrow \neg q)$

29. Construa uma tabela-verdade para cada uma destas proposições compostas.
a) $(p \vee q) \to (p \oplus q)$ **b)** $(p \oplus q) \to (p \wedge q)$
c) $(p \vee q) \oplus (p \wedge q)$ **d)** $(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \leftrightarrow q)$
e) $(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \leftrightarrow \neg r)$
f) $(p \oplus q) \to (p \oplus \neg q)$

30. Construa uma tabela-verdade para cada uma destas proposições compostas.
a) $p \oplus p$ **b)** $p \oplus \neg p$
c) $p \oplus \neg q$ **d)** $\neg p \oplus \neg q$
e) $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$ **f)** $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg q)$

31. Construa uma tabela-verdade para cada uma destas proposições compostas.
a) $p \to \neg q$ **b)** $\neg p \leftrightarrow q$
c) $(p \to q) \vee (\neg p \to q)$ **d)** $(p \to q) \wedge (\neg p \to q)$
e) $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg p \leftrightarrow q)$
f) $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

32. Construa uma tabela-verdade para cada uma destas proposições compostas.
a) $(p \vee q) \vee r$ **b)** $(p \vee q) \wedge r$
c) $(p \wedge q) \vee r$ **d)** $(p \wedge q) \wedge r$
e) $(p \vee q) \wedge \neg r$ **f)** $(p \wedge q) \vee \neg r$

33. Construa uma tabela-verdade para cada uma destas proposições compostas.
a) $p \to (\neg q \vee r)$
b) $\neg p \to (q \to r)$
c) $(p \to q) \vee (\neg p \to r)$
d) $(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$
e) $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \leftrightarrow r)$
f) $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

34. Construa uma tabela-verdade para $((p \to q) \to r) \to s$.

35. Construa uma tabela-verdade para $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)$.

36. Qual o valor de x depois que cada uma destas proposições se depararem com um programa de computador, se $x = 1$ antes de a proposição ser alcançada?
a) **if** $1 + 2 = 3$ **then** $x := x + 1$
b) **if** $(1 + 1 = 3)$ *OR* $(2 + 2 = 3)$ **then** $x := x + 1$
c) **if** $(2 + 3 = 5)$ *AND* $(3 + 4 = 7)$ **then** $x := x + 1$
d) **if** $(1 + 1 = 2)$ *XOR* $(1 + 2 = 3)$ **then** $x := x + 1$
e) **if** $x < 2$ **then** $x := x + 1$

37. Encontre a disjunção binária *OR*, a conjunção binária *AND* e a disjunção binária exclusiva *XOR* de cada um destes pares de seqüências de bit.
a) 101 1110, 010 0001
b) 1111 0000, 1010 1010
c) 00 0111 0001, 10 0100 1000
d) 11 1111 1111, 00 0000 0000

38. Dê os valores de cada uma destas expressões.
a) $1\,1000 \wedge (0\,1011 \vee 1\,1011)$
b) $(0\,1111 \wedge 1\,0101) \vee 0\,1000$
c) $(0\,1010 \oplus 1\,1011) \oplus 0\,1000$
d) $(1\,1011 \vee 0\,1010) \wedge (1\,0001 \vee 1\,1011)$

Lógicas Fuzzy são utilizadas em inteligência artificial. Na lógica fuzzy, a proposição tem um valor-verdade que é um número entre 0 e 1, inclusive. Uma proposição com valor-verdade 0 é falsa e uma com valor-verdade 1 é verdadeira. Valores entre 0 e 1 indicam variantes de grau de verdade. Por exemplo, o valor-verdade 0,8 pode ser indicado para uma proposição "Fred é feliz", porque ele é feliz na maior parte do tempo; e o valor-verdade 0,4 pode ser indicado para a proposição "John é feliz", porque ele é feliz menos que a metade do tempo.

39. O valor-verdade da negação de uma proposição em lógica fuzzy é 1 menos o valor-verdade da proposição. Quais são os valores-verdade das proposições "Fred não é feliz" e "John não é feliz"?

40. O valor-verdade da conjunção de duas proposições em lógica fuzzy é o mínimo dos valores-verdade de duas proposições. Quais são os valores verdade das proposições "Fred e John são felizes" e "Nem Fred nem John são felizes"?

41. O valor-verdade da disjunção de duas proposições em lógica fuzzy é o máximo dos valores-verdade de duas proposições. Quais são os valores-verdade das proposições "Fred é feliz ou John é feliz" e "Fred não é feliz ou John não é feliz"?

***42.** A asserção "Esta declaração é falsa" é uma proposição?

***43.** A e*n*ésima proposição em uma lista de 100 proposições é "Exatamente *n* dessas proposições nesta lista são falsas".
a) Quais as conclusões que você pode obter dessas proposições?
b) Responda ao item (a) se a e*n*ésima proposição for "No mínimo *n* dessas proposições nesta lista são falsas".
c) Responda ao item (b), assumindo que a lista contém 99 proposições.

44. Uma antiga lenda siciliana diz que o barbeiro em uma cidade longínqua, que pode ser alcançada apenas se for percorrida uma perigosa estrada na montanha, barbeia aquelas pessoas e apenas aquelas que não podem se barbear sozinhas. Pode haver lá esse barbeiro?

45. Cada habitante de uma vila longínqua sempre diz a verdade ou sempre mente. Um habitante dela dará apenas como resposta um "Sim" ou um "Não" para a pergunta que um turista fizer. Suponha que você seja um turista que visita essa área e que chegue a uma bifurcação na estrada. Um lado leva até as ruínas que você quer visitar; o outro, às profundezas de uma floresta. Um habitante dessa vila está parado nessa bifurcação. Que pergunta você pode fazer ao habitante para determinar qual lado pegar?

46. Um explorador foi capturado por um grupo de canibais. Há dois tipos de canibais: aqueles que sempre dizem a verdade e aqueles que sempre mentem. Os canibais farão um churrasco com o explorador a menos que ele possa determinar se um canibal em particular sempre mente ou sempre diz a verdade. O canibal permite que ele faça apenas uma pergunta.

a) Explique por que a pergunta "Você é um mentiroso" não é válida.

b) Descubra a pergunta que o explorador pode fazer para determinar se o canibal sempre mente ou sempre diz a verdade.

47. Expresse estas especificações de sistema usando as proposições p "A mensagem é verificada contra vírus" e q "A mensagem é enviada de um sistema desconhecido", juntamente com conectivos lógicos.

a) "A mensagem é verificada contra vírus sempre que a mensagem é enviada de um sistema desconhecido."

b) "A mensagem foi enviada de um sistema desconhecido, mas não foi verificada contra vírus."

c) "É necessário verificar a mensagem contra vírus sempre que ela for enviada de um sistema desconhecido."

d) "Quando a mensagem não é enviada de um sistema desconhecido, não é verificada contra vírus."

48. Expresse este sistema de especificações usando as proposições p "O usuário entra com uma senha válida", q "O acesso é liberado" e r "O usuário pagou a taxa de assinatura", juntamente com conectivos lógicos.

a) "O usuário pagou a taxa de assinatura, mas não entra com uma senha válida."

b) "O acesso é liberado sempre que o usuário pagar a taxa de assinatura e entrar com uma senha válida."

c) "O acesso é negado se o usuário não pagou a taxa de assinatura."

d) "Se o usuário não entrar com uma senha válida, mas pagar a taxa de assinatura, então o acesso é liberado."

49. Este sistema de especificações é consistente? "O sistema está em um estado de multiuso se e somente se estiver operando normalmente. Se o sistema está operando normalmente, o kernel está funcionando. O kernel não está funcionando ou o sistema está no modo de interrupção. Se o sistema não está em um estado de multiuso, então está em um modo de interrupção. O sistema não está no modo de interrupção."

50. Este sistema de especificações é consistente? "Sempre que o software do sistema está sendo atualizado, os usuários não podem acessar os arquivos do sistema. Se os usuários podem acessar os arquivos do sistema, então eles podem salvar novos arquivos. Se os usuários não podem salvar novos arquivos, então o software do sistema não está sendo atualizado."

51. Este sistema de especificações é consistente? "O roteador pode mandar pacotes para o sistema principal apenas se ele suportar um novo espaço de endereço. Para o roteador suportar o novo espaço de endereço, é necessário que a última liberação do software seja instalada. O roteador pode mandar pacotes ao sistema principal se a última liberação do software estiver instalada. O roteador não comporta o novo espaço."

52. Este sistema de especificações é consistente? "Se o sistema de arquivos não está bloqueado, então novas mensagens entraram em fila. Se o sistema de arquivos não está bloqueado, então o sistema está funcionando normalmente, e vice-versa. Se novas mensagens não estão entrando em fila, então serão enviadas para uma central de armazenamento de mensagens. Se o sistema de arquivos não está bloqueado, então as novas mensagens serão enviadas para a central de armazenamento. Novas mensagens não serão enviadas para a central de armazenamento."

53. Qual busca booleana você utilizaria para procurar sites sobre praias em Nova Jersey? Qual você utilizaria se quisesse encontrar sites sobre praias na ilha de Jersey (no Canal da Mancha)?

54. Qual busca booleana você utilizaria para procurar sites sobre caminhadas no oeste da Virgínia, nos Estados Unidos? Qual busca booleana você utilizaria para procurar sites sobre caminhadas na Virgínia, mas não no oeste da Virgínia?

Os exercícios 55 a 59 são relativos aos habitantes da ilha de cavaleiros e bandidos, criada por Smullyan, onde os cavaleiros sempre dizem a verdade e os bandidos sempre mentem. Você encontra duas pessoas, A e B. Determine, se possível, quem são A e B se eles conduzirem você nos caminhos descritos. Se não puder determinar quem são essas duas pessoas, você pode tirar alguma conclusão?

55. A diz: "Ao menos um de nós é um bandido" e B não diz nada.

56. A diz: "Nós dois somos cavaleiros" e B diz "A é um bandido".

57. A diz: "Eu sou um bandido ou B é um cavaleiro" e B não diz nada.

58. Ambos, A e B, dizem: "Eu sou um cavaleiro".

59. A diz: "Nós dois somos bandidos" e B não diz nada.

Os exercícios 60 a 65 são quebra-cabeças que podem ser resolvidos traduzindo as proposições em expressões lógicas e argumentos a partir destas expressões usando a tabela-verdade.

60. A polícia tem três suspeitos para o assassinado do sr. Cooper: sr. Smith, sr. Jones e sr. Williams. Smith, Jones e Williams declaram que não mataram Cooper. Smith também declara que Cooper era amigo de Jones e que Williams não gostava da vítima. Jones declara também que não conhecia Cooper e que estava fora da cidade no dia em que Cooper foi morto. Williams declara também que ele viu Smith e Jones com Cooper no dia em que ele foi morto e que ou Jones ou Smith o mataram. Você pode determinar quem foi o assassino se

a) um dos três é culpado e os dois inocentes estão falando a verdade, mas as declarações do homem culpado podem ser ou não falsas?

b) os homens inocentes não mentem?

61. Steve quer determinar os salários relativos de três colegas de trabalho usando dois fatos. Primeiro, ele sabe que se Fred não tem o maior salário dos três, então Janice tem. Segundo, ele sabe que se Janice não tem o salário mais baixo, então Maggie é a mais bem paga. É possível determinar os salários relativos de Fred, Maggie e Janice a partir do que Steve sabe? Se sim, quem tem o salário maior e quem tem o menor? Exponha seus argumentos.

62. Cinco amigos acessaram uma sala de bate-papo. É possível determinar quem está conversando se as seguintes informações são conhecidas? Kevin ou Heather, ou ambos, estão conversando. Randy ou Vijay, mas não ambos, estão conversando. Se Abby está conversando, então Randy também está. Vijay e Kevin estão ambos conversando, ou nenhum dos dois está. Se Heather está conversando, então estão também Abby e Kevin. Exponha seus argumentos.

63. Um detetive entrevistou quatro testemunhas de um crime. A partir das histórias das testemunhas, o detetive concluiu que, se o mordomo está dizendo a verdade, então o cozinheiro também está; o cozinheiro e o jardineiro, ambos, não podem estar dizendo a verdade; o jardineiro e o zelador, ambos, não estão mentindo; e se o zelador está dizendo a verdade, então o cozinheiro está mentindo. Para cada uma das quatro testemunhas, o detetive pode determinar se a pessoa está mentindo ou dizendo a verdade? Exponha seus argumentos.

64. Quatro amigos foram identificados como suspeitos de um acesso não autorizado em um sistema computacional. Eles fizeram declarações às autoridades que investigavam o crime. Alice disse: "Carlos que acessou". John disse "Eu não acessei". Carlos disse "Diana acessou". Diana disse "Carlos mentiu ao dizer que eu acessei".

a) Se as autoridades também sabem que apenas um dos quatro suspeitos está dizendo a verdade, quem cometeu o crime? Exponha seus argumentos.

b) Se as autoridades também sabem que apenas um dos quatro está mentindo, quem cometeu o crime? Exponha seus argumentos.

***65.** Resolva este famoso quebra-cabeça, atribuído a Albert Einstein e conhecido como o "**Enigma da Zebra**". Cinco homens de nacionalidades diferentes, com empregos diferentes, vivem em casas consecutivas em uma rua. Essas casas estão pintadas com cores diferentes. Os homens têm animais de estimação diferentes e gostam de bebidas diferentes. Determine quem tem uma zebra e quem tem por bebida favorita água mineral, a partir destas pistas: O inglês vive na casa vermelha. O espanhol tem um cachorro. O japonês é pintor. O italiano bebe chá. O norueguês vive na primeira casa à esquerda. A casa verde é imediatamente do lado direito da casa branca. O fotógrafo cria caracóis. O diplomata vive na casa amarela. Bebe-se leite na casa do meio. O dono da casa verde bebe café. A casa do norueguês é ao lado da azul. O violonista bebe suco de laranja. A raposa está na casa ao lado da do físico. O cavalo está na casa ao lado da do diplomata. [*Dica*: Faça uma tabela em que as filas representem os homens e as colunas, a cor das casas, seus empregos, seus animais e suas bebidas favoritas e use a argumentação lógica para determinar as entradas corretas na tabela.]

1.2 Equivalências Proposicionais

Introdução

Um importante tipo de passo usado na argumentação matemática é a substituição de uma proposição por outra com o mesmo valor-verdade. Por esse motivo, métodos que produzem proposições com o mesmo valor-verdade que uma dada proposição composta são usados largamente na construção de argumentos matemáticos. Note que vamos usar o termo "proposições compostas" para nos referir a uma expressão formada a partir de variáveis proposicionais que utilizam operadores lógicos, tais como $p \wedge q$.

Começaremos nossa discussão com a classificação de proposições compostas de acordo com seus possíveis valores-verdade.

DEFINIÇÃO 1 Uma proposição composta que é sempre verdadeira, qualquer que sejam os valores-verdade das proposições que ocorrem nela, é chamada de *tautologia*. Uma proposição composta que é sempre falsa, qualquer que seja o valor-verdade das proposições que a compõem, é chamada de *contradição*. Uma proposição composta que não é nem tautologia nem contradição é chamada de *contingência*.

Tautologias e contradições são muito importantes no raciocínio matemático. O Exemplo 1 ilustra esses tipos de proposições compostas.

TABELA 1 Exemplos de uma Tautologia e de uma Contradição.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	V	F
F	V	V	F

TABELA 2 Leis de De Morgan.

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

EXEMPLO 1 Podemos construir exemplos de tautologias e contradições usando apenas uma variável proposicional. Considere a tabela-verdade de $p \vee \neg p$ e $p \wedge \neg p$, mostrada na Tabela 1. Como $p \vee \neg p$ é sempre verdadeira, é uma tautologia. Como $p \wedge \neg p$ é sempre falsa, é uma contradição. ◀

Equivalências Lógicas

Demo

Proposições compostas que têm o mesmo valor-verdade em todos os possíveis casos são chamadas de **logicamente equivalentes**. Podemos definir esta noção como se segue.

DEFINIÇÃO 2 As proposições compostas p e q são chamadas de *logicamente equivalentes* se $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia. A notação $p \equiv q$ indica que p e q são logicamente equivalentes.

Lembre-se: O símbolo $\equiv$ não é um conectivo lógico e $p \equiv q$ não é uma proposição composta, apenas quer dizer que $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia. O símbolo $\Leftrightarrow$ é usado freqüentemente no lugar de $\equiv$ para indicar equivalências lógicas.

Exemplos Extras

Uma maneira de determinar quando duas proposições compostas são equivalentes é usar a tabela-verdade. Em particular, as proposições compostas p e q são equivalentes se e somente se as colunas que fornecem seus valores-verdade são idênticas. O Exemplo 2 ilustra esse método para estabelecer uma importantíssima e muito usada equivalência lógica: $\neg(p \vee q)$ é o mesmo que $\neg p \wedge \neg q$. Essa equivalência lógica é uma das duas **leis de De Morgan**, mostrada na Tabela 2, demonstradas pelo matemático inglês Augustus De Morgan, na metade do século XIX.

EXEMPLO 2 Mostre que $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Solução: As tabelas-verdade dessas proposições compostas estão na Tabela 3. Como os valores-verdade $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ coincidem para todas as possibilidades de combinações de valores-verdade de p e q, segue-se que $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ é uma tautologia e, portanto, essas proposições compostas são logicamente equivalentes. ◀

TABELA 3 Tabelas-Verdade para $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

TABELA 4 **Tabela-Verdade para $\neg p \vee q$ e $p \rightarrow q$.**

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

EXEMPLO 3 Mostre que $p \rightarrow q$ e $\neg\, p \vee q$ são logicamente equivalentes.

Solução: Construímos a tabela-verdade dessas proposições compostas na Tabela 4. Como os valores-verdade de $\neg\, p \vee q$ e $p \rightarrow q$ são idênticos, eles são logicamente equivalentes. ◀

Vamos agora estabelecer uma equivalência lógica entre duas proposições compostas que envolvem três variáveis proposicionais diferentes p, q e r. Para usar a tabela-verdade estabelecendo essa equivalência lógica, precisamos de oito linhas, uma para cada combinação de valores-verdade dessas três variáveis. Simbolicamente, nós representamos essas combinações listando os valores de p, q e r, respectivamente. Essas oito combinações de valores-verdade são VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV e FFF; usaremos essa ordem quando montarmos as linhas da tabela-verdade. Note que precisamos do dobro de linhas de que precisávamos quando tínhamos duas variáveis proposicionais; essa relação continua sendo válida para cada nova variável proposicional que venha a ser adicionada, então precisaremos de 16 linhas para estabelecer a equivalência entre duas proposições compostas com quatro variáveis proposicionais, e assim sucessivamente. Em geral, 2^n linhas são necessárias quando temos n variáveis proposicionais.

EXEMPLO 4 Mostre que $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ são logicamente equivalentes. Essa é a *propriedade distributiva* da disjunção sobre a conjunção.

Solução: Construímos a tabela-verdade para essas duas proposições compostas na Tabela 5. Como os valores-verdade de $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ são iguais, essas proposições são logicamente equivalentes. ◀

TABELA 5 **Uma Demonstração de que $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ São Logicamente Equivalentes.**

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

TABELA 6 Equivalências Lógicas.

Equivalências	*Nome*
$p \wedge \mathbf{V} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Propriedades dos elementos neutros
$p \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Propriedades de dominação
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Propriedades idempotentes
$\neg(\neg p) \equiv p$	Propriedade da dupla negação
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Propriedades comutativas
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Propriedades associativas
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Propriedades distributivas
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Leis de De Morgan
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Propriedades de absorção
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{V}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	Propriedades de negação

A Tabela 6 contém algumas equivalências importantes.* Nessas equivalências, **V** indica uma proposição composta que é sempre verdadeira, uma tautologia, e **F** indica uma proposição que é sempre falsa, uma contradição. Nós também mostramos algumas equivalências importantes que envolvem condicionais e bicondicionais nas tabelas 7 e 8, respectivamente. Ao leitor será pedido que verifique a veracidade dessas equivalências nos exercícios no final desta seção.

A propriedade associativa para a disjunção mostra que a expressão $p \vee q \vee r$ é bem definida, no sentido de que tanto faz qual disjunção é considerada primeiro, ou seja, tanto faz se fazemos primeiro $p \vee q$ e posteriormente a disjunção deste com r, ou se fazemos primeiro a disjunção de q com r e depois com p. De maneira análoga, $p \wedge q \wedge r$ também está bem definida. Estendendo esse raciocínio, segue-se que $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$ e $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$ também são bem definidas sempre que $p_1, p_2, \ldots p_n$ são proposições. Além disso, note que as leis de De Morgan podem ser estendidas para

$$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_n)$$

e

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \equiv (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n).$$

(Métodos para demonstrar essas identidades serão analisados na Seção 4.1.)

* Leitores familiarizados com os conceitos de álgebra booleana vão notar que essas identidades são um caso especial de identidades que valem para qualquer álgebra booleana. Compare-as com o conjunto de identidades da Tabela 1 da Seção 2.2 e com as identidades booleanas da Tabela 5 na Seção 11.1.

TABELA 7 Equivalências Lógicas que Envolvem Sentenças Condicionais.
$p \to q \equiv \neg p \vee q$
$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \to q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$
$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$
$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$
$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$
$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

TABELA 8 Equivalências Lógicas que Envolvem Bicondicionais.
$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Usando as Leis de De Morgan

As duas equivalências lógicas conhecidas como leis de De Morgan são particularmente importantes. Elas nos mostram como negar conjunções e como negar disjunções. Em particular, a equivalência $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ nos diz que a negação de uma disjunção é formada tomando a conjunção das negações das proposições componentes. Similarmente, $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ nos diz que a negação de uma conjunção é formada tomando a disjunção das negações das proposições componentes. O Exemplo 5 ilustra o uso das leis de De Morgan.

EXEMPLO 5 Use as leis de De Morgan para expressar as negações de “Miguel tem um celular e um laptop” e “Rodrigo vai ao concerto ou Carlos vai ao concerto”.

Solução: Seja p “Miguel tem um celular” e q “Miguel tem um laptop”. Então, “Miguel tem um celular e um laptop” pode ser representado por $p \wedge q$. Contudo, pela primeira lei de De Morgan, $\neg(p \wedge q)$ é equivalente a $\neg p \vee \neg q$. Conseqüentemente, podemos expressar a negação de nossa proposição original por “Miguel não tem um celular ou não tem um laptop”.

Links

AUGUSTUS DE MORGAN (1806–1871) Augustus De Morgan nasceu na Índia, onde seu pai era coronel no exército indiano. A família De Morgan mudou-se para a Inglaterra quando ele tinha 7 meses de idade. Ele freqüentou escolas particulares, onde desenvolveu um grande interesse por matemática na sua juventude. De Morgan estudou na Universidade de Trinity, em Cambridge, graduando-se em 1827. Embora pensasse em entrar em medicina ou direito, De Morgan decidiu seguir carreira em matemática. Ele conquistou uma cadeira na Universidade de College, em Londres, em 1828, mas demitiu-se quando a faculdade despediu um colega sem apresentar as causas para a demissão. Entretanto, ele retomou essa cadeira em 1836, quando seu sucessor morreu, permanecendo até 1866.

De Morgan foi um professor notável que dava ênfase aos princípios mais que às técnicas. Entre seus estudantes estão muitos matemáticos famosos, incluindo Augusta Ada, Condessa de Lovelace, que era colaboradora de Charles Babbage em seu trabalho com máquinas computacionais (veja a página 27 nas notas biográficas de Augusta Ada). (De Morgan preveniu a condessa de que estudar matemática em excesso, poderia interferir em suas habilidades maternais!)

De Morgan foi um escritor extremamente prolífico. Escreveu milhares de artigos para mais de 15 periódicos. Também escreveu livros teóricos sobre muitos assuntos, incluindo lógica, probabilidade, cálculo e álgebra. Em 1838, ele apresentou o que talvez tenha sido a primeira explicação clara de uma importante técnica de demonstração, conhecida como *indução matemática* (discutida na Seção 4.1 deste livro), termo que ele cunhou. Na década de 1840, De Morgan fez contribuições fundamentais ao desenvolvimento da lógica simbólica. Ele criou notações que o ajudaram a provar equivalências proposicionais, assim como as leis que receberam seu nome. Em 1842, De Morgan apresentou o que talvez tenha sido a primeira definição precisa de limite e o desenvolvimento de alguns testes de convergência de séries infinitas. De Morgan interessou-se também pela história da matemática, escrevendo biografias de Newton e Halley.

Em 1837, De Morgan casou-se com Sophia Frend, que escreveu a biografia do marido em 1882. A pesquisa, a escrita e o ensino de De Morgan deixaram pouco tempo para ele se dedicar a sua família e vida social. No entanto, ele ficou conhecido pela sua bondade, bom humor e grande inteligência.

Seja r “Rodrigo vai ao concerto” e s “Carlos vai ao concerto”. Então, “Rodrigo vai ao concerto ou Carlos vai ao concerto” pode ser representado por $r \vee s$. E, pela segunda lei de De Morgan, temos que $\neg(r \vee s)$ é equivalente a $\neg r \wedge \neg s$. Logo, podemos expressar sua negação por “Rodrigo não vai ao concerto e Carlos não vai ao concerto”. ◀

Construindo Novas Equivalências Lógicas

As equivalências lógicas na Tabela 6, assim como qualquer outra que seja estabelecida (como as mostradas nas tabelas 7 e 8), podem ser usadas para construir equivalências lógicas adicionais. A razão para isso é que uma proposição composta pode ser substituída por outra proposição composta que é logicamente equivalente a essa sem mudar o valor-verdade da proposição original. Essa técnica é ilustrada nos exemplos 6–8, em que também usamos o fato de que se p e q são logicamente equivalentes e q e r são logicamente equivalentes, então p e r também são logicamente equivalentes (veja o Exercício 56).

EXEMPLO 6 Mostre que $\neg(p \rightarrow q)$ e $p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Exemplos Extras

Solução: Podemos usar uma tabela-verdade para mostrar que essas proposições compostas são equivalentes (como no Exemplo 4). Inclusive, não deve ser difícil fazer isso. No entanto, queremos ilustrar como usar identidades lógicas que já conhecemos para estabelecer novas identidades lógicas, isso porque esse método tem uma importância prática para estabelecer equivalências de proposições compostas com um grande número de variáveis. Então, vamos estabelecer essa equivalência desenvolvendo uma série de equivalências lógicas, usando uma das equivalências da Tabela 6 por vez, começando por $\neg(p \rightarrow q)$ e terminando com $p \wedge \neg q$. Temos, assim, as equivalências a seguir.

$$\begin{aligned}
\neg(p \rightarrow q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) && \text{pelo Exemplo 3} \\
&\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q && \text{pela segunda lei de De Morgan} \\
&\equiv p \wedge \neg q && \text{pela propriedade da dupla negação}
\end{aligned}$$

◀

EXEMPLO 7 Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes desenvolvendo uma série de equivalências lógicas.

Solução: Vamos usar uma das equivalências da Tabela 6 por vez, começando por $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e terminando com $\neg p \wedge \neg q$. (*Nota:* Poderíamos estabelecer essa equivalência facilmente usando tabelas-verdade.) Assim, temos as equivalências a seguir.

$$\begin{aligned}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{pela segunda lei de De Morgan} \\
&\equiv \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q] && \text{pela primeira lei de De Morgan} \\
&\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{pela propriedade da dupla negação} \\
&\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{pela segunda propriedade distributiva} \\
&\equiv \mathbf{F} \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{pois } \neg p \wedge p \equiv \mathbf{F} \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee \mathbf{F} && \text{pela propriedade comutativa para disjunções} \\
&\equiv \neg p \wedge \neg q && \text{pela propriedade dos elementos neutros para } \mathbf{F}
\end{aligned}$$

Em conseqüência, $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes. ◀

EXEMPLO 8 Mostre que $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ é uma tautologia.

Solução: Para mostrar que essa proposição é uma tautologia, vamos usar equivalências para demonstrar que é logicamente equivalente a **V**. (*Nota:* Isso poderia ser feito usando tabelas-verdade.)

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) && \text{pelo Exemplo 3} \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) && \text{pela primeira lei de De Morgan} \\
&\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) && \text{pelas propriedades associativas e comutativas para a disjunção} \\
&\equiv \mathbf{V} \vee \mathbf{V} && \text{pelo Exemplo 1 e pela propriedade comutativa para a disjunção} \\
&\equiv \mathbf{V} && \text{pela propriedade de dominação}
\end{aligned}$$

◀

Uma tabela-verdade pode ser usada para determinar se uma proposição composta é uma tautologia. Isso pode ser feito rapidamente se for uma proposição composta com poucas variáveis, mas, quando o número de variáveis cresce, isso pode ficar impraticável. Por exemplo, existem $2^{20} = 1.048.576$ linhas em uma tabela-verdade para uma proposição composta com 20 variáveis proposicionais. Claramente você precisará de um computador para ajudá-lo a determinar quando uma proposição composta é uma tautologia. Quando, no entanto, existem 1.000 variáveis proposicionais, um computador pode determinar em um tempo razoável se uma proposição é uma tautologia? Testando todas as $2^{1.000}$ (um número com mais de 300 algarismos decimais) possíveis combinações de valores-verdade, um computador não consegue terminar em menos de alguns trilhões de anos. Além disso, não existe um outro método conhecido que um computador possa seguir para determinar em um tempo razoável quando uma proposição com muitas variáveis proposicionais é uma tautologia. Vamos estudar questões como essas no Capítulo 3, quando estudaremos a complexidade de algoritmos.

Links

AUGUSTA ADA, CONDESSA DE LOVELACE (1815–1852) Augusta Ada foi a única filha do casamento do famoso poeta Lorde Byron e Lady Byron, Annabella Millbanke, que se separaram quando Ada tinha 1 mês de idade, por causa do escândalo amoroso de Lorde Byron com sua meia-irmã. Lorde Byron tinha uma reputação, descrita por uma de suas amantes como "louco, mal e perigoso". Lady Byron era notável por sua inteligência e tinha paixão por matemática; ela era chamada por Lorde Byron de "A Princesa dos Paralelogramos". Augusta foi criada por sua mãe, que encorajou seus talentos intelectuais, especialmente na música e na matemática, tendo em vista que considerava perigosas as tendências poéticas. Naquela época, não era permitido que as mulheres freqüentassem as universidades nem se juntassem a grupos de estudos. No entanto, Augusta adquiriu seus estudos matemáticos sozinha e com matemáticos, incluindo William Frend. Ela também tinha o apoio de outra matemática, Mary Somerville, e, em 1834, em um jantar na casa de Mary Somerville, ela foi apresentada às idéias de Charles Babbage sobre uma máquina de calcular, chamada "Engenho Analítico". Em 1838, Augusta Ada casou-se com Lorde King, elevado posteriormente a Conde de Lovelace. Juntos, eles tiveram três filhos.

Augusta Ada continuou seus estudos em matemática depois do casamento. Charles Babbage continuou trabalhando em seu "Engenho Analítico" e apresentando-o para a Europa. Em 1842, Babbage pediu a Augusta Ada que traduzisse um artigo para o francês, descrevendo sua invenção. Quando Babbage viu a tradução, sugeriu que ela começasse a escrever suas próprias anotações, e o resultado final foi três vezes o original. Os relatos mais completos sobre a máquina de Babbage estão nas anotações de Augusta Ada. Em suas anotações, ela comparou o trabalho do "Engenho Analítico" ao tear de Jacquard, com a analogia dos cartões perfurados de Babbage aos usados para criar estampas no tear. Além disso, ela reconheceu a promessa da máquina como uma proposta de computador muito melhor do que fez Babbage. Ela constatou que "o motor é a expressão material de qualquer função indefinida de qualquer grau de generalidade e complexidade". Suas anotações sobre o "Engenho Analítico" anteciparam futuros desenvolvimentos. Augusta Ada publicou seus escritos sob as iniciais. A.A.L. para ocultar sua identidade como mulher, assim como muitas mulheres fizeram naquele tempo em que não eram consideradas intelectuais como os homens. Depois de 1845, ela e Babbage trabalharam juntos no desenvolvimento de um sistema para determinar raças de cavalos. Infelizmente esse sistema não funcionou muito bem, deixando Augusta extremamente debilitada fisicamente, contraindo câncer de útero ainda muito jovem.

Em 1953, as anotações de Augusta Ada sobre o "Engenho Analítico" foram republicadas, 100 anos após a sua escrita e depois de muito tempo esquecidas. Em seu trabalho, na década de 1950, sobre a capacidade de os computadores pensarem (e seu famoso teste Turing), Alan Turing respondeu à declaração de Augusta Ada de que "o Engenho Analítico não tem a pretensão de dar origem a nada. Ele pode fazer o que conhecemos para organizar sua performance". Esse "diálogo" entre Turing e Augusta Ada é ainda assunto de controvérsias. Por causa de suas contribuições fundamentais à computação, a linguagem computacional "Augusta" recebeu esse nome em homenagem à Condessa de Lovelace.

Exercícios

1. Use a tabela-verdade para verificar estas equivalências.
a) $p \wedge \mathbf{V} \equiv p$ **b)** $p \vee \mathbf{F} \equiv p$
c) $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$ **d)** $p \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$
e) $p \vee p \equiv p$ **f)** $p \wedge p \equiv p$

2. Mostre que $\neg(\neg p)$ e p são logicamente equivalentes.

3. Use a tabela-verdade para verificar as propriedades comutativas.
a) $p \vee q \equiv q \vee p$ **b)** $p \wedge q \equiv q \wedge p$

4. Use a tabela-verdade para verificar as propriedades associativas.
a) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
b) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

5. Use a tabela-verdade para verificar a propriedade distributiva.
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

6. Use a tabela-verdade para verificar a primeira lei de De Morgan.
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$.

7. Use as leis de De Morgan para encontrar a negação de cada uma das proposições abaixo.
a) Jan é rica e feliz.
b) Carlos andará de bicicleta ou correrá amanhã.
c) Mei anda ou pega o ônibus para ir à escola.
d) Ibrahim é esperto e trabalha muito.

8. Use as leis de De Morgan para encontrar a negação de cada uma das proposições abaixo.
a) Kwame trabalhará na indústria ou irá para a faculdade.
b) Yoshiko conhece Java e cálculo.
c) James é jovem e forte.
d) Rita mudará para Oregon ou Washington.

9. Mostre que cada uma das proposições condicionais a seguir é uma tautologia, usando a tabela-verdade.
a) $(p \wedge q) \rightarrow p$ **b)** $p \rightarrow (p \vee q)$
c) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ **d)** $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
e) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$ **f)** $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$

10. Mostre que cada uma das proposições condicionais abaixo é uma tautologia, usando a tabela-verdade.
a) $[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$
b) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
c) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
d) $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$

11. Mostre que cada uma das proposições condicionais do Exercício 9 é uma tautologia, sem usar a tabela-verdade.

12. Mostre que cada uma das proposições condicionais do Exercício 10 é uma tautologia, sem usar a tabela-verdade.

13. Use a tabela-verdade para verificar as propriedades de absorção.
a) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ **b)** $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

14. Determine se $(\neg p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg\, q$ é uma tautologia.

15. Determine se $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg\, p$ é uma tautologia.

Os exercícios 16 a 28 pedem que você mostre que duas proposições compostas são logicamente equivalentes. Para fazer isso, ou mostre que os dois lados são verdadeiros, ou que os dois são falsos, para exatamente as mesmas combinações de valores-verdade das variáveis proposicionais nessas expressões (o que for mais fácil).

16. Mostre que $p \leftrightarrow q$ e $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ são equivalentes.

17. Mostre que $\neg(p \leftrightarrow q)$ e $p \leftrightarrow \neg q$ são logicamente equivalentes.

HENRY MAURICE SHEFFER (1883–1964) Henry Maurice Sheffer, filho de pais judeus, nasceu no oeste da Ucrânia e emigrou para os Estados Unidos em 1892 com seus pais e seis irmãos. Estudou na Escola Latina de Boston antes de entrar em Harvard, onde completou sua graduação em 1905, seu mestrado em 1907 e seu Ph.D. em filosofia em 1908. Depois de conquistar uma posição de pós-doutor em Harvard, Henry viajou para a Europa com bolsa de pesquisa. Ao retornar para os Estados Unidos, ele se tornou um acadêmico nômade, permanecendo um ano em cada universidade: Universidade de Washington, Cornell, Minessota, Missouri e Universidade da Cidade, em Nova York. Em 1916, ele retornou a Harvard como membro do corpo docente do departamento de filosofia. Permaneceu em Harvard até aposentar-se, em 1952.

Sheffer introduziu, em 1913, o que conhecemos hoje por "golpe de Sheffer" que se tornou famoso apenas depois que foi usado em 1925 na edição de *Principia Mathematica,* de Whitehead e Russell. Nessa mesma edição, Russell escreveu que Sheffer tinha inventado um poderoso método que poderia ser usado para simplificar a *Principia*. Por causa desse comentário, Sheffer era visto como um homem misterioso para os lógicos, especialmente porque ele, que teve poucas publicações ao longo de sua carreira, nunca publicou os detalhes desse método, que foi apenas descrito em notas de mimiógrafo e em uma breve publicação abstrata.

Sheffer foi um professor dedicado de lógica matemática. Ele gostava de ministrar aulas em turmas pequenas; não gostava de auditórios. Quando estranhos apareciam em suas aulas, Sheffer pedia-lhes que se retirassem, mesmo se fossem colegas ou convidados que iam visitar Harvard. Sheffer tinha apenas um metro e meio de altura; era notado por sua inteligência e vigor, assim como pelo seu nervosismo e irritabilidade. Embora muito inteligente, ele era muito sozinho. Ele é conhecido pela piada que fez ao aposentar-se: "Professores velhos nunca morrem, tornam-se eméritos". Sheffer também tem o crédito de cunhar a expressão "álgebra booleana" (assunto do Capítulo 11 deste livro). Ele foi casado por um curto espaço de tempo e viveu a maior parte de sua vida madura em um quarto de hotel, com seus livros de lógica e um vasto arquivo de papéis em que ele costumava anotar suas idéias. Infelizmente, Sheffer sofreu de depressão profunda durante as duas últimas décadas de sua vida.

18. Mostre que $p \to q$ e $\neg q \to \neg p$ são logicamente equivalentes.

19. Mostre que $\neg p \leftrightarrow q$ e $p \leftrightarrow \neg q$ são logicamente equivalentes.

20. Mostre que $\neg(p \oplus q)$ e $p \leftrightarrow q$ são logicamente equivalentes.

21. Mostre que $\neg(p \leftrightarrow q)$ e $\neg p \leftrightarrow q$ são logicamente equivalentes.

22. Mostre que $(p \to q) \wedge (p \to r)$ e $p \to (q \wedge r)$ são logicamente equivalentes.

23. Mostre que $(p \to r) \wedge (q \to r)$ e $(p \vee q) \to r$ são logicamente equivalentes.

24. Mostre que $(p \to q) \vee (p \to r)$ e $p \to (q \vee r)$ são logicamente equivalentes.

25. Mostre que $(p \to r) \vee (q \to r)$ e $(p \wedge q) \to r$ são logicamente equivalentes.

26. Mostre que $\neg p \to (q \to r)$ e $q \to (p \vee r)$ são logicamente equivalentes.

27. Mostre que $p \leftrightarrow q$ e $(p \to q) \wedge (q \to p)$ são logicamente equivalentes.

28. Mostre que $p \leftrightarrow q$ e $\neg p \leftrightarrow \neg q$ são logicamente equivalentes.

29. Mostre que $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ é uma tautologia.

30. Mostre que $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \to (q \vee r)$ é uma tautologia.

31. Mostre que $(p \to q) \to r$ e $p \to (q \to r)$ não são equivalentes.

32. Mostre que $(p \wedge q) \to r$ e $(p \to r) \wedge (q \to r)$ não são equivalentes.

33. Mostre que $(p \to q) \to (r \to s)$ e $(p \to r) \to (q \to s)$ não são logicamente equivalentes.

O **dual** de uma proposição composta que contém apenas operadores lógicos $\vee$, $\wedge$ e $\neg$ é a proposição composta obtida pela troca de cada $\vee$ por $\wedge$, cada $\wedge$ por $\vee$, cada **V** por **F** e cada **F** por **V**. O dual de s é representado por s^*.

34. Encontre o dual de cada uma destas proposições compostas.
   a) $p \vee \neg q$ **b)** $p \wedge (q \vee (r \wedge \mathbf{V}))$
   c) $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \mathbf{F})$

35. Encontre o dual de cada uma destas proposições compostas.
   a) $p \wedge \neg q \wedge \neg r$ **b)** $(p \wedge q \wedge r) \vee s$
   c) $(p \vee \mathbf{F}) \wedge (q \vee \mathbf{V})$

36. Quando $s^* = s$, em que s é uma proposição composta?

37. Mostre que $(s^*)^* = s$ quando s é uma proposição composta.

38. Mostre que as equivalências lógicas da Tabela 6, exceto pela propriedade da dupla negação, vêm em pares, em que cada par contém proposições compostas que são duais de si próprias.

****39.** Por que os duais de duas proposições compostas equivalentes são também equivalentes, em que essas proposições compostas contêm apenas os operadores $\wedge$, $\vee$ e $\neg$?

40. Encontre uma proposição composta que envolva as variáveis proposicionais p, q e r, que é verdadeira quando p e q são verdadeiras e r é falsa, mas o contrário é falso. [*Dica*: Use uma conjunção de cada variável proposicional ou sua negação.]

41. Encontre uma proposição composta que envolva as variáveis proposicionais p, q e r, que é verdadeira quando exatamente duas de p, q e r forem verdadeiras, mas o contrário é falso. [*Dica:* Forme uma disjunção de conjunções. Inclua uma conjunção para cada combinação de valores para os quais a variante proposicional for verdadeira. Cada conjunção deverá incluir cada uma dessas três variáveis ou suas negações.]

☞**42.** Suponha que a tabela-verdade em n variáveis proposicionais é dada. Mostre que pode ser formada uma proposição composta com essa tabela-verdade a partir de uma disjunção das conjunções das variáveis, ou suas negações, com uma conjunção formada por cada combinação de valores para os quais a proposição composta é verdadeira. A proposição composta resultante é chamada de **forma normal disjuntiva**.

Um conjunto de operadores lógicos é chamado de **funcionalmente completo** quando todas as proposições compostas são logicamente equivalentes a uma proposição composta que envolva apenas esses operadores lógicos.

43. Mostre que $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ formam um grupo de operadores lógicos funcionalmente completo. [*Dica:* Use o fato de que toda proposição composta é logicamente equivalente a outra em uma forma normal disjuntiva, como visto no Exercício 42.]

***44.** Mostre que $\neg$ e $\wedge$ formam um grupo de operadores lógicos funcionalmente completo. [*Dica:* Primeiro use a lei de De Morgan para mostrar que $p \vee q$ é equivalente a $\neg(\neg p \wedge \neg q)$.]

***45.** Mostre que $\neg$ e $\vee$ formam um grupo de operadores lógicos funcionalmente completo.

Os exercícios subseqüentes envolvem os operadores lógicos *NAND* e *NOR*. A proposição p *NAND* q é verdadeira quando ou p ou q, ou ambas, forem falsas; e é falsa quando p e q, ambas, forem verdadeiras. A proposição p *NOR* q é verdadeira quando ambas, p e q, forem falsas, e é falsa em qualquer outro caso. As proposições p *NAND* q e p *NOR* q são indicadas por $p \mid q$ e $p \downarrow q$, respectivamente. (Os operadores $\mid$ e $\downarrow$ são chamados de **conectivo de Sheffer** e **flecha de Peirce**, recebendo os nomes de H. M. Sheffer e C. S. Peirce, respectivamente.)

46. Construa a tabela-verdade para o operador lógico *NAND*.

47. Mostre que $p \mid q$ é logicamente equivalente a $\neg(p \wedge q)$.

48. Construa a tabela-verdade para o operador lógico *NOR*.

49. Mostre que $p \downarrow q$ é logicamente equivalente a $\neg(p \vee q)$.

50. Neste exercício, mostraremos que $\{\downarrow\}$ é um conjunto de operadores lógicos funcionalmente completo.
   a) Mostre que $p \downarrow p$ é logicamente equivalente a $\neg p$.
   b) Mostre que $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$ é logicamente equivalente a $p \vee q$.
   c) Conclua a partir dos itens (a) e (b) e do Exercício 49 que $\{\downarrow\}$ é um conjunto de operadores lógicos funcionalmente completo.

***51.** Encontre uma proposição composta logicamente equivalente a $p \to q$, usando apenas o operador lógico $\downarrow$.

52. Mostre que $\{\mid\}$ é um conjunto de operadores lógicos funcionalmente completo.

53. Mostre que $p \mid q$ e $q \mid p$ são equivalentes.

54. Mostre que $p \mid (q \mid r)$ e $(p \mid q) \mid r$ não são equivalentes; portanto, o operador lógico $\mid$ não é associativo.

***55.** Quantas formas diferentes de tabelas-verdade de proposições compostas existem que envolvam as variantes proposicionais p e q?

56. Mostre que se p, q e r são proposições compostas, em que p e q são logicamente equivalentes e q e r são também logicamente equivalentes, então p e r são logicamente equivalentes.

57. A sentença a seguir foi tirada das especificações de um sistema telefônico: "Se o diretório de dados for do banco aberto, então o monitor é posto em estado de fechamento, se o sistema não estiver em seu estado inicial". Essa especificação é difícil de ser compreendida porque envolve proposições com duas condicionais. Encontre um equivalente, uma especificação de fácil compreensão, que envolva disjunções e negações, mas não proposições condicionais.

58. Quantas das disjunções $p \vee \neg q$, $\neg p \vee q$, $q \vee r$, $q \vee \neg r$ e $\neg q \vee \neg r$ podem ser verdadeiras simultaneamente, a partir da construção de uma tabela-verdade com valores para p, q e r?

59. Quantas das disjunções $p \vee \neg q \vee s$, $\neg p \vee \neg r \vee s$, $\neg p \vee \neg r \vee \neg s$, $\neg p \vee q \vee \neg s$, $q \vee r \vee \neg s$, $q \vee \neg r \vee \neg s$, $\neg p \vee \neg q \vee \neg s$, $p \vee r \vee s$ e $p \vee r \vee \neg s$ podem ser verdadeiras simultaneamente, a partir da construção de uma tabela-verdade com valores para p, q, r e s?

Uma proposição composta é **satisfatória** se existe uma atribuição de valores-verdade para as variáveis na proposição que torna a declaração verdadeira.

60. Quais das proposições compostas abaixo são satisfatórias?

a) $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg s)$

b) $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s)$

c) $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee r \vee s) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s)$

61. Explique como um algoritmo para definir se uma proposição composta é satisfatória pode ser usado para determinar se uma proposição composta é uma tautologia. [*Dica:* Observe $\neg p$, em que p é a proposição composta que está sendo examinada.]

1.3 Predicados e Quantificadores

Introdução

A lógica proposicional, estudada nas seções 1.1 e 1.2, não pode expressar adequadamente o significado das proposições em matemática e em linguagem natural. Por exemplo, suponha que saibamos que

"Todo computador conectado à rede da universidade está funcionando apropriadamente."

Nenhuma regra da lógica proposicional nos permite decidir sobre a veracidade da afirmação

"MATH3 está funcionando apropriadamente,"

em que MATH3 é um dos computadores conectados à rede da universidade. Da mesma forma, não podemos usar as regras da lógica proposicional para concluir da proposição

"CS2 está sob ataque de um hacker."

em que CS2 é um computador na rede da universidade, para concluir que é verdade que

"Existe um computador na rede da universidade que está sob ataque de um hacker."

Nesta seção, vamos introduzir uma lógica mais poderosa chamada **lógica de predicados**. Veremos como a lógica de predicados pode ser usada para expressar o significado de um amplo grupo de proposições em matemática e em ciência da computação de modo que nos permita raciocinar e explorar relações entre objetos. Para entender a lógica de predicados, precisamos primeiramente introduzir o conceito de predicado. Posteriormente, vamos introduzir o conceito de quantificadores, que nos permite raciocinar com declarações sobre determinada propriedade que vale para todos os objetos de certo tipo e com declarações sobre a existência de um objeto com uma propriedade específica.

Predicados

Sentenças que envolvem variáveis, tais como

"$x > 3$", "$x = y + 3$", "$x + y = z$",

"computador x está sob ataque de um hacker"

e

"computador x está funcionando apropriadamente",

são freqüentemente encontradas na matemática, em programas de computador e em sistemas de especificações. Essas declarações não são nem verdadeiras nem falsas quando o valor das variáveis não é especificado. Nesta seção, vamos discutir como proposições podem ser produzidas a partir dessas declarações.

A declaração "x é maior que 3" tem duas partes. A primeira, a variável x, é o sujeito da declaração. A segunda — o **predicado**, "é maior que 3" — refere-se a uma propriedade que o sujeito pode ter. Podemos representar a declaração "x é maior que 3" por $P(x)$, em que P indica o predicado "é maior que 3" e x é a variável. A declaração, ou afirmação, é também chamada de o valor da **função proposicional** P em x. Uma vez que um valor é dado para a variável x, a declaração $P(x)$ torna-se uma proposição e tem um valor-verdade. Considere os exemplos 1 e 2.

EXEMPLO 1 Seja $P(x)$ a declaração "$x > 3$". Qual o valor-verdade de $P(4)$ e $P(2)$?

Solução: Obtemos a proposição $P(4)$ substituindo $x = 4$ na declaração "$x > 3$". Então, $P(4)$, que é a proposição "$4 > 3$", é verdadeira. No entanto, $P(2)$, que é a proposição "$2 > 3$", é falsa. ◀

EXEMPLO 2 Seja $A(x)$ a declaração "O computador x está sendo invadido por um hacker". Suponha que dos computadores do campus apenas o CS2 e o MATH1 estão sendo invadidos por algum hacker. Quais os valores-verdade de A(CS1), A(CS2) e A(MATH1)?

Solução: Obtemos a proposição A(CS1) substituindo x por CS1 na declaração "O computador x está sendo invadido por um hacker". Como CS1 não está na lista dos computadores invadidos, concluímos que A(CS1) é falsa. De maneira similar, como CS2 e MATH1 estão na lista dos invadidos, sabemos que A(CS2) e A(MATH1) são verdadeiras. ◀

Também podemos trabalhar com afirmações que envolvam mais que uma variável. Por exemplo, considere a afirmação "$x = y + 3$". Podemos indicá-la por $Q(x, y)$, em que x e y são variáveis e Q é o predicado. Quando estabelecemos valores para as variáveis, a proposição $Q(x, y)$ tem um valor-verdade.

EXEMPLO 3 Seja $Q(x, y)$ a representação de "$x = y + 3$". Quais os valores-verdade de $Q(1, 2)$ e $Q(3, 0)$?

Exemplos Extras

Solução: Para obter $Q(1, 2)$, basta tomar $x = 1$ e $y = 2$ na equação representada por $Q(x, y)$. Portanto, $Q(1, 2)$ é a proposição "$1 = 2 + 3$", que é falsa. A afirmação $Q(3, 0)$ é a proposição "$3 = 0 + 3$", que é verdadeira. ◀

EXEMPLO 4 Seja $A(c, n)$ a representação de "O computador c está conectado à rede n", em que c é uma variável que indica computadores e n é uma variável que indica redes. Suponha que o computador MATH1 está conectado à rede CAMPUS2, mas não à rede CAMPUS1. Quais os valores-verdade de A(MATH1, CAMPUS1) e A(MATH1, CAMPUS2)?

Solução: Como MATH1 não está conectado à rede CAMPUS1, vemos que A(MATH1, CAMPUS1) é falsa. Por outro lado, MATH1 está conectado à rede CAMPUS2, logo A(MATH1, CAMPUS2) é verdadeira. ◀

De maneira análoga, podemos tomar afirmações com três variáveis, como $R(x, y, z)$ representando "$x + y = z$". Quando valores são atribuídos às variáveis, a proposição derivada tem um valor-verdade.

EXEMPLO 5 Quais os valores-verdade para $R(1, 2, 3)$ e $R(0, 0, 1)$?

Solução: A proposição $R(1, 2, 3)$ é obtida substituindo-se $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$ na declaração $R(x, y, z)$. Então, vemos que $R(1, 2, 3)$ representa "$1 + 2 = 3$", que é verdadeira. Também podemos notar que $R(0, 0, 1)$ representa "$0 + 0 = 1$", que é falsa. ◀

Em geral, uma afirmação que envolva n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pode ser indicada por

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

A declaração, ou afirmação, indicada por $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é chamada de valor da **função proposicional** P para a n-úpla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, e P é chamado de **predicado *n*-ário**.

Funções proposicionais ocorrem em programas de computação, como mostrado no Exemplo 6.

Links

CHARLES SANDERS PEIRCE (1839–1914) Muitos consideram Charles Peirce o intelectual mais original e versátil dos Estados Unidos; ele nasceu em Cambridge, Massachusetts, e fez importantes contribuições em um grande número de disciplinas, incluindo matemática, astronomia, química, geodésica, metrologia, engenharia, psicologia, filologia, história da ciência e economia. Charles era também inventor, estudante de medicina dedicado, revisor de livros, dramaturgo e ator, escritor de contos, fenomenologista, lógico e metafísico. Ele ficou conhecido pela sua competência filosófica construtivista e produtividade em lógica, matemática e muitas outras áreas da ciência. Seu pai, Benjamin Peirce, era professor de matemática e filosofia natural de Harvard. Peirce freqüentou Harvard (1855–1859) e recebeu seu diploma de mestrado em artes (1862) e um diploma de doutorado em química pela Escola Científica Lawrence (1863). Seu pai o apoiou a seguir a carreira científica, mas, em vez disso, ele escolheu estudar lógica e metodologia científica.

Em 1861, Peirce se tornou um membro da Agrimensura da Costa dos Estados Unidos, com o objetivo de melhor compreender a metodologia científica. Seus serviços para a Agrimensura o dispensaram dos serviços militares durante a Guerra Civil. Enquanto trabalhava para a Agrimensura, Peirce deu continuidade a seus trabalhos nas áreas de astronomia e geodésica. Ele deu contribuições fundamentais na criação de pêndulos e projetos de mapas, aplicando novos desenvolvimentos matemáticos na teoria de funções elípticas. Ele foi a primeira pessoa a usar ondas de luz como unidade de medida. Peirce foi promovido a Assistente na Agrimensura, posição em que se manteve até que foi obrigado a largá-la em 1891, quando ele não concordou com a direção tomada pela administração da Agrimensura.

Embora tenha dedicado a maior parte do tempo às ciências físicas, Peirce desenvolveu uma hierarquia de ciências, com a matemática em seu topo, no qual os métodos de uma ciência poderiam ser adaptados para serem usados pelas ciências que estivessem abaixo na hierarquia. Ele foi também o fundador da teoria filosófica americana de pragmatismo.

A única posição acadêmica que Peirce conquistou foi a de mestre em lógica na Universidade John Hopkins, em Baltimore, de 1879 a 1884. Seu trabalho matemático durante esse período inclui contribuições à lógica, teoria dos conjuntos, álgebra abstrata e filosofia da matemática. Seu trabalho é relevante até nos dias de hoje; alguns de seus trabalhos em lógica foram recentemente aplicados à inteligência artificial. Peirce acreditava que o estudo da matemática poderia desenvolver o poder mental da imaginação, abstração e generalização. Suas diversas atividades, depois de aposentar-se da Agrimensura, incluem a escrita para jornais e periódicos científicos, contribuição em dicionários escolares, tradução de trabalhos científicos, palestras e escrita de livros teóricos. Infelizmente, todas essas atividades não foram suficientes para afastar Charles e sua esposa da pobreza abjeta. Nos seus últimos anos de vida, ele foi sustentado por um fundo criado por seus admiradores e administrado pelo filósofo William James, seu grande amigo. Embora Peirce tenha publicado muitas obras em diversas áreas, ele deixou mais de 100.000 manuscritos sem publicar. Por causa da dificuldade de estudar suas obras manuscritas, pesquisadores começaram a entender apenas recentemente algumas de suas várias contribuições. Um grupo de pessoas dedica-se a tornar seu trabalho disponível na Internet para trazer melhor apreciação do trabalho de Peirce para o mundo.

EXEMPLO 6 Considere a afirmação

if $x > 0$ **then** $x := x + 1$.

Quando essa declaração é encontrada em um programa, o valor da variável x naquele ponto de execução é inserido em $P(x)$, que é "$x > 0$". Se $P(x)$ é verdadeira para esse valor de x, o comando $x := x + 1$ é executado, logo o valor de x é incrementado em uma unidade. Se $P(x)$ é falsa para esse valor de x, o comando não é executado, e, portanto, o valor de x não é alterado. ◀

Predicados são também usados em programas de computador para verificar se eles sempre produzem uma saída desejada quando é dada uma entrada válida. As declarações que descrevem entradas válidas são conhecidas por **condições iniciais** ou **precondições** e as condições que verificam se as saídas são satisfatórias quando o programa roda são chamadas de **condições finais** ou **pós-condições**. Como ilustra o Exemplo 7, usamos predicados para descrever ambas as condições: precondições e pós-condições. Vamos estudar esse processo com mais detalhes na Seção 4.4.

EXEMPLO 7 Considere o seguinte programa, feito para trocar os valores das variáveis x e y.

```
temp := x
x := y
y := temp
```

Encontre predicados que podem ser usados como precondições e pós-condições para verificar se esse programa é correto. Explique como podemos usá-los para verificar se para toda entrada válida o programa faz o que se pretende.

Solução: Como precondição, precisamos saber se x e y têm certos valores antes de rodar o programa. Então, para essa precondição, podemos usar o predicado $P(x, y)$, no qual $P(x, y)$ é a afirmação "$x = a$ e $y = b$", em que a e b são os valores de x e y antes de rodar o programa. Como queremos verificar se o programa está trocando os valores das duas variáveis, como pós-condição podemos usar $Q(x, y)$, em que $Q(x, y)$ é "$x = b$ e $y = a$".

Para verificar se esse programa sempre faz o que se deseja que faça, suponha que a precondição $P(x, y)$ é satisfeita. Ou seja, supomos que "$x = a$ e $y = b$" é verdadeira. Isso significa que $x = a$ e $y = b$. O primeiro passo do programa, $temp := x$, faz a variável *temp* receber o valor de x, então, depois desse passo, $x = a$, $temp = a$ e $y = b$. Depois do segundo passo, $x := y$, sabemos que $x = b$, $temp = a$ e $y = b$. Finalmente, depois do terceiro passo, sabemos que $x = b$, $temp = a$ e $y = a$. Conseqüentemente, depois de rodar o programa, a pós-condição $Q(x, y)$ é satisfeita, isto é, "$x = b$ e $y = a$" é verdadeira. ◀

Quantificadores

Auto-avaliação

Quando impomos às variáveis de uma função proposicional algum valor, a declaração resultante torna-se uma proposição e tem um valor-verdade. No entanto, existe uma outra maneira importante, chamada de **quantificação**, para criar proposições a partir de funções proposicionais. A quantificação é um meio de dizer que um predicado é verdadeiro para um conjunto de elementos. Em português, as palavras *muitos, todos, alguns, nenhum* e *poucos* são usadas em quantificações. Vamos nos concentrar em dois tipos de quantificação aqui: a universal, a qual significa que um predicado é verdadeiro para todos os elementos em consideração, e a existencial, a qual nos diz que existe um ou mais elementos para os quais o predicado é verdadeiro. A área da lógica que estuda predicados e quantificadores é chamada de **cálculo de predicados.**

Auto-avaliação

O QUANTIFICADOR UNIVERSAL Muitas afirmações matemáticas referem-se a alguma propriedade que é verdadeira para todos os valores de uma variável em determinado domínio, chamado de **domínio de discurso** (ou de **universo de discurso**), freqüentemente apenas chamado de **domínio**. Essas afirmações são expressas usando quantificação universal. A quantificação universal de $P(x)$ para determinado domínio é a proposição que afirma que $P(x)$ é verdadeira para todos os valores de x pertencentes a esse domínio. Note que o domínio especifica os possíveis valores da variável x. O significado da quantificação universal de $P(x)$ muda quando mudamos o domínio. O domínio deve ser sempre especificado quando usamos um quantificador universal; sem ele, a quantificação universal não está definida.

DEFINIÇÃO 1 A *quantificação universal* de $P(x)$ é a afirmação

"$P(x)$ é válida para todos os valores de x do domínio."

A notação $\forall x P(x)$ indica a quantificação universal de $P(x)$. Aqui $\forall$ é chamado de **quantificador universal**. Lemos $\forall x P(x)$ como "para todo $x P(x)$". Um elemento para o qual $P(x)$ é falsa é chamado de **contra-exemplo** para $\forall x P(x)$.

O significado do quantificador universal é resumido na primeira linha da Tabela 1. Vamos ilustrar o uso do quantificador universal nos exemplos 8–13.

EXEMPLO 8 Seja $P(x)$ a declaração "$x + 1 > x$". Qual é o valor-verdade da quantificação $\forall x P(x)$, no domínio de todos os números reais?

Exemplos Extras

Solução: Como $P(x)$ é verdadeira para todo número real x, a quantificação

$$\forall x P(x)$$

é verdadeira. ◄

Lembre-se: Em geral, é assumido implicitamente que todos os domínios dos quantificadores são não vazios. Note que, se o domínio é vazio, então $\forall x P(x)$ é verdadeira para toda proposição $P(x)$, uma vez que não há elemento no domínio para o qual $P(x)$ é falsa.

Além disso, a quantificação universal, "para todo"[1] pode ser expressa de muitas outras maneiras, incluindo "todos os", "para cada", "dado qualquer", "arbitrariamente", "para cada" e "para qualquer".

TABELA 1 Quantificadores.

Sentença	*Quando é verdadeira?*	*Quando é falsa?*
$\forall x P(x)$	$P(x)$ é verdadeira para todo x.	Existe um x tal que $P(x)$ é falsa.
$\exists x P(x)$	Existe um x tal que $P(x)$ é verdadeira.	$P(x)$ é falsa para todo x.

[1] N.T.: Neste ponto, o livro original faz menção aos termos equivalentes em inglês que podem causar ambigüidade. Essas ambigüidades não devem ser consideradas em português.

Uma declaração $\forall x P(x)$ é falsa, em que $P(x)$ é uma função proposicional, se e somente se $P(x)$ não é sempre verdadeira para os valores de x no domínio. Uma maneira de mostrar que $P(x)$ não é sempre verdadeira no domínio é achar um contra-exemplo para a declaração $\forall x P(x)$. Note que um único contra-exemplo é tudo de que precisamos para estabelecer que $\forall x P(x)$ é falsa. O Exemplo 9 ilustra como contra-exemplos são usados.

EXEMPLO 9 Seja $Q(x)$ a declaração "$x < 2$". Qual o valor-verdade da quantificação $\forall x Q(x)$, em que o domínio consiste em todos os números reais?

Solução: $Q(x)$ não é verdadeira para todo número real x, porque, por exemplo, $Q(3)$ é falsa. Isto é, $x = 3$ é um contra-exemplo para a declaração $\forall x Q(x)$. Logo

$$\forall x Q(x)$$

é falsa. ◀

EXEMPLO 10 Suponha que $P(x)$ seja "$x^2 > 0$". Para mostrar que $\forall x P(x)$ é falsa onde o universo de discurso consiste em todos os números inteiros, damos um contra-exemplo. Vemos que $x = 0$ é um contra-exemplo, pois $x^2 = 0$ quando $x = 0$, então x^2 não é maior que 0 quando $x = 0$. ◀

Procurar por contra-exemplos em proposições universalmente quantificadas é uma importante atividade no estudo da matemática, como veremos nas seções seguintes deste livro.

Quando todos os elementos do domínio podem ser listados — seja $x_1, x_2, ..., x_n$ —, segue-se que a quantificação universal $\forall x P(x)$ é o mesmo que a conjunção

$$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n),$$

pois esta conjunção é verdadeira se e somente se $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)$ forem todas verdadeiras.

EXEMPLO 11 Qual o valor-verdade de $\forall x P(x)$, em que $P(x)$ é a proposição "$x^2 < 10$" e o domínio é o conjunto dos inteiros positivos que não excedem 4?

Solução: A declaração $\forall x P(x)$ é o mesmo que a conjunção

$$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4),$$

pois o domínio é formado por esses quatro elementos. Como $P(4)$, que é a expressão "$4^2 < 10$", é falsa, segue-se que $\forall x P(x)$ é falsa. ◀

EXEMPLO 12 O que significa dizer $\forall x N(x)$ se $N(x)$ é "O computador x está conectado à rede" e o domínio são todos os computadores do campus?

Solução: A declaração $\forall x N(x)$ significa que, para todo computador x no campus, x está conectado à rede. Em português, a declaração pode ser expressa por "Todo computador no campus está conectado à rede". ◀

Apontamos anteriormente o fato de que a especificação do domínio é primordial e obrigatória quando quantificadores são usados. O valor-verdade da proposição quantificada freqüentemente depende do domínio, como mostra o Exemplo 13.

EXEMPLO 13 Qual o valor-verdade de $\forall x(x^2 \geq x)$ se o domínio consiste em todos os números reais? E qual o valor-verdade dessa proposição se o domínio são todos os números inteiros?

Solução: A quantificação universal $\forall x(x^2 \geq x)$, com domínio nos números reais, é falsa. Por exemplo, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \not\geq \frac{1}{2}$. Note que $x^2 \geq x$ se e somente se $x^2 - x = x(x-1) \geq 0$. Conseqüentemente, $x^2 \geq x$ se e somente se $x \leq 0$ ou $x \geq 1$. Daqui segue que $\forall x(x^2 \geq x)$ é falsa se o domínio consiste em todos os números reais (pois a inequação não é válida para os números reais entre 0 e 1). No entanto, se o domínio são os números inteiros, $\forall x(x^2 \geq x)$ é verdadeira, pois não há números inteiros entre 0 e 1. ◀

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL Muitas proposições matemáticas dizem que existe um elemento com determinada propriedade. Essas proposições são expressas usando a quantificação existencial. Com a quantificação existencial, construímos uma proposição que é verdadeira se e somente se $P(x)$ é verdadeira para, pelo menos, um valor no domínio.

DEFINIÇÃO 2 A *quantificação existencial* de $P(x)$ é a proposição

"Existe um elemento x no domínio tal que $P(x)$."

Usamos a notação $\exists x P(x)$ para a quantificação existencial de $P(x)$. Aqui $\exists$ é chamado de **quantificador existencial**.

Um domínio deve sempre ser especificado quando uma proposição $\exists x P(x)$ é usada. Até mesmo porque seu significado muda quando mudamos o domínio. Sem a especificação de um domínio, a expressão $\exists x P(x)$ não tem sentido. A quantificação existencial $\exists x P(x)$ é lida como

"Existe um x tal que $P(x)$."
"Existe pelo menos um x tal que $P(x)$."

ou

"Para algum x $P(x)$."

No lugar da palavra "existe", podemos também expressar a quantificação existencial de muitas outras maneiras, tais como usar as palavras "para algum", "para pelo menos um" ou " há".

O significado do quantificador existencial é resumido na segunda linha da Tabela 1. Vamos ilustrar o uso do quantificador existencial nos exemplos 14–16.

EXEMPLO 14 Seja $P(x)$ a expressão "$x > 3$". Qual o valor-verdade da quantificação $\exists x P(x)$ no domínio dos números reais?

Exemplos Extras

Solução: Como "$x > 3$" é verdadeira para alguns números reais — por exemplo, quando $x = 4$ —, a quantificação existencial de $P(x)$, que é $\exists x P(x)$, é verdadeira. ◀

Observe que a proposição $\exists x P(x)$ é falsa se e somente se não existe elemento x no domínio para o qual $P(x)$ é verdadeira. Ou seja, $\exists x P(x)$ é falsa se e somente se $P(x)$ é falsa para todo elemento do domínio. Vamos ilustrar essa observação no Exemplo 15.

EXEMPLO 15 Seja $Q(x)$ a expressão "$x = x + 1$". Qual o valor-verdade da quantificação $\exists x Q(x)$ no domínio dos números reais?

Solução: Como $Q(x)$ é falsa para todos os números reais, a quantificação existencial de $Q(x)$, que é $\exists x\, Q(x)$, é falsa. ◀

Lembre-se: Em geral, é assumido implicitamente que todos os domínios dos quantificadores são não vazios. Note que se o domínio é vazio, então $\exists x\, Q(x)$ é falsa para toda função proposicional $Q(x)$, uma vez que não há elemento no domínio que valide $Q(x)$.

Quando todos os elementos do domínio podem ser listados — seja $x_1, x_2, ..., x_n$ —, a quantificação existencial $\exists x P(x)$ é a mesma que a disjunção

$$P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n),$$

pois essa disjunção é verdadeira se e somente se pelo menos uma das $P(x_1)$, $P(x_2)$, ... , $P(x_n)$ for verdadeira.

EXEMPLO 16 Qual o valor-verdade de $\exists x\ P(x)$, em que $P(x)$ é a proposição "$x^2 > 10$" e o domínio é o conjunto dos inteiros positivos que não excedem 4?

Solução: Como o domínio é $\{1, 2, 3, 4\}$, a proposição $\exists x\, P(x)$ é a mesma que a disjunção

$$P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4).$$

Como $P(4)$, que é a proposição "$4^2 > 10$", é verdadeira, segue-se que $\exists x\ P(x)$ é verdadeira. ◀

Às vezes é interessante dar uma passada por todos os termos do domínio ou fazer uma procura entre esses termos quando estamos determinando valores-verdade de uma quantificação. Suponha que temos n objetos no domínio para uma variável x. Para determinar quando $\forall x\, P(x)$ é verdadeira, podemos dar uma passada por todos os valores de x para ver se $P(x)$ é sempre verdadeira. Se encontrarmos um valor de x para o qual $P(x)$ é falsa, então, teremos mostrado que $\forall x\, P(x)$ é falsa. Caso contrário, $\forall x\, P(x)$ será verdadeira. Para ver quando $\exists x\, P(x)$ é verdadeira, damos uma passada pelos n valores de x procurando um valor para o qual $P(x)$ é verdadeira. Se nunca encontrarmos um tal valor de x, teremos, então, determinado que $\exists x\, P(x)$ é falsa. (Note que esse procedimento de procura não se aplica quando existem infinitos valores de x no domínio. No entanto, é uma maneira possível de pensar sobre os valores-verdade das quantificações.)

Outras Quantificações

Agora temos introduzido os quantificadores universal e existencial. Esses são os mais importantes quantificadores em matemática e em ciência da computação. No entanto, existe um número não limitado de quantificadores que podemos definir, tais como "existem exatamente dois", "existem não mais de três", "existem pelo menos 100", e assim por diante. Desses outros quantificadores, um dos mais freqüentemente vistos é o **quantificador de unicidade**, indicado por $\exists!$ ou $\exists_1$. A notação $\exists! x\, P(x)$ [ou $\exists_1 x\, P(x)$] indica que "Existe um único x tal que $P(x)$ é verdadeira". Outras frases podem ser usadas para a quantificação de unicidade, incluindo "existe exatamente um" e "existe um e somente um". Observe que podemos usar quantificadores e lógica proposicional para expressar unicidade (veja o Exercício 52 na Seção 1.4), então podemos nos esquivar do quantificador de unicidade. Geralmente, é melhor trabalhar com os quantificadores universal e existencial, pois as regras de inferência para esses quantificadores podem ser usadas.

Quantificadores com Domínio Restrito

Uma notação abreviada é freqüentemente usada para restringir o domínio de um quantificador. Nessa notação, uma condição que a variável deve satisfazer é incluída depois do quantificador. Esse fato é ilustrado no Exemplo 17. Vamos também descrever outras formas de notação que envolvem elementos de conjuntos na Seção 2.1.

EXEMPLO 17 O que as proposições $\forall x < 0\ (x^2 > 0)$, $\forall y \neq 0\ (y^3 \neq 0)$ e $\exists z > 0\ (z^2 = 2)$ significam, em que o domínio em cada um dos casos é o conjunto dos números reais?

Solução: A proposição $\forall x < 0\ (x^2 > 0)$ fala sobre qualquer número real x com $x < 0$, $x^2 > 0$. Ou seja, ela diz que "O quadrado de todo número negativo é positivo". A proposição é o mesmo que $\forall x(x < 0 \rightarrow x^2 > 0)$.

A proposição $\forall y \neq 0\ (y^3 \neq 0)$ fala que, para qualquer número real y com $y \neq 0$, teremos $y^3 \neq 0$. Ou seja, ela diz que "O cubo de um número não nulo é também não nulo". Note que esta proposição é equivalente a $\forall y(y \neq 0 \rightarrow y^3 \neq 0)$.

Finalmente, a proposição $\exists z > 0\ (z^2 = 2)$ fala que existe um número real z com $z > 0$, tal que $z^2 = 2$. Ou seja, ela diz que "Existe um número real positivo tal que seu quadrado é igual a 2". Essa proposição é equivalente a $\exists z(z > 0 \wedge z^2 = 2)$. ◀

Note que a restrição de um quantificador universal é a mesma que o quantificador universal de uma proposição condicional. Por exemplo, $\forall x < 0\ (x^2 > 0)$ é uma outra maneira de expressar $\forall x(x < 0 \rightarrow x^2 > 0)$. Por outro lado, a restrição de um quantificador existencial é a mesma que o quantificador existencial de uma conjunção. Por exemplo, $\exists z > 0\ (z^2 = 2)$ é uma outra maneira de expressar $\exists z(z > 0 \wedge z^2 = 2)$.

Prioridade dos Quantificadores

Os quantificadores $\forall$ e $\exists$ têm prioridade maior que todos os operadores lógicos do cálculo proposicional. Por exemplo, $\forall x P(x) \vee Q(x)$ é a disjunção de $\forall x P(x)$ e $Q(x)$. Em outras palavras, ela significa $(\forall x P(x)) \vee Q(x)$ em vez de $\forall x(P(x) \vee Q(x))$.

Ligando Variáveis

Quando um quantificador é usado na variável x, dizemos que essa ocorrência da variável é **ligada**. Uma ocorrência de uma variável que não é ligada por um quantificador ou não representa um conjunto de valores particulares é chamada de **variável livre**. Todas as variáveis que ocorrem em uma função proposicional devem ser ligadas ou devem representar um conjunto de valores particulares para ser uma proposição. Isso pode ser feito usando uma combinação de quantificadores universais, existenciais ou dando algum valor para as variáveis.

A parte da expressão lógica à qual um quantificador é aplicado é chamada de **escopo** do quantificador. Conseqüentemente, uma variável é livre se ela não está sob o escopo de algum quantificador na fórmula em que aparece essa variável.

EXEMPLO 18 Na afirmação $\exists x(x + y = 1)$, a variável x é ligada pelo quantificador existencial, mas a variável y é livre, pois não é ligada a nenhum quantificador, nem assume nenhum valor específico. Isso ilustra que, na declaração $\exists x(x + y = 1)$, x é ligada e y é livre.

Na afirmação $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x R(x)$, todas as variáveis são ligadas. O escopo do primeiro quantificador é $\exists x$, pois $P(x) \wedge Q(x)$ é aplicado apenas a $\exists x$, e não ao resto da expressão. Similarmente, o escopo do segundo quantificador, $\forall x$, nesta expressão é $R(x)$. Isto é, o quantificador existencial atua sobre a variável x em $P(x) \wedge Q(x)$ e o quantificador universal $\forall x$ atua sobre a variável x em $R(x)$. Observe que poderíamos ter escrito nossa afirmação usando duas variáveis diferentes x

e y, como $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall y R(y)$, pois o escopo dos dois quantificadores não se sobrepõe. O leitor deve estar ciente de que, no uso comum, a mesma letra é freqüentemente usada para representar variáveis ligadas por diferentes quantificadores com escopo que não se sobrepõe. ◀

Equivalências Lógicas que Envolvem Quantificadores

Na Seção 1.2, introduzimos a noção de equivalências lógicas de proposições compostas. Podemos estender essa noção a expressões que envolvem predicados e quantificadores.

DEFINIÇÃO 3 Sentenças que envolvem predicados e quantificadores são *logicamente equivalentes* se e somente se elas têm o mesmo valor-verdade quaisquer que sejam os predicados substituídos nessas sentenças e qualquer que seja o domínio de discurso para as variáveis nessas funções proposicionais. Usamos a notação S $\equiv T$ para indicar que as duas declarações que envolvem predicados e quantificadores são logicamente equivalentes.

O Exemplo 19 ilustra como duas declarações que envolvem predicados e quantificadores são logicamente equivalentes.

EXEMPLO 19 Mostre que $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ e $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ são logicamente equivalentes (em que o mesmo domínio é usado nas duas). Essa equivalência lógica mostra que podemos distribuir o quantificador universal sobre a conjunção. Além disso, podemos distribuir o quantificador existencial sobre a disjunção. No entanto, não podemos distribuir o universal sobre a disjunção nem o existencial sobre a conjunção. (Veja os exercícios 50 e 51.)

Solução: Para mostrar que essas sentenças são logicamente equivalentes, devemos mostrar que elas têm sempre o mesmo valor-verdade, não importando o que são os predicados P e Q, e não importando qual seja o domínio usado. Suponha que tenhamos predicados particulares P e Q, com um domínio comum. Podemos mostrar que $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ e $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ são logicamente equivalentes fazendo duas coisas. Primeiro, mostramos que se $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ é verdadeira, então $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ é verdadeira. Depois, mostramos que, se $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ é verdadeira, então $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ é verdadeira.

Então, suponha que $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ seja verdadeira. Isso significa que se a está no domínio, então $P(a) \wedge Q(a)$ é verdadeira. Logo, $P(a)$ é verdadeira e $Q(a)$ é verdadeira. Como $P(a)$ é verdadeira e $Q(a)$ é verdadeira para todo elemento do domínio, podemos concluir que $\forall x P(x)$ e $\forall x Q(x)$ são ambas verdadeiras. Isso significa que $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ é verdadeira.

Agora podemos supor que $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ é verdadeira. Disso segue que $\forall x P(x)$ e $\forall x Q(x)$ são ambas verdadeiras. Logo, se a está no domínio, então $P(a)$ é verdadeira e $Q(a)$ é verdadeira (como $P(x)$ e $Q(x)$ são verdadeiras para todos os elementos do domínio, não há nenhum problema em usar o mesmo valor a). Disso segue que, para todo a do domínio, $P(a) \wedge Q(a)$ é verdadeira. Portanto, $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ é verdadeira. Podemos, então, concluir que

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x).$$ ◀

Negando Expressões Quantificadas

Freqüentemente vamos querer considerar a negação das expressões quantificadas. Por exemplo, considere a negação da expressão

"Todo estudante na sua classe teve aulas de cálculo."

Essa expressão é uma quantificação universal, nominalmente,

$$\forall x\, P(x),$$

Auto-avaliação

em que $P(x)$ é a declaração "x teve aulas de cálculo" e o domínio consiste em todos os estudantes de sua classe. A negação dessa proposição é "Não é o caso de todos os alunos de sua classe terem feito aulas de cálculo". Isso é equivalente a "Existe um estudante em sua classe que não teve aula de cálculo". E isso é simplesmente a quantificação existencial da negação da função proposicional original, nominalmente,

$$\exists x \neg P(x).$$

Esse exemplo ilustra a seguinte equivalência lógica:

$$\neg \forall x\, P(x) \equiv \exists x \neg P(x).$$

Para mostrar que $\neg \forall x\, P(x)$ e $\exists x\,(x)$ são logicamente equivalentes, não importando o que significa a função proposicional $P(x)$ e tampouco qual o domínio, primeiro note que $\neg \forall x\, P(x)$ é verdadeira se e somente se $\forall x\, P(x)$ é falsa. Depois, note que $\forall x\, P(x)$ é falsa se e somente se existe um elemento x no domínio para o qual $\neg P(x)$ é verdadeira. Finalmente, observe que existe um elemento x no domínio, tal que $\neg P(x)$ é verdadeira se e somente se $\exists x \neg P(x)$ é verdadeira. Colocando esses passos em seqüência, podemos concluir que $\neg \forall x\, P(x)$ e $\exists x \neg P(x)$ são logicamente equivalentes.

Suponha que queiramos negar uma quantificação existencial. Por exemplo, considere a expressão "Existe um estudante na sua classe que teve aulas de cálculo". Este é o quantificador existencial

$$\exists x\, Q(x),$$

em que $Q(x)$ é a declaração "x teve aulas de cálculo". A negação dessa frase é a proposição "Não é o caso de existir um estudante na sua classe que teve aulas de cálculo". Que é equivalente a "Todo estudante nesta classe não teve aulas de cálculo", que é a quantificação universal da negação da função proposicional original, ou, escrito em linguagem dos quantificadores,

$$\forall x \neg Q(x).$$

Esse exemplo ilustra a equivalência

$$\neg \exists x\, Q(x) \equiv \forall x \neg Q(x).$$

Para mostrar que $\neg \exists x\, Q(x) \equiv \forall x \neg Q(x)$ são logicamente equivalentes, não importando o que significa a função proposicional $Q(x)$ e tampouco qual o domínio, primeiro note que $\neg \exists x\, Q(x)$ é verdadeira se e somente se $\exists x\, Q(x)$ é falsa. E isso é verdadeiro se e somente se não existe um elemento x no domínio para o qual $Q(x)$ é verdadeira. Depois, note que não existe x no domínio para o qual $Q(x)$ é verdadeira se e somente se $Q(x)$ é falsa para todo x no domínio. Finalmente, observe que $Q(x)$ é falsa para todo x no domínio se e somente se $\neg Q(x)$ é verdadeira para todo x no domínio, que só pode ocorrer se e somente se $\forall x \neg Q(x)$ é verdadeira. Colocando esses passos em seqüência, vemos que $\neg \exists x\, Q(x)$ é verdadeira se e somente se $\forall x \neg Q(x)$ é verdadeira. E concluímos que eles são logicamente equivalentes.

As regras para negações de quantificadores são chamadas de **leis de De Morgan para quantificadores**. Essas regras estão resumidas na Tabela 2.

TABELA 2 Leis de De Morgan para Quantificadores.

Negação	*Sentença Equivalente*	*Quando a Negação é Verdadeira?*	*Quando é Falsa?*
$\neg\exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	Para todo x, $P(x)$ é falsa.	Existe um x para o qual $P(x)$ é verdadeira.
$\neg\forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	Existe um x para o qual $P(x)$ é falsa.	Para todo x, $P(x)$ é verdadeira.

Lembre-se: Quando o domínio de um predicado $P(x)$ consiste em n elementos, em que n é um número inteiro positivo, as regras de negação para proposições quantificadas são exatamente como as leis de De Morgan discutidas na Seção 1.2. Por isso, chamamos essas leis de leis de De Morgan para quantificadores. Quando o domínio tem n elementos x_1, x_2, ..., x_n, segue que $\neg\forall x P(x)$ é o mesmo que $\neg(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n))$, que é equivalente a $\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \cdots \vee \neg P(x_n)$ pela lei de De Morgan, e isso é o mesmo que $\exists x \neg P(x)$. De maneira análoga, $\neg\exists x P(x)$ é o mesmo que $\neg(P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n))$, que pela lei de De Morgan é equivalente a $\neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \cdots \wedge \neg P(x_n)$ e isso é o mesmo que $\forall x \neg P(x)$.

Ilustramos a negação de proposições quantificadas nos exemplos 20 e 21.

EXEMPLO 20 Quais as negações de "Existe um político honesto" e "Todos os brasileiros comem churrasco"?

Solução: Seja $H(x)$ correspondente a "x é honesto". Então, a proposição "Existe um político honesto" é representada por $\exists x H(x)$, em que o domínio consiste em todos os políticos. A negação dessa declaração é $\neg\exists x H(x)$, que é equivalente a $\forall x \neg H(x)$. Essa negação pode ser expressa por "Todos os políticos são desonestos" (ou "Todos os políticos são não honestos", mas, dependendo da língua em que se fala, essa última pode gerar uma ambigüidade; logo, preferimos a primeira).

Exemplos Extras

Seja $C(x)$ correspondente a "x come churrasco". Então, a proposição "Todos os brasileiros comem churrasco" é representada por $\forall x C(x)$, em que o domínio consiste em todos os brasileiros. A negação dessa proposição é representada por $\neg\forall x C(x)$, que é equivalente a $\exists x \neg C(x)$. Essa negação pode ser expressa de muitas maneiras diferentes, incluindo "Alguns brasileiros não comem churrasco" ou "Existe um brasileiro que não come churrasco". ◀

EXEMPLO 21 Quais as negações das proposições $\forall x(x^2 > x)$ e $\exists x(x^2 = 2)$?

Solução: A negação de $\forall x(x^2 > x)$ é a proposição $\neg\forall x(x^2 > x)$, que é equivalente a $\exists x \neg(x^2 > x)$. Esta pode ser reescrita como $\exists x(x^2 \leq x)$. A negação de $\exists x(x^2 = 2)$ é a proposição $\neg\exists x(x^2 = 2)$, que é equivalente a $\forall x \neg(x^2 = 2)$. Essa pode ser reescrita como $\forall x(x^2 \neq 2)$. Os valores-verdade dessas proposições dependem do domínio. ◀

Usaremos as leis de De Morgan para quantificadores no Exemplo 22.

EXEMPLO 22 Mostre que $\neg\forall x(P(x) \to Q(x))$ e $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$ são logicamente equivalentes.

Solução: Pela lei de De Morgan para quantificadores universais, sabemos que $\neg\forall x(P(x) \to Q(x))$ e $\exists x(\neg(P(x) \to Q(x)))$ são logicamente equivalentes. Pela quinta equivalência lógica da Tabela 7 da Seção 1.2, sabemos que $\neg(P(x) \to Q(x))$ e $P(x) \wedge \neg Q(x)$ são logicamente equivalentes para todo x. Como podemos substituir uma expressão logicamente equivalente por outra, em uma equivalência lógica, segue que $\neg\forall x(P(x) \to Q(x))$ e $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$ são logicamente equivalentes. ◀

Traduzindo do Português para Expressões Lógicas

Traduzir sentenças em português (ou outra linguagem natural) para expressões lógicas é uma tarefa crucial em matemática, lógica de programação, inteligência artificial, engenharia de software e muitas outras disciplinas. Começamos a estudar esse tópico na Seção 1.1, onde usamos proposições para expressar sentenças em expressões lógicas. Naquela discussão, nós propositalmente evitamos sentenças em que suas traduções necessitavam de predicados e quantificadores. Traduzir do português para expressões lógicas torna-se mais complicado quando quantificadores são necessários. Além do mais, podem existir muitas maneiras de traduzir uma sentença particular. (Portanto, não existe uma receita que pode ser seguida passo a passo.) Vamos usar alguns exemplos para ilustrar como traduzir do português para expressões lógicas. O objetivo nessa tradução é produzir expressões lógicas simples e usuais. Nesta seção, restringiremos a sentenças que podem ser traduzidas usando apenas um quantificador; na próxima seção, veremos sentenças mais complicadas que requerem muitos quantificadores.

EXEMPLO 23 Expresse a sentença "Todo estudante desta classe estudou cálculo", usando predicados e quantificadores.

Solução: Primeiro, reescrevemos a sentença para identificar claramente qual o quantificador apropriado para usar. Fazendo isso, obtemos:

"Para cada estudante desta classe, este estudante estudou cálculo."

Exemplos Extras

Depois, introduzimos uma variável e a sentença torna-se

"Para cada estudante x desta classe, x estudou cálculo."

Continuando, introduzimos $C(x)$, que é o predicado "x estudou cálculo". Conseqüentemente, se o domínio para x consiste nos estudantes desta classe, podemos traduzir nossa sentença para $\forall x\, C(x)$.

No entanto, existem outras maneiras corretas; diferentes domínios e predicados que podem ser usados. A tradução que escolhemos depende do raciocínio subseqüente que queremos levar a cabo. Por exemplo, podemos estar interessados em um grupo de pessoas mais amplo que aquele dessa classe. Se mudarmos o domínio para todas as pessoas, precisaremos expressar nossa sentença por

"Para cada pessoa x, se x é um estudante desta classe, então x estudou cálculo."

Se $S(x)$ representa a sentença "x é um estudante desta classe", vemos que nossa sentença pode ser expressa por $\forall x\,(S(x) \rightarrow C(x))$. [*Cuidado!* Nossa sentença *não* pode ser expressa por $\forall x\,(S(x) \wedge C(x))$, pois essa expressão diz que todas as pessoas são estudantes desta classe e já estudaram cálculo!]

Finalmente, quando estamos interessados em relacionar as pessoas com a matéria cálculo, podemos preferir um predicado com duas variáveis $Q(x, y)$ para a sentença "estudante x estudou a matéria y". E podemos substituir $C(x)$ por $Q(x$, cálculo$)$ em ambas as traduções anteriores e obter $\forall x\, Q(x,$ cálculo$)$ ou $\forall x\,(S(x) \rightarrow Q(x,$ cálculo$))$. ◄

No Exemplo 23, mostramos diferentes modos de expressar a mesma sentença usando predicados e quantificadores. No entanto, devemos sempre adotar o mais simples, que é adequado para usar em nosso raciocínio subseqüente.

EXEMPLO 24 Expresse as sentenças "Algum estudante da classe visitou o México" e "Todo estudante da classe visitou Canadá ou México" usando predicados e quantificadores.

Solução: A sentença "Algum estudante da classe visitou o México" significa que

"Existe um estudante da classe com a propriedade de que o estudante visitou o México."

Podemos introduzir uma variável x, e a sentença passará a

"Existe um estudante x da classe com a propriedade de que x visitou o México."

Introduzimos $M(x)$, que é a sentença "x visitou o México". Se o domínio consiste em todos os estudantes da classe, podemos traduzir essa primeira sentença por $\exists x M(x)$.

No entanto, se estamos interessados nas pessoas além das pessoas da classe, podemos olhar para a sentença de maneira um pouco diferente. Nossa sentença pode ser expressa por

"Existe uma pessoa x que tem as propriedades de x ser estudante da classe e x visitou o México."

Nesse caso, o domínio da variável x consiste em todas as pessoas. Introduzimos $S(x)$ para representar "x é estudante da classe". Nossa solução fica $\exists x(S(x) \wedge M(x))$ porque a sentença diz que existe uma pessoa x que é estudante e visitou o México. [*Cuidado!* Nossa sentença *não* pode ser expressa por $\exists x(S(x) \rightarrow M(x))$, que é verdadeira para qualquer pessoa que não esteja na classe, pois, nesse caso, para uma pessoa x, $S(x) \rightarrow M(x)$ torna-se $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{V}$ ou $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$, ambas verdadeiras.]

Similarmente, a segunda sentença pode ser expressa por

"Para cada estudante da classe x, x tem a propriedade de x ter visitado o México ou x ter visitado o Canadá."

(Note que estamos assumindo o *ou* inclusivo, em vez do *ou* exclusivo.) Seja $C(x)$ a sentença "x visitou o Canadá". Seguindo o nosso raciocínio, vemos que, com o domínio consistindo nos alunos da classe, a segunda sentença pode ser expressa por $\forall x(C(x) \vee M(x))$. No entanto, se o domínio consiste em todas as pessoas, nossa sentença pode ser expressa por

"Para cada pessoa x, se x é estudante da classe, então x tem a propriedade de x ter visitado o México ou x ter visitado o Canadá."

Nesse caso, a sentença pode ser expressa por $\forall x(S(x) \rightarrow (C(x) \vee M(x)))$.

Em vez de usar $M(x)$ e $C(x)$ para representar que x visitou o México e x visitou o Canadá, respectivamente, podemos usar um predicado binário $V(x, y)$ para representar "x visitou o país y". Nesse caso, $V(x$, México$)$ e $V(x$, Canadá$)$ terão o mesmo significado de $M(x)$ e $C(x)$ e podem substituí-los em nossas respostas. Se estivermos trabalhando com muitas sentenças que envolvam pessoas que visitam diferentes países, podemos preferir trabalhar com esse predicado com duas variáveis. Caso contrário, por simplicidade, devemos escolher predicados com uma variável. ◄

Usando Quantificadores em Sistemas de Especificações

Na Seção 1.1, usamos proposições para representar sistemas de especificações. No entanto, muitos sistemas de especificações envolvem predicados e quantificações. Isso é ilustrado no Exemplo 25.

EXEMPLO 25 Use predicados e quantificadores para expressar o sistema de especificações "Todo e-mail com tamanho maior que um megabyte será comprimido" e "Se um usuário estiver ativo, ao menos um link de rede estará habilitado".

Exemplos Extras

Solução: Seja $S(m, y)$ o predicado "E-mail m tem tamanho maior que y megabytes", em que o domínio de m consiste em todas as mensagens de e-mail e y é um número real positivo, e seja $C(m)$ o predicado "O e-mail m será comprimido". Então, a especificação "Todo e-mail com tamanho maior que um megabyte será comprimido" pode ser representada por $\forall m(S(m,1) \to C(m))$.

Seja $A(u)$ o predicado "O usuário u está ativo", em que a variável u tem como domínio todos os usuários, e seja $S(n, x)$ o predicado "O link de rede n está no estado x", em que n tem como domínio todos os links de rede e x tem como domínio os estados possíveis de cada link. Então, a especificação "Se um usuário estiver ativo, ao menos um link de rede estará habilitado" pode ser expressa por $\exists u A(u) \to \exists n S(n,$ habilitado$)$. ◀

Exemplos de Lewis Carroll

Lewis Carroll (pseudônimo de Charles Lutwidge Dodgson), o autor de *Alice no País das Maravilhas*, é também autor de muitos trabalhos sobre lógica simbólica. Seu livro contém muitos exemplos de raciocínio usando quantificadores. Os exemplos 26 e 27 são do livro *Symbolic Logic*; outros exemplos contidos neste livro são dados nos exercícios no final desta seção. Esses exemplos ilustram como quantificadores são usados para expressar vários tipos de sentenças.

EXEMPLO 26 Considere estas sentenças. As duas primeiras são chamadas de *premissas* e a terceira é chamada de *conclusão*. O conjunto inteiro é chamado de *argumento*.

"Todos os leões são selvagens."
"Alguns leões não bebem café."
"Algumas criaturas selvagens não bebem café."

(Na Seção 1.5 vamos discutir a questão de determinar quando a conclusão é uma conseqüência válida das premissas. Neste exemplo, é.) Sejam $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ as sentenças "x é um leão", "x é selvagem" e "x bebe café", respectivamente. Assumindo que o domínio consiste em todas as criaturas, expresse as sentenças do argumento usando quantificadores e $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$.

Solução: Podemos expressar essas sentenças como:

$\forall x(P(x) \to Q(x))$.
$\exists x(P(x) \land \neg R(x))$.
$\exists x(Q(x) \land \neg R(x))$.

Note que a segunda sentença não pode ser escrita por $\exists x(P(x) \to \neg R(x))$. A razão é que $P(x) \to \neg R(x)$ é verdadeira toda vez que x não é um leão, logo $\exists x(P(x) \to \neg R(x))$ é verdadeira sempre que existir uma criatura que não seja um leão, mesmo que todo leão beba café. Similarmente, a terceira sentença não pode ser expressa por

$$\exists x(Q(x) \to \neg R(x)).$$ ◀

Links

CHARLES LUTWIDGE DODGSON (1832–1898) Conhecemos Charles Dodgson como Lewis Carroll — pseudônimo que ele usou em seus escritos sobre lógica. Dodgson, filho de um clérigo, foi o terceiro filho de um total de 11 crianças; de todas, ele era o único que gaguejava. Ele ficava constrangido na presença de adultos e é dito que ele falava sem gaguejar apenas com jovens garotas, muitas com as quais ele se divertia, se correspondia e as fotografava (algumas vezes em poses que hoje seriam consideradas inapropriadas). Embora atraído por jovens garotas, ele era extremamente puritano e religioso. Sua amizade com as três filhas jovens de Dean Liddell inspirou-o a escrever *Alice no País das Maravilhas,* que lhe trouxe dinheiro e fama.

Dodgson formou-se em Oxford em 1854 e obteve seu título de mestre em 1857. Ele foi indicado como professor em matemática na Christ Church College, Oxford, em 1855. Foi ordenado na Igreja da Inglaterra em 1861, mas nunca praticou seu ministério. Seus escritos incluem artigos e livros sobre geometria, determinantes e a matemática de torneios e eleições. (Também usou o pseudônimo Lewis Carroll em muitos de seus trabalhos de lógica recreacional.)

EXEMPLO 27 Considere estas sentenças, das quais as três primeiras são premissas e a quarta é uma conclusão válida.

"Todos os beija-flores são ricamente coloridos."
"Nenhum pássaro grande vive de néctar."
"Pássaros que não vivem de néctar são monótonos nas cores."
"Beija-flores são pequenos."

Sejam $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ e $S(x)$ as sentenças "x é um beija-flor", "x é grande", "x vive de néctar" e "x é ricamente colorido", respectivamente. Assumindo que o domínio consiste em todos os pássaros, expresse as sentenças do argumento usando quantificadores e $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ e $S(x)$.

Solução: Podemos expressar as sentenças do argumento por

$$\forall x(P(x) \to S(x)).$$
$$\neg\exists x(Q(x) \land R(x)).$$
$$\forall x(\neg R(x) \to \neg S(x)).$$
$$\forall x(P(x) \to \neg Q(x)).$$

(Note que assumimos que "pequenos" é o mesmo que "não grandes" e que "monótono nas cores" é o mesmo que "não ricamente colorido". Para mostrar que a quarta sentença é uma conclusão válida a partir das três primeiras, precisamos do uso de regras de inferência, que serão discutidas na Seção 1.5.) ◄

Programação Lógica

Um importante tipo de linguagem de programação é designado a raciocinar usando regras de predicados lógicos. Prolog (de *Pro*gramming in *Log*ic), desenvolvido na década de 1970 por cientistas computacionais que trabalhavam na área de inteligência artificial, é um exemplo dessas linguagens. Programas em Prolog incluem um conjunto de declarações que consistem em dois tipos de sentenças, ***Prolog facts*** e ***Prolog rules*** (fatos Prolog e regras Prolog). *Prolog facts* definem predicados que especificam os elementos que satisfazem esses predicados. *Prolog rules* são usados para definir novos predicados que usam aqueles que já estão definidos em *Prolog facts*. O Exemplo 28 ilustra essas noções.

Links

EXEMPLO 28 Considere um programa Prolog que oferece como fatos (*facts*) os instrutores de cada classe (*instructor*) e em qual classe cada aluno está matriculado (*enrolled*). O programa usa esses fatos para responder quem é o instrutor de um estudante em particular. Esse programa deve usar os predicados *instructor*(p, c) e *enrolled*(s, c) para representar que o professor p é o instrutor do curso c e o estudante s está matriculado no curso c, respectivamente. Por exemplo, os *Prolog facts* nesse programa podem incluir:

```
instructor(chan,math273)
instructor(patel,ee222)
instructor(grossman,cs301)
enrolled(kevin,math273)
enrolled(juana,ee222)
enrolled(juana,cs301)
enrolled(kiko,math273)
enrolled(kiko,cs301)
```

(As letras minúsculas são usadas para as entradas, pois o Prolog considera nomes que começam por letras maiúsculas como variáveis.)

Um novo predicado *teaches*(p, s), que representa que o professor p ensina o estudante s, pode ser definido usando uma *Prolog rule*

```
teaches(P,S) :- instructor(P,C), enrolled(S,C)
```

o que significa que *teaches*(p, s) é verdadeiro se existir uma classe c tal que o professor p é instrutor dessa classe e o estudante s está matriculado na classe c. (Note que uma vírgula é usada para representar uma conjunção de predicados em Prolog. Similarmente, um ponto-e-vírgula é usado para representar uma disjunção de predicados.)

Prolog responde às perguntas usando os fatos e as regras dadas. Por exemplo, usando os fatos e as regras listadas, a pergunta

```
?enrolled(kevin,math273)
```

produz a resposta

```
yes
```

porque o fato *enrolled* (kevin, math273) foi dado como entrada. A pergunta

```
?enrolled(X,math273)
```

produz a resposta

```
kevin
kiko
```

Para produzir essa resposta, Prolog determina todos os valores possíveis da variável X, para os quais *enrolled*(X, math273) foi dado como *Prolog fact*. Similarmente, para encontrar os professores que são os instrutores das classes de Juana, usamos a pergunta

```
?teaches(X,juana)
```

Essa pergunta retorna

```
patel
grossman
```

◀

Exercícios

1. Considere $P(x)$ como a proposição "x $\leq$ 4". Quais são os valores-verdade das proposições abaixo?
a) $P(0)$ **b)** $P(4)$ **c)** $P(6)$

2. Considere $P(x)$ como a proposição "a palavra x contém a letra a". Quais são os valores-verdade das proposições abaixo?
a) P(orange) **b)** P(lemon)
c) P(true) **d)** P(false)

3. Considere $Q(x, y)$ como a proposição "x é a capital de y." Quais os valores-verdade das proposições a seguir?
a) Q(Denver, Colorado)
b) Q(Detroit, Michigan)
c) Q(Massachusetts, Boston)
d) Q(Nova York, Nova York)

4. Constate o valor de x depois que a proposição **if** $P(x)$ **then** $x := 1$ for executada, em que $P(x)$ é a proposição "$x > 1$", se o valor de x, quando essa proposição for alcançada, for
a) $x = 0$.
b) $x = 1$.
c) $x = 2$.

5. Considere $P(x)$ como a proposição "x passa mais do que cinco horas em aula todos os dias", em que o domínio de x são todos os estudantes. Expresse cada uma dessas quantificações em português.

a) $\exists x\, P(x)$ **b)** $\forall x\, P(x)$
c) $\exists x\, \neg P(x)$ **d)** $\forall x\, \neg P(x)$

6. Considere $N(x)$ como a proposição "x visitou Dakota do Norte", em que o domínio são os estudantes de sua escola. Expresse cada uma dessas quantificações em português.

a) $\exists x\, N(x)$ **b)** $\forall x\, N(x)$ **c)** $\neg\exists x\, N(x)$
d) $\exists x\, \neg N(x)$ **e)** $\neg\forall x\, N(x)$ **f)** $\forall x\, \neg N(x)$

7. Transcreva estas proposições para o português, em que $C(x)$ é "x é um comediante" e $F(x)$ é "x é divertido" e o domínio são todas as pessoas.

a) $\forall x(C(x) \to F(x))$ **b)** $\forall x(C(x) \wedge F(x))$
c) $\exists x(C(x) \to F(x))$ **d)** $\exists x(C(x) \wedge F(x))$

8. Transcreva estas proposições para o português, em que $R(x)$ é "x é um coelho" e $H(x)$ é "x salta" e o domínio são todos os animais.

a) $\forall x(R(x) \to H(x))$ **b)** $\forall x(R(x) \wedge H(x))$
c) $\exists x(R(x) \to H(x))$ **d)** $\exists x(R(x) \wedge H(x))$

9. Considere $P(x)$ como a proposição "x fala russo" e considere $Q(x)$ como a proposição "x sabe a linguagem computacional C++". Expresse cada uma dessas sentenças em termos de $P(x)$, $Q(x)$, quantificadores e conectivos lógicos. O domínio para quantificadores são todos os estudantes de sua escola.

a) Há um estudante em sua escola que fala russo e sabe C++.
b) Há um estudante em sua escola que fala russo, mas não sabe C++.
c) Todo estudante em sua escola ou fala russo ou sabe C++.
d) Nenhum estudante em sua escola fala russo ou sabe C++.

10. Considere $C(x)$ como a proposição "x tem um gato", $D(x)$ como "x tem um cachorro" e $F(x)$ como "x tem um furão". Expresse cada uma dessas proposições em termos de $C(x)$, $D(x)$, $F(x)$, quantificadores e conectivos lógicos. O domínio são todos os estudantes de sua sala.

a) Um estudante de sua sala tem um gato, um cachorro e um furão.
b) Todos os estudantes de sua sala têm um gato, um cachorro ou um furão.
c) Algum estudante de sua sala tem um gato e um furão, mas não tem um cachorro.
d) Nenhum estudante de sua sala tem um gato, um cachorro e um furão.
e) Para cada um desses três animais, gatos, cachorros e furões, há um estudante em sua sala que possui um dos três como animal de estimação.

11. Considere $P(x)$ como a proposição "$x = x^2$". Se o domínio forem os números inteiros, quais serão os valores-verdade?

a) $P(0)$ **b)** $P(1)$ **c)** $P(2)$
d) $P(-1)$ **e)** $\exists x P(x)$ **f)** $\forall x P(x)$

12. Considere $Q(x)$ como a proposição "$x + 1 > 2x$". Se o domínio forem todos os números inteiros, quais serão os valores- verdade?

a) $Q(0)$ **b)** $Q(-1)$ **c)** $Q(1)$
d) $\exists x Q(x)$ **e)** $\forall x Q(x)$ **f)** $\exists x \neg Q(x)$
g) $\forall x \neg Q(x)$

13. Determine o valor-verdade de cada uma destas proposições, se o domínio forem todos os números inteiros.

a) $\forall n(n + 1 > n)$ **b)** $\exists n(2n = 3n)$
c) $\exists n(n = -n)$ **d)** $\forall n(n^2 \geq n)$

14. Determine o valor-verdade de cada uma destas proposições, se o domínio forem todos os números reais.

a) $\exists x(x^3 = -1)$ **b)** $\exists x(x^4 < x^2)$
c) $\forall x((-x)^2 = x^2)$ **d)** $\forall x(2x > x)$

15. Determine o valor-verdade de cada uma destas proposições, se o domínio para todas as variáveis forem todos os números inteiros.

a) $\forall n(n^2 \geq 0)$ **b)** $\exists n(n^2 = 2)$
c) $\forall n(n^2 \geq n)$ **d)** $\exists n(n^2 < 0)$

16. Determine o valor-verdade de cada uma destas proposições, se o domínio de cada variável forem todos os números reais.

a) $\exists x(x^2 = 2)$ **b)** $\exists x(x^2 = -1)$
c) $\forall x(x^2 + 2 \geq 1)$ **d)** $\forall x(x^2 \neq x)$

17. Suponha que o domínio da função proposicional $P(x)$ sejam os números inteiros 0, 1, 2, 3 e 4. Desenvolva estas proposições usando disjunções, conjunções e negações.

a) $\exists x\, P(x)$ **b)** $\forall x\, P(x)$ **c)** $\exists x\, \neg P(x)$
d) $\forall x\, \neg P(x)$ **e)** $\neg\exists x\, P(x)$ **f)** $\neg\forall x\, P(x)$

18. Suponha que o domínio da função proposicional $P(x)$ sejam os números inteiros $-2, -1, 0, 1$ e 2. Desenvolva estas proposições usando disjunções, conjunções e negações.

a) $\exists x\, P(x)$ **b)** $\forall x\, P(x)$ **c)** $\exists x\, \neg P(x)$
d) $\forall x\, \neg P(x)$ **e)** $\neg\exists x\, P(x)$ **f)** $\neg\forall x\, P(x)$

19. Suponha que o domínio da função proposicional $P(x)$ sejam os números inteiros 1, 2, 3, 4 e 5. Expresse estas proposições sem usar quantificadores, mas, sim, apenas negações, disjunções e conjunções.

a) $\exists x\, P(x)$ **b)** $\forall x\, P(x)$
c) $\neg\exists x\, P(x)$ **d)** $\neg\forall x\, P(x)$
e) $\forall x\, ((x \neq 3) \to P(x)) \vee \exists x\, \neg P(x)$

20. Suponha que o domínio da função proposicional $P(x)$ sejam $-5, -3, -1, 1, 3$ e 5. Expresse estas proposições sem usar quantificadores, mas, sim, apenas negações, disjunções e conjunções.

a) $\exists x\, P(x)$ **b)** $\forall x\, P(x)$
c) $\forall x((x \neq 1) \to P(x))$
d) $\exists x((x \geq 0) \wedge P(x))$
e) $\exists x\, (\neg P(x)) \wedge \forall x((x < 0) \to P(x))$

21. Para cada uma destas proposições, encontre um domínio para que a proposição seja verdadeira e um domínio para que a proposição seja falsa.

a) Todos estão estudando matemática discreta.
b) Todos têm mais de 21 anos.
c) Duas pessoas têm a mesma mãe.
d) Nem todo par de pessoas diferentes tem a mesma avó.

22. Para cada uma destas proposições, encontre um domínio para que a proposição seja verdadeira e um domínio para que a proposição seja falsa.

a) Todos falam hindu.
b) Há alguém com mais de 21 anos.

c) Cada duas pessoas têm o mesmo nome.

d) Alguém sabe mais que duas outras pessoas.

23. Transcreva de duas formas cada uma das proposições em expressões lógicas usando predicados, quantificadores e conectivos lógicos. Primeiro, o domínio são os estudantes em sua sala, e, segundo, considere-o como todas as pessoas.

a) Alguém em sua sala fala hindu.

b) Todos em sua sala são amigáveis.

c) Há uma pessoa em sua sala que não nasceu na Califórnia.

d) Um estudante de sua sala participou de um filme.

e) Nenhum estudante de sua sala teve um curso de programação lógica.

24. Transcreva de duas formas cada uma das proposições em expressões lógicas usando predicados, quantificadores e conectivos lógicos. Primeiro, o domínio são os estudantes em sua sala, e, segundo, considere-o como todas as pessoas.

a) Todos em sua sala têm um celular.

b) Alguém em sua sala viu um filme estrangeiro.

c) Há uma pessoa em sua sala que não sabe nadar.

d) Todos os estudantes em sua sala sabem resolver equações quadráticas.

e) Algum estudante de sua sala não quer ficar rico.

25. Transcreva cada uma das proposições em expressões lógicas usando predicados, quantificadores e conectivos lógicos.

a) Ninguém é perfeito.

b) Nem todos são perfeitos.

c) Todos os seus amigos são perfeitos.

d) Pelo menos um de seus amigos é perfeito.

e) Todos são seus amigos e são perfeitos.

f) Nem todos são seus amigos ou alguém não é perfeito.

26. Transcreva cada uma das proposições abaixo em expressões lógicas de três maneiras diferentes, variando o domínio e usando predicados com uma ou duas variáveis.

a) Alguém em sua escola visitou o Uzbequistão.

b) Todos em sua sala estudaram cálculo e C++.

c) Ninguém em sua escola tem uma bicicleta e uma moto.

d) Há uma pessoa em sua escola que não é feliz.

e) Todos em sua escola nasceram no século XX.

27. Transcreva cada uma das proposições abaixo em expressões lógicas de três maneiras diferentes, variando o domínio e usando predicados com uma ou duas variáveis.

a) Um estudante em sua escola morou no Vietnã.

b) Há um estudante em sua escola que não fala hindu.

c) Um estudante em sua escola conhece Java, Prolog e C++.

d) Todos em sua sala gostam de comida tailandesa.

e) Alguém em sua sala não joga hóquei.

28. Transcreva as proposições a seguir em expressões lógicas, usando predicados, quantificadores e conectivos lógicos.

a) Alguma coisa não está no lugar certo.

b) Todos os instrumentos estão no lugar certo e em excelentes condições.

c) Tudo está no lugar certo e em excelente condição.

d) Nada está no lugar certo e em excelente condição.

e) Um de seus instrumentos não está no lugar correto, mas está em excelente condição.

29. Expresse cada uma das proposições abaixo usando operadores lógicos, predicados e quantificadores.

a) Algumas proposições são tautologias.

b) A negação de uma contradição é uma tautologia.

c) A disjunção de duas contingências pode ser uma tautologia.

d) A conjunção de duas tautologias é uma tautologia.

30. Suponha que o domínio de uma função proposicional $P(x, y)$ sejam pares de x e y, em que x é 1, 2 ou 3 e y é 1, 2 ou 3. Desenvolva as proposições abaixo usando disjunções e conjunções.

a) $\exists x\, P(x, 3)$ **b)** $\forall y\, P(1, y)$

c) $\exists y\, \neg P(2, y)$ **d)** $\forall x\, \neg P(x, 2)$

31. Suponha que o domínio de $Q(x, y, z)$ sejam as três variáveis x, y, z, em que $x = 0$, 1 ou 2, $y = 0$ ou 1 e $z = 0$ ou 1. Desenvolva as proposições abaixo usando disjunções e conjunções.

a) $\forall y\, Q(0, y, 0)$ **b)** $\exists x\, Q(x, 1, 1)$

c) $\exists z\, \neg Q(0, 0, z)$ **d)** $\exists x\, \neg Q(x, 0, 1)$

32. Expresse cada uma das proposições abaixo usando quantificadores. Depois, forme a negação da proposição; nenhuma negação pode ficar do lado esquerdo de um quantificador. Em seguida, expresse a negação em português. (Não use simplesmente as palavras "Não é o caso de".)

a) Todos os cães têm pulgas.

b) Há um cavalo que trota.

c) Todo coala sabe escalar.

d) Nenhum macaco fala francês.

e) Lá existe um porco que nada e caça peixes.

33. Expresse cada uma das proposições abaixo usando quantificadores. Depois, forme a negação da proposição; nenhuma negação pode ficar do lado esquerdo de um quantificador. Em seguida, expresse a negação em português. (Não use simplesmente as palavras "Não é o caso de".)

a) Alguns cães velhos aprendem truques novos.

b) Nenhum coelho sabe cálculo.

c) Todo pássaro pode voar.

d) Não há cães que falem.

e) Não há nesta sala alguém que fale francês e russo.

34. Expresse a negação das proposições abaixo usando quantificadores e depois expresse a negação em português.

a) Alguns motoristas não obedecem aos limites de velocidade.

b) Todos os filmes suíços são sérios.

c) Ninguém pode guardar um segredo.

d) Há alguém nesta sala que não tem uma boa atitude.

35. Encontre um contra-exemplo, se possível, para estas proposições quantificadas universalmente, em que o domínio para todas as variáveis são todos os números inteiros.

a) $\forall x (x^2 \geq x)$

b) $\forall x (x > 0 \vee x < 0)$

c) $\forall x (x = 1)$

36. Encontre um contra-exemplo, se possível, para estas proposições quantificadas universalmente, em que o domínio para todas as variáveis são todos os números reais.

a) $\forall x (x^2 \neq x)$ **b)** $\forall x (x^2 \neq 2)$

c) $\forall x (|x| > 0)$

37. Expresse cada uma das proposições abaixo usando predicados e quantificadores.

a) Um passageiro em uma companhia aérea é qualificado como um viajante de elite se voar mais de 25.000 milhas em um ano ou pegar mais de 25 vôos durante o ano.

b) Um homem se classifica para a maratona se seu melhor tempo for menor que 3 horas, e uma mulher, se seu melhor tempo for menor que 3,5 horas.

c) Um estudante deve freqüentar no mínimo 60 horas/aula, ou pelo menos 45 horas/aula e escrever uma tese, e ter, em todas as disciplinas, conceito não menor que B para receber o título de mestre.

d) Há um estudante que cursou mais de 21 créditos em um semestre e recebeu apenas conceitos A.

Os exercícios 38 a 42 lidam com a transcrição entre sistema de especificação e expressões lógicas que envolvem quantificadores.

38. Transcreva os sistemas de especificações abaixo para o português, em que o predicado $S(x, y)$ é "x está em estado y" e o domínio para x *e* y são todos os sistemas e todos os estados possíveis, respectivamente.

a) $\exists x\, S(x,$ aberto$)$

b) $\forall x\, (S(x,$ em mau funcionamento$) \vee S(x,$ diagnóstico$))$

c) $\exists x\, S(x,$ aberto$) \vee \exists x\, S(x,$ diagnóstico$)$

d) $\exists x\, \neg S(x,$ disponível$)$

e) $\forall x\, \neg S(x,$ em funcionamento$)$

39. Transcreva as especificações abaixo para o português, em que $F(p)$ é "A impressora p está quebrada", $B(p)$ é "A impressora p está ocupada", $L(j)$ é "A impressão do trabalho j foi perdida" e $Q(j)$ é "A impressão do trabalho j foi adicionada à fila".

a) $\exists p (F(p) \wedge B(p)) \rightarrow \exists j L(j)$

b) $\forall p B(p) \rightarrow \exists j Q(j)$

c) $\exists j (Q(j) \wedge L(j)) \rightarrow \exists p F(p)$

d) $(\forall p B(p) \wedge \forall j Q(j)) \rightarrow \exists j L(j)$

40. Expresse cada um dos sistemas de especificações a seguir, usando predicados, quantificadores e conectivos lógicos.

a) Quando há menos de 30 megabytes livres no disco rígido, um aviso é enviado a todos os usuários.

b) Nenhum diretório no sistema de arquivos pode ser aberto e nenhum arquivo pode ser fechado se forem detectados erros no sistema.

c) O sistema de arquivos não pode ser recuperado se houver um usuário conectado.

d) Vídeos para downloads podem ser baixados se houver pelo menos 8 megabytes de memória disponíveis e a velocidade de conexão for, no mínimo, de 56 kilobits por segundo.

41. Expresse cada um dos sistemas de especificações abaixo, usando predicados, quantificadores e conectivos lógicos.

a) Pelo menos um e-mail, entre o conjunto total de mensagens, pode ser salvo se o disco estiver com mais de 10 kilobytes de espaço livre.

b) Sempre que o alerta estiver ativado, todas as mensagens na fila serão transmitidas.

c) A tela de diagnóstico rastreia o *status* de todos os sistemas, exceto do console principal.

d) Cada participante da videoconferência que o anfitrião da chamada não pôs em uma lista especial receberá uma conta.

42. Expresse cada um dos sistemas de especificações abaixo, usando predicados, quantificadores e conectivos lógicos.

a) Todo usuário tem acesso a uma caixa de entrada.

b) O sistema de caixa de entrada pode ser acessado por qualquer pessoa no grupo se o sistema for travado.

c) O firewall está em estado de diagnóstico apenas se o servidor de proxy estiver em estado de diagnóstico.

d) Pelo menos um roteador funcionará normalmente se a entrada for entre 100 kbps e 500 kbps e o servidor de proxy não estiver em modo de diagnóstico.

43. Determine se $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ e $\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)$ são logicamente equivalentes. Justifique sua resposta.

44. Determine se $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x))$ e $\forall x\, P(x) \leftrightarrow \forall x\, Q(x)$ são logicamente equivalentes. Justifique sua resposta.

45. Mostre que $\exists x\, (P(x) \vee Q(x))$ e $\exists x\, (P(x) \vee \exists x Q(x))$ são logicamente equivalentes.

Os exercícios 46 a 49 estabelecem regras para a **quantificação nula** que pode ser usada quando uma variável quantificadora não aparece em parte de uma proposição.

46. Estabeleça as equivalências lógicas abaixo, em que x não aparece como variável livre em A. Assuma que o domínio não é vazio.

a) $(\forall x\, P(x)) \vee A \equiv \forall x (P(x) \vee A)$

b) $(\exists x\, P(x)) \vee A \equiv \exists x (P(x) \vee A)$

47. Estabeleça as equivalências lógicas abaixo, em que x não aparece como variável livre em A. Assuma que o domínio não é vazio.

a) $(\forall x\, P(x)) \wedge A \equiv \forall x (P(x) \wedge A)$

b) $(\exists x\, P(x)) \wedge A \equiv \exists x (P(x) \wedge A)$

48. Estabeleça as equivalências lógicas abaixo, em que x não aparece como uma variável livre em A. Assuma que o domínio não é vazio.

a) $\forall x\, (A \rightarrow P(x)) \equiv A \rightarrow \forall x\, P(x)$

b) $\exists x\, (A \rightarrow P(x)) \equiv A \rightarrow \exists x\, P(x)$

49. Estabeleça as equivalências lógicas abaixo, em que x não aparece como variável livre em A. Assuma que o domínio não é vazio.

a) $\forall x\, (P(x) \rightarrow A) \equiv \exists x\, P(x) \rightarrow A$

b) $\exists x\, (P(x) \rightarrow A) \equiv \forall x\, P(x) \rightarrow A$

50. Mostre que $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$ e $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ não são logicamente equivalentes.

51. Mostre que $\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$ e $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$ não são logicamente equivalentes.

52. Como mencionado no texto, a notação $\exists! x\, P(x)$ refere-se a

"Existe um único x para que $P(x)$ seja verdadeira."

Se o domínio forem todos os números inteiros, quais serão os valores-verdade das proposições abaixo?

a) $\exists! x\,(x > 1)$ **b)** $\exists! x\,(x^2 = 1)$

c) $\exists! x(x + 3 = 2x)$ **d)** $\exists! x(x = x + 1)$

53. Quais são os valores-verdade das proposições abaixo?

a) $\exists! x\, P(x) \rightarrow \exists x\, P(x)$

b) $\forall x\, P(x) \rightarrow \exists! x\, P(x)$

c) $\exists! x\, \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x\, P(x)$

54. Desenvolva $\exists! x P(x)$, em que o domínio são os números inteiros 1, 2 e 3, em termos de negação, conjunção e disjunção.

55. Dados os fatos de Prolog no Exemplo 28, qual seria o retorno de Prolog dado nestas perguntas?

a) `?instructor(chan,math273)`

b) `?instructor(patel,cs301)`

c) `?enrolled(X,cs301)`

d) `?enrolled(kiko,Y)`

e) `?teaches(grossman,Y)`

56. Dados os fatos de Prolog no Exemplo 28, qual seria o retorno de Prolog dado nestas perguntas?

a) `?enrolled(kevin,ee222)`

b) `?enrolled(kiko,math273)`

c) `?instructor(grossman,X)`

d) `?instructor(X,cs301)`

e) `?teaches(X,kevin)`

57. Suponha que os fatos de Prolog sejam usados para definir os predicados *mãe*(*M, Y*) e *pai*(*F, X*), em que *M* representa a mãe de *Y* e *F* é o pai de *X*, respectivamente. Dê uma regra de Prolog para definir o predicado *irmão*(*X, Y*), em que *X* e *Y* são irmãos (ou seja, têm o mesmo pai e a mesma mãe).

58. Suponha que os fatos de Prolog sejam usados para definir os predicados *mãe*(*M, Y*) e *pai*(*F, X*), em que *M* representa a mãe de *Y* e *F* é o pai de *X*, respectivamente. Dê uma regra de Prolog para definir o predicado *avô*(*X, Y*), que representa que *X* é o avô de *Y*. [*Dica:* Você pode desenvolver a disjunção no Prolog ou usando um ponto-e-vírgula para separar predicados ou pondo esses predicados em linhas separadas.]

Os exercícios 59 a 62 têm como base questões encontradas no livro *Lógica Simbólica,* de Lewis Carroll.

59. Considere $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ como as proposições "x é um professor", "x é ignorante" e "x é vão", respectivamente. Expresse cada uma das proposições usando quantificadores, conectivos lógicos e $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$, em que o domínio são todas as pessoas.

a) Nenhum professor é ignorante.

b) Todas as pessoas ignorantes são vãs.

c) Nenhum professor é vão.

d) O item (c) resulta de (a) e (b)?

60. Considere $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ como as proposições "x é uma explicação clara", "x é satisfatório" e "x é uma desculpa", respectivamente. Suponha que o domínio de x seja todo o texto em português. Expresse cada uma das proposições abaixo usando quantificadores, conectivos lógicos e $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$.

a) Todas as explicações claras são satisfatórias.

b) Todas as desculpas não são satisfatórias.

c) Algumas desculpas não são explicações claras.

***d)** O item (c) resulta de (a) e (b)?

61. Considere $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ e $S(x)$ como as proposições "x é um bebê", "x é lógico", "x é capaz de controlar um crocodilo" e "x é desprezível", respectivamente. Suponha que o domínio sejam todas as pessoas. Expresse cada uma das proposições abaixo usando quantificadores, conectivos lógicos e $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ e $S(x)$.

a) Bebês não são lógicos.

b) Ninguém é desprezível se pode controlar um crocodilo.

c) Pessoas que não são lógicas são desprezíveis.

d) Bebês não podem controlar crocodilos.

***e)** O item (d) resulta de (a), (b) e (c)? Se não, existe alguma conclusão correta?

62. Considere $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ e $S(x)$ como as proposições "x é um pato", "x é uma das minhas aves", "x é um oficial" e "x está valsando", respectivamente. Expresse cada uma das proposições abaixo usando quantificadores, conectivos lógicos e $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ e $S(x)$.

a) Nenhum pato está valsando.

b) Nenhum oficial nunca recusa uma valsa.

c) Todas as minhas aves são patos.

d) Minhas aves não são oficiais.

***e)** O item (d) resulta de (a), (b) e (c)? Se não, há uma conclusão correta?

1.4 Quantificadores Agrupados

Introdução

Na Seção 1.3, definimos os quantificadores existencial e universal e mostramos como podem ser usados em sentenças matemáticas. Também explicamos como podem ser usados para traduzir sentenças do português para expressões lógicas. Nesta seção, vamos estudar **quantificadores agrupados**. Dois quantificadores são agrupados se um está no escopo do outro, tal como

$$\forall x \, \exists y (x + y = 0).$$

Note que tudo que está no escopo de um quantificador pode ser considerado uma função proposicional. Por exemplo,

$$\forall x \, \exists y (x + y = 0)$$

é o mesmo que $\forall x \, Q(x)$, em que $Q(x)$ é $\exists y \, P(x, y)$ e $P(x, y)$ é $x + y = 0$. Quantificadores agrupados sempre ocorrem em matemática e ciência da computação. No entanto, quantificadores agrupados podem ser, às vezes, difíceis de entender; as regras que estudamos na Seção 1.3 podem nos ajudar.

Para entender essas sentenças que envolvem muitos quantificadores, precisamos esclarecer o que significa cada predicado e cada quantificador que aparece. Isso é ilustrado nos exemplos 1 e 2.

EXEMPLO 1 Assuma que o domínio para as variáveis x e y consiste em todos os números reais. A sentença

$$\forall x \, \forall y (x + y = y + x)$$

Exemplos Extras

diz que $x + y = y + x$ para todos os números reais x e y. Essa é a propriedade comutativa para números reais. De maneira análoga, a sentença

$$\forall x \, \exists y (x + y = 0)$$

diz que para cada (para todo) número real x existe um número real y, tal que $x + y = 0$. Essa sentença diz que todo número real tem um inverso aditivo (o oposto). Similarmente, a sentença

$$\forall x \, \forall y \, \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z)$$

é a propriedade associativa da adição para números reais. ◄

EXEMPLO 2 Traduza para o português a sentença

$$\forall x \, \forall y ((x > 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (xy < 0)),$$

em que o domínio para ambas as variáveis são números reais.

Solução: Essa sentença diz que para todo número real x e para todo número real y, se $x > 0$ e $y < 0$, então $xy < 0$. Ou, ainda, para números reais x e y, se x é positivo e y é negativo, então xy é negativo. Isso pode ser descrito mais sucintamente por "O produto de um número positivo por um número negativo é sempre negativo". ◄

PENSANDO EM QUANTIFICAÇÕES COMO LAÇOS Trabalhar com quantificações de mais de uma variável às vezes facilita o fato de pensarmos em termos de laços agrupados. (É claro que, se existirem infinitos elementos no domínio de alguma variável, não podemos dar uma volta por todos os valores. No entanto, essa maneira de pensar pode nos ajudar a entender quantificadores agrupados.) Por exemplo, para ver se $\forall x \forall y \, P(x, y)$ é verdadeira, podemos dar uma passada por todos os valores de x, e para cada valor de x, passamos por todos os valores de y. Se encontrarmos $P(x, y)$ verdadeira para todos os valores de x e y, teremos determinado que $\forall x \forall y \, P(x, y)$ é verdadeira. Se chegarmos a algum valor de x para o qual encontramos algum valor de y, tal que $P(x, y)$ seja falsa, teremos mostrado que $\forall x \forall y \, P(x, y)$ é falsa.

Similarmente, para determinar quando $\forall x \, \exists y \, P(x, y)$ é verdadeira, damos uma volta por todos os valores de x. Para cada valor de x, damos uma volta sobre os valores de y até achar um valor para o qual $P(x, y)$ é verdadeira. Se para todo valor de x encontrarmos um y, então $\forall x \exists y P(x, y)$ é verdadeira; se para algum x nunca encontrarmos um valor de y, então $\forall x \exists y P(x, y)$ é falsa.

Para ver se $\exists x \forall y P(x, y)$ é verdadeira, podemos dar uma volta pelos valores de x até encontrarmos um valor de x para o qual $P(x, y)$ é sempre verdadeira quando damos uma volta pelos valores de y. Se encontrarmos tal x, saberemos que $\exists x \forall y P(x, y)$ é verdadeira. Se não encontrarmos tal x, concluiremos que $\exists x \forall y P(x, y)$ é falsa.

Finalmente, para ver se $\exists x \exists y P(x, y)$ é verdadeira, damos uma volta pelos valores de x, em que para cada x damos uma volta pelos valores de y até encontrarmos um x para o qual existe um y, tal que $P(x, y)$ seja verdadeira. A sentença $\exists x \exists y P(x, y)$ será falsa somente se não encontrarmos um x para o qual encontramos algum y tal que $P(x, y)$ seja verdadeira.

A Ordem dos Quantificadores

Muitas sentenças matemáticas envolvem múltiplas quantificações de funções proposicionais com mais de uma variável. É importante notar que a ordem dos quantificadores precisa ser considerada, a menos que os quantificadores não sejam todos universais ou todos existenciais.

Essa observação é ilustrada pelos exemplos 3 a 5.

EXEMPLO 3 Seja $P(x, y)$ a sentença "$x + y = y + x$". Quais os valores-verdade das quantificações $\forall x \forall y P(x, y)$ e $\forall y \forall x P(x, y)$, em que o domínio para as variáveis consiste em todos os números reais?

Exemplos Extras

Solução: A quantificação

$$\forall x \forall y P(x, y)$$

indica a proposição

"Para todo número real x, para todo número real y, $x + y = y + x$."

Como $P(x, y)$ é verdadeira para todos os números reais x e y (esta é a propriedade comutativa para a adição, que é um axioma para todos os números reais — veja o Apêndice 1), a proposição $\forall x \forall y P(x, y)$ é verdadeira. Note que a sentença $\forall y \forall x P(x, y)$ diz "Para todo número real y, para todo número real x, $x + y = y + x$". Isto tem o mesmo significado que a sentença "Para todo número real x, para todo número real y, $x + y = y + x$". Ou seja, $\forall x \forall y P(x, y)$ e $\forall y \forall x P(x, y)$ têm o mesmo significado, e são ambas verdadeiras. Isso ilustra o princípio que diz que a ordem dos quantificadores universais em uma sentença sem outros quantificadores pode ser mudada sem alterar o significado da sentença quantificada. ◀

EXEMPLO 4 Seja $Q(x, y)$ a sentença "$x + y = 0$". Quais os valores-verdade das quantificações $\exists y \forall x Q(x, y)$ e $\forall x \exists y Q(x, y)$, em que o domínio para as variáveis consiste em todos os números reais?

Solução: A quantificação

$$\exists y \forall x Q(x,y)$$

indica a proposição

"Existe um número real y para todo número real x, $Q(x, y)$."

Qualquer que seja o valor de y escolhido, existe um valor x para o qual $x + y = 0$. Como não existe número real y tal que $x + y = 0$ para todo número real x, a sentença $\exists y \forall x Q(x, y)$ é falsa.

TABELA 1 Quantificações de Duas Variáveis.

Sentença	***Quando é verdadeira?***	***Quando é falsa?***
$\forall x \forall y P(x, y)$ $\forall y \forall x P(x, y)$	$P(x, y)$ é verdadeira para todo par x, y.	Existe um par x, y para o qual $P(x, y)$ é falsa.
$\forall x \exists y P(x, y)$	Para todo x existe um y para o qual $P(x, y)$ é verdadeira.	Existe um x tal que $P(x, y)$ é falsa para todo y.
$\exists x \forall y P(x, y)$	Existe um x tal que $P(x, y)$ é verdadeira para todo y.	Para todo x existe um y para o qual $P(x, y)$ é falsa.
$\exists x \exists y P(x, y)$ $\exists y \exists x P(x, y)$	Existe um par x, y para o qual $P(x, y)$ é verdadeira.	$P(x, y)$ é falsa para todo par x, y.

A quantificação

$$\forall x \exists y Q(x, y)$$

indica a proposição

"Para todo número real x existe um número real y tal que $Q(x, y)$."

Dado um número real x, existe um número real y tal que $x + y = 0$; isto é, $y = -x$. Portanto, $\forall x \exists y Q(x, y)$ é verdadeira. ◀

O Exemplo 4 ilustra que a ordem em que aparecem os quantificadores faz muita diferença. As sentenças $\exists y \forall x Q(x, y)$ e $\forall x \exists y Q(x, y)$ não são logicamente equivalentes. A sentença $\exists y \forall x Q(x, y)$ é verdadeira se e somente se existe um y que faz com que $Q(x, y)$ seja verdadeira para todo x. Portanto, para essa sentença ser verdadeira, deve existir um valor particular de y para o qual $Q(x, y)$ é verdadeira independentemente da escolha de x. Por outro lado, $\forall x \exists y Q(x, y)$ é verdadeira se para todo x existe um número y para o qual $Q(x, y)$ é verdadeira. Portanto, para essa sentença ser verdadeira, qualquer que seja o valor de x que você escolha, deve existir um valor de y (possivelmente dependente do valor de x escolhido) para o qual $Q(x, y)$ é verdadeira. Em outras palavras, no segundo caso, y pode depender de x, enquanto, no primeiro caso, y é uma constante independente de x.

Dessas observações, segue-se que $\exists y \forall x Q(x, y)$ é verdadeira, então $\forall x \exists y Q(x, y)$ deve ser verdadeira. No entanto, se $\forall x \exists y Q(x, y)$ é verdadeira, não necessariamente $\exists y \forall x Q(x, y)$ deve ser verdadeira. (Veja os exercícios suplementares 24 e 25 no final deste capítulo.)

A Tabela 1 resume o significado das possíveis quantificações diferentes que envolvem duas variáveis.

Quantificações com mais de duas variáveis também são comuns, como ilustra o Exemplo 5.

EXEMPLO 5 Seja $Q(x, y, z)$ a sentença "$x + y = z$". Quais os valores-verdade das sentenças $\forall x \forall y \exists z Q(x, y, z)$ e $\exists z \forall x \forall y Q(x, y, z)$, em que o domínio consiste em todos os números reais?

Solução: Suponha que x e y sejam valores determinados. Então, existe um número real z tal que $x + y = z$. Conseqüentemente, a quantificação

$$\forall x \forall y \exists z Q(x, y, z),$$

que é a sentença

"Para todo número real x e para todo número real y existe z tal que $x + y = z$",

é verdadeira. A ordem da quantificação aqui é importante, pois a quantificação

$$\exists z \forall x \forall y\, Q(x, y, z),$$

que é a sentença

"Existe z tal que para todo x e para todo y é verdade que $x + y = z$",

é falsa, pois não há nenhum valor de z que satisfaça a equação para quaisquer valores de x e y. ◄

Traduzindo Sentenças Matemáticas para Sentenças que Envolvem Quantificadores Agrupados

Sentenças matemáticas expressas em português podem ser traduzidas para expressões lógicas, como nos mostram os exemplos 6 a 8.

EXEMPLO 6 Traduza para uma expressão lógica a sentença "A soma de dois números inteiros positivos é sempre positiva".

Solução: Para traduzir essa sentença para uma expressão lógica, vamos primeiro reescrevê-la até que os quantificadores e o domínio sejam mostrados: "Para todo par de inteiros, se os dois são positivos, então a soma será um inteiro positivo". Conseqüentemente, podemos expressar essa sentença como

Exemplos Extras

$$\forall x \forall y((x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow (x + y > 0)),$$

em que o domínio para ambas as variáveis são os números inteiros. Note que podemos traduzir essa sentença usando como domínio o conjunto dos inteiros positivos. Então, a sentença "A soma de dois números inteiros positivos é sempre positiva" fica "Para todo par de inteiros positivos, sua soma é positiva". Podemos expressá-la por

$$\forall x \forall y(x + y > 0),$$

em que o domínio consiste em todos os inteiros positivos. ◄

EXEMPLO 7 Traduza para uma expressão lógica a sentença "Todo número real diferente de zero tem um inverso multiplicativo". (Um **inverso multiplicativo** de um número real x é o número real y tal que $xy = 1$.)

Solução: Primeiro, reescrevemos como "Para todo real x diferente de zero, x tem inverso multiplicativo". Podemos, ainda, reescrever como "Para todo número real x, se $x \neq 0$, então existe um y real, tal que $xy = 1$". E pode ser traduzida como

$$\forall x((x \neq 0) \rightarrow \exists y(xy = 1)).$$ ◄

Um exemplo com o qual você deve estar familiarizado é o conceito de limite, que é importante em cálculo.

EXEMPLO 8 (*Requer cálculo*) Expresse a definição de limite usando quantificadores.

Solução: Lembremos a definição de limite

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

é: para todo real $\epsilon > 0$ existe um número real $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ toda vez que $0 < |x - a| < \delta$. Essa definição de limite pode ser expressa em termos de quantificadores por

$$\forall \epsilon \; \exists \; \delta \; \forall x (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon),$$

em que o domínio das variáveis δ e ϵ consiste em todos os reais, e, para x, o domínio são todos os reais.

Essa definição também pode ser expressa por

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)$$

quando o domínio das variáveis ϵ e δ consiste em todos os reais, em vez de apenas os números reais positivos. [Aqui, quantificadores restritos devem ser utilizados. Lembre que $\forall x > 0 \; P(x)$ significa que para todo x com $x > 0$, $P(x)$ é verdadeira.] ◀

Traduzindo Quantificadores Agrupados para o Português

Pode ser complicado traduzir expressões com quantificadores agrupados para sentenças em português (ou qualquer outra língua). O primeiro passo na tradução é escrever por extenso o que os quantificadores e predicados da expressão significam. O próximo passo é expressar esse significado em uma sentença o mais simples possível. Esse processo é ilustrado nos exemplos 9 e 10.

EXEMPLO 9 Traduza a sentença

$$\forall x (C(x) \vee \exists y (C(y) \wedge F(x, y)))$$

para o português, em que $C(x)$ é "x tem um computador", $F(x, y)$ é "x e y são amigos" e o domínio para ambas as variáveis são os estudantes da sua escola.

Solução: A sentença diz que para todo estudante x de sua escola, x tem um computador ou existe um estudante y tal que y tem um computador e x e y são amigos. Em outras palavras, todo estudante da sua escola tem um computador ou tem um amigo que tem um computador. ◀

EXEMPLO 10 Traduza a sentença

$$\exists x \forall y \forall z ((F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \neg (F(y, z))$$

para o português, em que $F(x, y)$ é "x e y são amigos" e o domínio para as variáveis x, y e z são todos os estudantes da sua escola.

Solução: Primeiro examinemos a expressão $(F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \neg F(y, z)$. Ela diz que se os estudantes x e y são amigos e os estudantes x e z são amigos e, ainda mais, se y e z não são o mesmo estudante, então y e z não são amigos. Daqui segue que a sentença original, que é triplamente quantificada, diz que existe um estudante x tal que para todo estudante y e para todo estudante z diferente de y, se x e y são amigos e x e z são amigos, então y e z não são amigos. Em outras palavras, existe um estudante, tal que nenhum par de amigos seus é também um par de amigos entre si. ◀

Traduzindo Sentenças do Português para Expressões Lógicas

Na Seção 1.3 mostramos como quantificadores podem ser utilizados para traduzir sentenças para expressões lógicas. Contudo, queremos analisar sentenças tal que suas traduções para expressões lógicas requeiram o uso de quantificadores agrupados. Vamos agora trabalhar com traduções dessas sentenças.

EXEMPLO 11 Expresse a sentença "Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ela é mãe de alguém" como uma expressão lógica que envolve predicados, quantificadores com domínio que consiste em todas as pessoas e conectivos lógicos.

Solução: A sentença "Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ela é mãe de alguém" pode ser reescrita por "Para toda pessoa x, se x é do sexo feminino e x tem filhos, então existe uma pessoa y tal que x é mãe de y". Introduziremos a função proposicional $F(x)$ para representar "x é do sexo feminino", $P(x)$ para representar "x tem filhos" e $M(x, y)$ para representar "x é mãe de y". Então a sentença original pode ser escrita por

$$\forall x((F(x) \wedge P(x)) \rightarrow \exists y M(x, y)).$$

Usando a regra da quantificação nula na parte (b) do Exercício 47 da Seção 1.3, podemos mover $\exists y$ para a esquerda e esse quantificador aparecerá depois de $\forall x$, porque y não aparece em $F(x) \wedge P(x)$. Então obtemos a expressão logicamente equivalente

$$\forall x \exists \mathrm{y}((F(x) \wedge P(x)) \rightarrow M(x, y)).$$ ◀

EXEMPLO 12 Expresse a sentença "Todos têm exatamente um melhor amigo" como uma expressão lógica que envolve predicados, quantificadores com domínio que consiste em todas as pessoas e conectivos lógicos.

Solução: A sentença "Todos têm exatamente um melhor amigo" pode ser expressa por "Para toda pessoa x, x tem exatamente um melhor amigo". Introduzindo o quantificador universal, vemos que essa sentença é o mesmo que "$\forall x$ (x tem exatamente um melhor amigo)", em que o domínio consiste em todas as pessoas.

Dizer que x tem exatamente um melhor amigo é o mesmo que dizer que existe uma pessoa y que é o melhor amigo de x, e, mais ainda, que para toda pessoa z, se z não é y, então z não é o melhor amigo de x. Quando introduzimos o predicado $B(x, y)$ para representar "y é o melhor amigo de x", a sentença "x tem exatamente um melhor amigo" pode ser representada por

$$\exists y(B(x, y) \wedge \forall z((z \neq y) \rightarrow \neg B(x, z))).$$

Conseqüentemente, nossa sentença original pode ser expressa por

$$\forall x \exists y(B(x, y) \wedge \forall z((z \neq y) \rightarrow \neg B(x, z))).$$

[Note que poderíamos escrever esta sentença como $\forall x \exists! y B(x, y)$ em que $\exists!$ é o "quantificador de unicidade" definido na página 37.] ◀

EXEMPLO 13 Use quantificadores para expressar a sentença "Existe uma mulher que já tomou um avião em todas as linhas aéreas do mundo".

Solução: Sejam $P(w, f)$ o predicado "w tomou o avião f" e $Q(f, a)$ o predicado "f é um avião da linha a". Podemos expressar a sentença como

$$\exists w \forall a \exists f (P(w, f) \wedge Q(f, a)),$$

em que o domínio de discurso para w, f e a consiste em todas as mulheres do mundo, todos aviões e todas as linhas aéreas, respectivamente.

A sentença também pode ser expressa por

$$\exists w \forall a \exists f \; R(w, f, a),$$

em que $R(w, f, a)$ é "w tomou o avião f na linha a". Embora essa seja mais compacta, é um pouco obscura a relação entre as variáveis. Conseqüentemente, a primeira solução é preferível. ◀

Negando Quantificadores Agrupados

Auto-avaliação

Sentenças que envolvem quantificadores agrupados podem ser negadas por aplicações sucessivas das regras de negação de sentenças com um único quantificador. Isso é ilustrado nos exemplos 14 a 16.

EXEMPLO 14 Expresse a negação da sentença $\forall x \exists y (xy = 1)$ de tal forma que a negação não preceda algum quantificador.

Exemplos Extras

Solução: Por sucessivas aplicações das leis de De Morgan para quantificadores na Tabela 2 da Seção 1.3, podemos mover a negação em $\neg \forall x \exists y (xy = 1)$ para dentro de todos os quantificadores. Vemos que $\neg \forall x \exists y (xy = 1)$ é equivalente a $\exists x \neg \exists y (xy = 1)$, que é equivalente a $\exists x \forall y \neg (xy = 1)$. Como $\neg (xy = 1)$ pode ser expresso de maneira mais simples por $xy \neq 1$, concluímos que nossa sentença negada pode ser expressa como $\exists x \forall y (xy \neq 1)$. ◀

EXEMPLO 15 Use quantificadores para a sentença "Não existe uma mulher que já tenha tomado um avião em todas as linhas aéreas do mundo".

Solução: Essa sentença é a negação da sentença do Exemplo 13. De acordo com Exemplo 13, nossa sentença pode ser expressa por $\neg \exists w \forall a \exists f (P(w, f) \wedge Q(f, a))$, em que $P(w, f)$ é o predicado "w tomou o avião f" e $Q(f, a)$ é o predicado "f é um avião da linha a". Por sucessivas aplicações das leis de De Morgan para quantificadores na Tabela 2 da Seção 1.3, podemos mover a negação para dentro de todos os quantificadores e, por aplicação da lei de De Morgan para a conjunção no último passo, vemos que nossa sentença é equivalente a cada uma das outras desta seqüência de sentenças:

$$\begin{aligned}\forall w \neg \forall a \exists f (P(w, f) \wedge Q(f, a)) &\equiv \forall w \exists a \neg \exists f (P(w, f) \wedge Q(f, a)) \\ &\equiv \forall w \exists a \forall f \neg (P(w, f) \wedge Q(f, a)) \\ &\equiv \forall w \exists a \forall f (\neg P(w, f) \vee \neg Q(f, a)).\end{aligned}$$

Esta última sentença diz que "Para toda mulher existe uma linha aérea tal que, para todos os vôos, essa mulher não tomou esse vôo ou esse vôo não é dessa linha aérea". ◀

EXEMPLO 16 (*Requer cálculo*) Use quantificadores e predicados para expressar que $\lim_{x \to a} f(x)$ não existe.

Solução: Para dizer que $\lim_{x \to a} f(x)$ não existe, basta dizer que, para todo L, $\lim_{x \to a} f(x) \neq L$. Usando o Exemplo 8, a sentença $\lim_{x \to a} f(x) \neq L$ pode ser expressa por

$$\neg \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \; (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$

Por sucessivas aplicações das regras para negação de expressões quantificadas, construímos esta seqüência de sentenças equivalentes

$$\begin{aligned}
&\neg\forall\, \epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon)\\
&\quad\equiv \exists\epsilon > 0\ \neg\exists\delta > 0\ \forall x(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon)\\
&\quad\equiv \exists\epsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \neg\forall x(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon)\\
&\quad\equiv \exists\epsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x\ \neg(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon)\\
&\quad\equiv \exists\epsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x\ (0 < |x - a| < \delta \land |f(x) - L| \geq \epsilon).
\end{aligned}$$

Na última passagem, usamos a equivalência $\neg(p \to q) \equiv p \land \neg q$, que segue da quinta equivalência da Tabela 7 da Seção 1.2.

Como a sentença "$\lim_{x\to a} f(x)$ não existe" significa que para todo número real L, $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$, essa pode ser expressa por

$$\forall L \exists\, \epsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x\ (0 < |x - a| < \delta \land |f(x) - L| \geq \epsilon).$$

Essa última sentença diz que para todo número real L existe um número real $\epsilon > 0$ tal que para cada número real $\delta > 0$, existe um número real x tal que $0 < |x - a| < \delta$ e $|f(x) - L| \geq \epsilon$. ◄

Exercícios

1. Transcreva as proposições abaixo para o português, em que o domínio para cada variável consista nos números reais.

a) $\forall x\exists y(x < y)$

b) $\forall x\forall y(((x \geq 0) \land (y \geq 0)) \to (xy \geq 0))$

c) $\forall x\forall y\exists z(xy = z)$

2. Transcreva as proposições abaixo para o português, em que o domínio para cada variável consista nos números reais.

a) $\exists x\forall y(xy = y)$

b) $\forall x\forall y(((x \geq 0) \land (y < 0)) \to (x - y > 0))$

c) $\forall x\forall y\exists z(x = y + z)$

3. Considere $Q(x, y)$ como a proposição "x enviou um e-mail para y", em que o domínio para x e y são todos os estudantes de sua sala. Expresse cada uma das quantificações abaixo em português.

a) $\exists x\exists yQ(x, y)$ **b)** $\exists x\forall yQ(x, y)$

c) $\forall x\exists yQ(x, y)$ **d)** $\exists y\forall xQ(x, y)$

e) $\forall y\exists xQ(x, y)$ **f)** $\forall x\forall yQ(x, y)$

4. Considere $P(x, y)$ como a proposição "o estudante x tem freqüentado as aulas y", em que o domínio para x são os estudantes de sua sala e y, todos os cursos de ciência da computação em sua escola. Expresse cada uma das quantificações abaixo em português.

a) $\exists x\exists yP(x, y)$ **b)** $\exists x\forall yP(x, y)$

c) $\forall x\exists yP(x, y)$ **d)** $\exists y\forall xP(x, y)$

e) $\forall y\exists xP(x, y)$ **f)** $\forall x\forall yP(x, y)$

5. Considere $W(x, y)$ que significa que o estudante x visitou o site da Web y, em que o domínio para x são todos os estudantes de sua escola e o domínio para y, todos os sites da Web. Expresse cada uma das proposições abaixo em uma sentença em português.

a) W(Sarah Smith, www.att.com)

b) $\exists xW(x,$ www.imdb.org)

c) $\exists yW$(Jose Orez, y)

d) $\exists y(W$(Ashok Puri, $y) \land W$(Cindy Yoon, y))

e) $\exists y\forall z\ (y \neq$ (David Belcher) $\land$ (W(David Belcher, $z) \to W(y,z)))$

f) $\exists x\exists y\forall z((x \neq y) \land (W(x, z) \leftrightarrow W(y, z)))$

6. Considere $C(x, y)$, que significa que o estudante x está inscrito na aula y, em que o domínio para x são todos os estudantes de sua escola e o domínio para y, todas as aulas dadas na escola. Expresse cada uma das proposições abaixo em uma sentença em português.

a) C(Randy Goldberg, CS 252)

b) $\exists xC(x,$ Math 695)

c) $\exists yC$(Carol Sitea, y)

d) $\exists x(C(x,$ Math 222) $\land$ $C(x,$ CS 252))

e) $\exists x\exists y\forall z(x \neq y) \land (C(x, z) \to C(y, z)))$

f) $\exists x\exists y\forall z(x \neq y) \land (C(x, z) \leftrightarrow C(y, z)))$

7. Considere $T(x, y)$, que significa que o estudante x gosta da cozinha y, em que o domínio para x são todos os estudantes de sua escola e o domínio para y, todas as cozinhas. Expresse cada uma das proposições abaixo em uma sentença em português.

a) $\neg T$(Abdallah Hussein, Japonesa)

b) $\exists xT(x,$ Coreana) $\land$ $\forall xT(x,$ Mexicana)

c) $\exists y T$ (T(Monique Arsenault, y) $\vee$ T (Jay Johnson, y))
d) $\forall x \forall z \exists y ((x \neq z) \rightarrow \neg(T(x, y) \wedge T(z, y)))$
e) $\exists x \exists z \forall y (T(x, y) \leftrightarrow T(z, y))$
f) $\forall x \forall z \exists y (T(x, y) \leftrightarrow T(z, y))$

8. Considere $Q(x, y)$ como a proposição "o estudante x foi um participante no programa de perguntas e respostas y". Expresse cada uma das sentenças abaixo em termos de $Q(x, y)$, quantificadores e conectivos lógicos, em que o domínio para x são todos os estudantes de sua escola e o domínio de y, todos os programas de perguntas e respostas da televisão.
a) Há um estudante na sua escola que participou de um programa de perguntas e respostas na televisão.
b) Nenhum estudante da sua escola nunca participou de um programa de perguntas e respostas na televisão.
c) Há um estudante em sua escola que participou do programa *Show do Milhão* e *Roda da Fortuna.*
d) Todo programa de perguntas e resposta da televisão teve como participante um estudante de sua escola.
e) Pelo menos dois estudantes da sua escola foram participantes do *Show do Milhão.*

9. Considere $L(x, y)$ como a proposição "x ama y", em que o domínio para x e y são todas as pessoas do mundo. Use quantificadores para expressar cada proposição abaixo.
a) Todos amam Jerry.
b) Todas as pessoas amam alguém.
c) Há alguém que é amado por todos.
d) Ninguém ama a todos.
e) Há alguém a quem Lídia não ama.
f) Há alguém a quem ninguém ama.
g) Há exatamente uma pessoa a quem todos amam.
h) Há exatamente duas pessoas a quem Lynn ama.
i) Todos amam a si próprios.
j) Há alguém que não ama ninguém além dele próprio.

10. Considere $F(x, y)$ como a proposição "x pode enganar y", em que o domínio são todas as pessoas no mundo. Use quantificadores para expressar cada uma das proposições abaixo.
a) Todos podem enganar Fred.
b) Evelyn pode enganar a todos.
c) Todos podem enganar alguém.
d) Não há ninguém que possa enganar a todos.
e) Todos podem ser enganados por alguém.
f) Ninguém pode enganar Fred e Jerry.
g) Nancy pode enganar exatamente duas pessoas.
h) Há exatamente uma pessoa a quem todos podem enganar.
i) Ninguém pode enganar a si próprio.
j) Há alguém que pode enganar exatamente uma pessoa além de si próprio.

11. Considere $S(x)$ como o predicado "x é um estudante", $F(x)$ o predicado "x é um membro da faculdade" e $A(x, y)$ o predicado "x fez uma pergunta a y", em que o domínio são todas as pessoas associadas a sua escola. Use quantificadores para expressar cada proposição a seguir.
a) Lois fez uma pergunta ao professor Michaels.
b) Todo estudante fez uma pergunta ao professor Gross.
c) Todo membro da faculdade ou fez uma pergunta ao professor Miller ou foi questionado pelo professor Miller.
d) Algum estudante não fez nenhuma pergunta a qualquer membro da faculdade.
e) Há um membro da faculdade que nunca recebeu uma pergunta de um estudante.
f) Algum estudante fez uma pergunta a todos os membros da faculdade.
g) Há um membro da faculdade que fez uma pergunta a outro membro da faculdade.
h) Algum estudante nunca recebeu uma pergunta feita por um membro da faculdade.

12. Considere $I(x)$ como a proposição "x tem uma conexão de Internet" e $C(x, y)$ como a proposição "x e y conversaram pela Internet", em que o domínio para as variáveis x e y são todos os estudantes de sua sala. Use quantificadores para expressar cada uma das proposições abaixo.
a) Jerry não tem uma conexão de Internet.
b) Rachel não conversou pela Internet com Chelsea.
c) Jan e Sharon nunca conversaram pela Internet.
d) Ninguém na sala conversou pela Internet com Bob.
e) Sanjay conversou pela Internet com todos, menos com Joseph.
f) Alguém de sua sala não tem uma conexão de Internet.
g) Nem todos em sua sala têm uma conexão de Internet.
h) Exatamente um estudante em sua sala tem uma conexão de Internet.
i) Todos em sua sala, exceto um estudante, têm uma conexão de Internet.
j) Todos os estudantes na sua sala que têm conexão de Internet conversaram com pelo menos um outro estudante da sala.
k) Alguém de sua sala tem conexão de Internet, mas não conversou com ninguém mais de sua sala pela Internet.
l) Há dois estudantes em sua sala que não conversam entre si pela Internet.
m) Há um estudante em sua sala que conversa com todos da sala pela Internet.
n) Há pelo menos dois estudantes em sua sala que não conversam com a mesma pessoa pela Internet.
o) Há dois estudantes na sala que conversam apenas entre eles pela Internet.

13. Considere $M(x, y)$ como "x enviou um e-mail a y" e $T(x, y)$ como "x telefonou para y", em que o domínio são todos os estudantes em sua sala. Use quantificadores para expressar cada uma das proposições a seguir. (Assuma que todos os e-mails que foram enviados foram recebidos; o que geralmente não acontece.)
a) Chou nunca mandou um e-mail para Koko.
b) Arlene nunca mandou um e-mail ou telefonou para Sarah.
c) José nunca recebeu um e-mail de Débora.
d) Todo estudante de sua sala mandou um e-mail para Ken.

e) Ninguém da sua sala telefonou para Nina.

f) Alguém na sua sala telefonou ou mandou um e-mail para Avi.

g) Há um estudante na sua sala que enviou a mais alguém de sua sala um e-mail.

h) Há alguém na sua sala que ou mandou um e-mail ou telefonou a mais alguém de sua sala.

i) Há dois estudantes em sua sala que mandaram e-mail um para o outro.

j) Há um estudante que mandou para si próprio um e-mail.

k) Há um estudante na sua sala que não recebeu o e-mail que alguém da sala mandou e não recebeu telefonema de nenhum outro estudante na sala.

l) Todos os estudantes da sala ou receberam um e-mail ou receberam um telefonema de outro estudante da sala.

m) Há pelos menos dois estudantes de sua sala, dos quais o primeiro mandou um e-mail para o segundo e este telefonou para aquele.

n) Há dois estudantes diferentes que mandaram e-mails entre si ou telefonaram para outra pessoa da sala.

14. Use quantificadores e predicados com mais de uma variável para expressar as proposições abaixo.

a) Há um estudante nesta sala que fala hindu.

b) Todo estudante desta sala pratica algum esporte.

c) Algum estudante nesta sala visitou o Alasca, mas não visitou o Havaí.

d) Todos os estudantes desta sala aprenderam pelo menos uma linguagem computacional.

e) Há um estudante nesta sala que cursou todas as disciplinas oferecidas por um dos departamentos da escola.

f) Algum estudante desta sala cresceu na mesma cidade que outro estudante da sala.

g) Todo estudante desta sala conversou pela Internet com pelo menos outro estudante, em pelo menos um grupo de bate-papo.

15. Use quantificadores e predicados com mais de uma variável para expressar as proposições abaixo.

a) Todo estudante de ciência da computação precisa de um curso de matemática discreta.

b) Há um estudante nesta sala que possui seu próprio computador.

c) Todo estudante nesta sala participou de pelo menos um curso de ciência da computação.

d) Há um estudante nesta sala que participou de pelo menos um curso de ciência da computação.

e) Todo estudante desta sala já esteve em todos os prédios do campus.

f) Há um estudante desta sala que já esteve em todas as salas de pelo menos um prédio do campus.

g) Todo estudante nesta sala já esteve em pelo menos uma sala de todos os prédios do campus.

16. Uma aula de matemática discreta contém um graduando em matemática que é um calouro, 12 matemáticos que são veteranos, 15 cientistas da computação que são veteranos, 2 matemáticos que são juniores, 2 cientistas da computação que são juniores e 1 cientista da computação que é sênior. Expresse cada uma das proposições abaixo em termos de quantificadores e depois determine seu valor-verdade.

a) Há um estudante na sala que é júnior.

b) Todo estudante na sala é graduado em ciência da computação.

c) Há um estudante na sala que não é nem graduando em matemática nem júnior.

d) Todo estudante na sala é ou um veterano ou um graduando em ciência da computação.

e) Há um graduando, tal que existe um outro estudante na sala que em todo ano estudou com este graduando.

17. Expresse cada um dos sistemas de especificações abaixo usando predicados, quantificadores e conectivos lógicos, se necessário.

a) Todo usuário tem acesso a exatamente uma caixa de entrada.

b) Há um processo que continua executando durante todas as condições de erro se o kernel estiver funcionando corretamente.

c) Todos os usuários do campus têm acesso a todos os sites da Web de extensão .edu.

*__d)__ Há exatamente dois sistemas que monitoram todos os servidores remotos.

18. Expresse cada um dos sistemas de especificações abaixo usando predicados, quantificadores e conectivos lógicos, se necessário.

a) Pelo menos um console deve estar acessível durante toda condição de cuidado.

b) O endereço de e-mail de todo usuário deve ser recuperado assim que o arquivo contiver pelo menos uma mensagem enviada pelo usuário no sistema.

c) Para toda quebra de segurança há pelo menos um mecanismo que pode apagar aquela quebra se, e apenas se, um processo não for comprometido.

d) Há pelo menos dois caminhos conectados a dois pontos distintos na rede de transmissão.

e) Ninguém sabe a senha de todos os usuários do sistema, exceto o administrador do sistema, que sabe todas as senhas.

19. Expresse cada uma das proposições abaixo usando operadores matemáticos e lógicos, predicados e quantificadores, em que o domínio são todos os números inteiros.

a) A soma de dois números inteiros negativos é negativa.

b) A diferença de dois números inteiros positivos não é necessariamente positiva.

c) A soma dos quadrados de dois números inteiros é maior que ou igual ao quadrado de sua soma.

d) O valor absoluto do produto de dois números inteiros é o produto de seus valores absolutos.

20. Expresse cada uma das proposições a seguir usando predicados, quantificadores, conectivos lógicos e operadores matemáticos, em que o domínio são todos os números inteiros.

a) O produto de dois números inteiros negativos é positivo.

b) A média de dois números inteiros positivos é positiva.

c) A diferença entre dois números inteiros negativos não é necessariamente negativa.
d) O valor absoluto da soma de dois números inteiros não excede à soma dos valores absolutos desses números inteiros.

21. Use predicados, quantificadores, conectivos lógicos e operadores matemáticos para expressar a proposição de que todo número inteiro positivo é a soma dos quadrados de quatro números inteiros.

22. Use predicados, quantificadores, conectivos lógicos e operadores matemáticos para expressar a proposição de que há um número inteiro positivo que não é a soma de três quadrados.

23. Expresse cada uma das proposições matemáticas abaixo usando predicados, quantificadores, conectivos lógicos e operadores matemáticos.
a) O produto de dois números reais negativos é positivo.
b) A diferença entre um número real e ele mesmo é zero.
c) Todo número real positivo tem exatamente duas raízes quadradas.
d) Um número real negativo não tem uma raiz quadrada que seja um número real.

24. Transcreva cada uma das quantificações agrupadas em proposições em português que expressem um fato matemático. O domínio em cada caso são todos os números reais.
a) $\exists x \forall y (x + y = y)$
b) $\forall x \forall y (((x \geq 0) \land (y < 0)) \rightarrow (x - y > 0))$
c) $\exists x \exists y (((x \leq 0) \land (y \leq 0)) \land (x - y > 0))$
d) $\forall x \forall y ((x \neq 0) \land (y \neq 0) \leftrightarrow (xy \neq 0))$

25. Transcreva cada uma das quantificações agrupadas em proposições em português que expressem um fato matemático. O domínio em cada caso são todos os números reais.
a) $\exists x \forall y (xy = y)$
b) $\forall x \forall y (((x < 0) \land (y < 0)) \rightarrow (xy > 0))$
c) $\exists x \exists y (((x^2 > y) \land (x < y))$
d) $\forall x \forall y \exists z (x + y = z)$

26. Considere $Q(x, y)$ como a proposição "$x + y = x - y$". Se o domínio das duas variáveis forem todos os números inteiros, quais são os valores-verdade?
a) $Q(1, 1)$ **b)** $Q(2, 0)$
c) $\forall y Q(1, y)$ **d)** $\exists x Q(x, 2)$
e) $\exists x \exists y Q(x, y)$ **f)** $\forall x \exists y Q(x, y)$
g) $\exists y \forall x Q(x, y)$ **h)** $\forall y \exists x Q(x, y)$
i) $\forall x \forall y Q(x, y)$

27. Determine o valor-verdade de cada uma das proposições abaixo se o domínio para as variáveis são todos os números inteiros.
a) $\forall n \exists m (n^2 < m)$ **b)** $\exists n \forall m (n < m^2)$
c) $\forall n \exists m (n + m = 0)$ **d)** $\exists n \forall m (nm = m)$
e) $\exists n \exists m (n^2 + m^2 = 5)$ **f)** $\exists n \exists m (n^2 + m^2 = 6)$
g) $\exists n \exists m (n + m = 4 \land n - m = 1)$
h) $\exists n \exists m (n + m = 4 \land n - m = 2)$
i) $\forall n \forall m \exists p (p = (m + n)/2)$

28. Determine o valor-verdade de cada uma das proposições a seguir se o domínio para as variáveis são todos os números reais.
a) $\forall x \exists y (x^2 = y)$ **b)** $\forall x \exists y (x = y^2)$
c) $\exists x \forall y (xy = 0)$
d) $\exists x \exists y (x + y \neq y + x)$
e) $\forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y (xy = 1))$
f) $\exists x \forall y (y \neq 0 \rightarrow xy = 1)$
g) $\forall x \exists y (x + y = 1)$
h) $\exists x \exists y (x + 2y = 2 \land 2x + 4y = 5)$
i) $\forall x \exists y (x + y = 2 \land 2x - y = 1)$
j) $\forall x \forall y \exists z (z = (x + y)/2)$

29. Suponha que o domínio da função proposicional $P(x, y)$ são os pares x e y, em que x é 1, 2 ou 3 e y, 1, 2 ou 3. Desenvolva as proposições abaixo usando disjunções e conjunções.
a) $\forall x \forall y P(x, y)$ **b)** $\exists x \exists y P(x, y)$
c) $\exists x \forall y P(x, y)$ **d)** $\forall y \exists x P(x, y)$

30. Reescreva cada uma das proposições para que as negações apareçam apenas inseridas nos predicados (ou seja, nenhuma negação esteja do lado de fora de um quantificador ou de uma expressão que envolva conectivos lógicos).
a) $\neg \exists y \exists x P(x, y)$ **b)** $\neg \forall x \exists y P(x, y)$
c) $\neg \exists y (Q(y) \land \forall x \neg R(x, y))$
d) $\neg \exists y (\exists x R(x, y) \lor \forall x S(x, y))$
e) $\neg \exists y (\forall x \exists z T(x, y, z) \lor \exists x \forall z U(x, y, z))$

31. Expresse as negações de cada uma das proposições abaixo, tal que todos os símbolos de negação precedam imediatamente os predicados.
a) $\forall x \exists y \forall z T(x, y, z)$
b) $\forall x \exists y P(x, y) \lor \forall x \exists y Q(x, y)$
c) $\forall x \exists y (P(x, y) \land \exists z R(x, y, z))$
d) $\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$

32. Expresse as negações de cada uma das proposições abaixo, tal que todos os símbolos de negação precedam imediatamente os predicados.
a) $\exists z \forall y \forall x T(x, y, z)$
b) $\exists x \exists y P(x, y) \land \forall x \forall y Q(x, y)$
c) $\exists x \exists y (Q(x, y) \leftrightarrow Q(y, x))$
d) $\forall y \exists x \exists z (T(x, y, z) \lor Q(x, y))$

33. Reescreva cada uma das proposições para que as negações apareçam apenas inseridas nos predicados (ou seja, nenhuma negação esteja do lado de fora de um quantificador ou de uma expressão que envolva conectivos lógicos).
a) $\neg \forall x \forall y P(x, y)$ **b)** $\neg \forall y \exists x P(x, y)$
c) $\neg \forall y \forall x (P(x, y) \lor Q(x, y))$
d) $\neg (\exists x \exists y \neg P(x, y) \land \forall x \forall y Q(x, y))$
e) $\neg \forall x (\exists y \forall z P(x, y, z) \land \exists z \forall y P(x, y, z))$

34. Encontre um domínio comum para as variáveis x, y e z para que a proposição $\forall x \forall y ((x \neq y) \rightarrow \forall z ((z = x) \lor (z = y)))$ seja verdadeira e outro domínio para que ela seja falsa.

35. Encontre um domínio comum para as variáveis x, y, z e w para que a proposição $\forall x \forall y \forall z \exists w ((w \neq x) \land (w \neq y) \land (w \neq z))$ seja verdadeira e outro domínio para que ela seja falsa.

36. Expresse cada uma das proposições a seguir. Então, forme a negação de cada proposição, para que a negação fique do lado esquerdo de um quantificador. Depois, expresse a negação em português. (Não use as palavras "Não é o caso de".)

a) Ninguém perdeu mais de mil dólares apostando na loteria.

b) Há um estudante na sala que conversou pela Internet com apenas um outro estudante.

c) Nenhum estudante nesta sala enviou um e-mail para dois outros estudantes da sala.

d) Algum estudante resolveu todos os exercícios deste livro.

e) Nenhum estudante resolveu pelo menos um exercício em todas as seções deste livro.

37. Expresse cada uma das proposições abaixo. Então, forme a negação de cada proposição, para que a negação fique do lado esquerdo de um quantificador. Depois, expresse a negação em português. (Não use as palavras "Não é o caso de".)

a) Todo estudante na sala freqüentou exatamente duas aulas de matemática nesta escola.

b) Alguém visitou todos os países do mundo, exceto a Líbia.

c) Ninguém escalou todas as montanhas do Himalaia.

d) Todo ator de cinema já participou de um filme ao lado de Kevin Bacon ou contracenou com alguém que já filmou com Kevin Bacon.

38. Expresse a negação das proposições abaixo usando quantificadores, e em português.

a) Todo estudante desta sala gosta de matemática.

b) Há um estudante nesta sala que nunca viu um computador.

c) Há um estudante nesta sala que freqüentou todos os cursos de matemática oferecidos nesta escola.

d) Há um estudante nesta sala que esteve em pelo menos uma sala de todos os prédios do campus.

39. Encontre um contra-exemplo, se possível, para estas proposições de quantificadores universais, em que o domínio para todas as variáveis são todos os números inteiros.

a) $\forall x \forall y (x^2 = y^2 \to x = y)$

b) $\forall x \exists y (y^2 = x)$

c) $\forall x \forall y (xy \geq x)$

40. Encontre um contra-exemplo, se possível, para estas proposições de quantificadores universais, em que o domínio para todas as variáveis são todos os números inteiros.

a) $\forall x \exists y (x = 1/y)$

b) $\forall x \exists y (y^2 - x < 100)$

c) $\forall x \forall y (x^2 \neq y^3)$

41. Use quantificadores para expressar a propriedade associativa para a multiplicação de números reais.

42. Use quantificadores para expressar as propriedades distributivas para a multiplicação sobre a adição de números reais.

43. Use quantificadores e conectivos lógicos para expressar o fato de que todo polinômio linear (ou seja, o polinômio de grau 1) com coeficientes reais e no qual o coeficiente de x é diferente de zero tem exatamente uma raiz real.

44. Use quantificadores e conectivos lógicos para expressar o fato de que um polinômio quadrático com coeficientes de números reais tem no máximo duas raízes reais.

45. Determine o valor-verdade da proposição $\forall x \exists y (xy = 1)$, se o domínio para as variáveis forem:

a) os números reais diferentes de zero.

b) os números inteiros diferentes de zero.

c) os números reais positivos.

46. Determine o valor-verdade da proposição $\exists x \forall y (x \leq y^2)$, se o domínio para as variáveis forem:

a) os números reais positivos.

b) os números inteiros.

c) os números reais diferentes de zero.

47. Mostre que as duas proposições $\neg \exists x \forall y P(x, y)$ e $\forall x \exists y \neg P(x, y)$, em que os dois quantificadores da primeira variável em $P(x, y)$ têm o mesmo domínio, e os dois quantificadores da segunda variável em $P(x, y)$ têm o mesmo domínio, são equivalentes logicamente.

***48.** Mostre que $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ e $\forall x \forall y P(x) \vee Q(y))$, em que todos os quantificadores têm o mesmo domínio não vazio, são equivalentes logicamente. (A nova variável y é utilizada para combinar corretamente as quantificações.)

***49. a)** Mostre que $\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ é equivalente logicamente a $\forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$, em que todos os quantificadores têm o mesmo domínio não vazio.

b) Mostre que $\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$ é equivalente a $\forall x \exists y (P(x) \vee Q(y))$, em que todos os quantificadores têm o mesmo domínio não vazio.

Uma proposição está em **forma normal prenex (FNP)** se e apenas se estiver na forma

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_k x_k P(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

em que cada Q_i , $i = 1, 2, \ldots, k$, é ou um quantificador de existência ou um quantificador universal e $P(x_1, \ldots, x_k)$ é um predicado que não envolva quantificadores. Por exemplo, $\exists x \forall y (P(x, y) \wedge Q(y))$ está em forma normal prenex, enquanto $\exists x P(x) \vee \forall x Q(x)$ não está (porque os quantificadores não aparecem todos primeiro).

Toda proposição formada de variáveis proposicionais, predicados, **V** e **F** usando conectivos lógicos e quantificadores é equivalente a uma proposição em forma normal prenex. O Exercício 51 pede uma demonstração desse fato.

***50.** Coloque as proposições abaixo em forma normal prenex. [*Dica:* Use equivalentes lógicos das tabelas 6 e 7 da Seção 1.2, tabela 2 da Seção 1.3, Exemplo 19 da Seção 1.3, exercícios 45 e 46 da Seção 1.3 e exercícios 48 e 49 desta seção.]

a) $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \vee A$, em que A é uma proposição que não envolve nenhum quantificador.

b) $\neg (\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x))$

c) $\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$

****51.** Mostre como transformar uma proposição arbitrária em uma proposição em forma normal prenex equivalente à proposição dada.

***52.** Expresse a quantificação $\exists! x\, P(x)$, introduzida na página 37, usando quantificações universais, quantificações de existência e operadores lógicos.

1.5 Regras de Inferência

Introdução

Mais adiante, neste capítulo, vamos estudar demonstrações. Demonstrações em matemática são argumentos válidos que estabelecem a veracidade das sentenças matemáticas. Por um **argumento**, entendemos uma seqüência de sentenças que terminam com uma conclusão e, por **válido**, que uma conclusão, ou a sentença final do argumento, deve seguir o valor-verdade das sentenças precedentes, ou **premissas**, do argumento. Ou seja, um argumento é válido se e somente se for impossível que todas as premissas sejam verdadeiras e a conclusão seja falsa. Para deduzir novas sentenças de sentenças que já temos, usamos regras de inferência, as quais são moldes para construção de argumentos válidos. Regras de inferência são nossas ferramentas básicas para o estabelecimento do valor-verdade das sentenças.

Antes de estudarmos demonstrações matemáticas, vamos olhar para argumentos que envolvem apenas proposições compostas. Vamos definir o que significa um argumento ser válido quando envolve proposições compostas. Então, vamos introduzir um conjunto de regras de inferência de lógica proposicional. Essas regras de inferência são o mais importante ingrediente na produção de argumentos válidos. Depois de ilustrar como as regras de inferência são utilizadas para produzir argumentos válidos, vamos descrever algumas formas comuns de raciocínio incorreto, chamadas de **falácias**, que nos levam a argumentos inválidos.

Depois de estudar as regras de inferência em lógica proposicional, vamos introduzir regras de inferência para sentenças quantificadas. Vamos descrever como essas regras de inferência podem ser utilizadas para produzir argumentos válidos. Essas regras de inferência para sentenças que envolvem quantificadores universal e existencial representam importante papel em demonstrações em ciência da computação e matemática, embora elas sejam sempre utilizadas sem serem explicitamente mencionadas.

Finalmente, vamos mostrar como regras de inferência para sentenças proposicionais e quantificacionais podem ser combinadas. Essas combinações são freqüentemente utilizadas em argumentos complicados.

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

Considere o seguinte argumento que envolve proposições (o qual, por definição, é uma seqüência de proposições):

"Se você tem uma senha atualizada, então você pode entrar na rede."
"Você tem uma senha atualizada."

Portanto,

"Você pode entrar na rede."

Gostaríamos de determinar quando este argumento é válido. Ou seja, gostaríamos de determinar se a conclusão "Você pode entrar na rede" deve ser verdadeira quando as premissas "Se você tem uma senha atualizada, então você pode entrar na rede" e "Você tem uma senha atualizada" também forem ambas verdadeiras.

Antes de discutir a validade deste argumento particular, vamos olhar para sua forma. Use p para representar "Você tem uma senha atualizada" e q para representar "Você pode entrar na rede". Então, o argumento tem a forma

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

em que $\therefore$ é o símbolo para indicar "portanto".

Sabemos que se p e q são variáveis proposicionais, a sentença $((p \to q) \wedge p) \to q$ é uma tautologia (veja o Exercício 10(c) na Seção 1.2). Em particular, quando ambos $p \to q$ e p são verdadeiras, sabemos que q também deve ser. Dizemos que essa é uma forma **válida** de argumento porque sempre que todas as suas premissas (todas as sentenças do argumento, a não ser a última, a conclusão) são verdadeiras, a conclusão também deve ser. Agora suponha que ambas "Se você tem uma senha atualizada, então você pode entrar na rede" e "Você tem uma senha atualizada" são sentenças verdadeiras. Quando trocamos p por "Você tem uma senha atualizada" e q por "Você pode entrar na rede", segue necessariamente que a conclusão "Você pode entrar na rede" é verdadeira. Esse argumento é **válido** porque está na forma válida. Note que sempre que substituirmos p e q por proposições em que $p \to q$ e p são verdadeiras, então q deve ser verdadeira.

O que acontece quando substituímos p e q nessa forma de argumento por proposições tal que p e $p \to q$ não são ambas verdadeiras? Por exemplo, suponha que p represente "Você tem acesso à rede" e q represente "Você pode mudar suas notas" e p seja verdadeira, mas $p \to q$ seja falsa. O argumento que obtemos substituindo esses valores de p e q na forma do argumento anterior é:

"Se você tem acesso à rede, então você pode mudar suas notas."
"Você tem acesso à rede."
___
$\therefore$ "Você pode mudar suas notas."

O argumento obtido é um argumento válido, mas, como uma das premissas, chamada de primeira premissa, é falsa, não podemos decidir se a conclusão é verdadeira. (Mas parece que essa conclusão é falsa.)

Em nossa discussão, para analisar um argumento, substituímos as proposições por variáveis proposicionais. Isso transforma um argumento em uma **forma de argumento**. Dizemos que a validade de um argumento segue a validade da forma do argumento. Resumimos a terminologia utilizada para discutir a validade de argumentos com nossa definição dessas noções importantes.

DEFINIÇÃO 1 Um *argumento* em lógica proposicional é uma seqüência de proposições. Todas, menos a última das proposições, são chamadas de *premissas,* e a última é chamada de *conclusão*. Um argumento é *válido* se a veracidade das premissas implica que a conclusão seja verdadeira.

Uma *forma de argumento* em lógica proposicional é a seqüência de proposições compostas que envolvem variáveis proposicionais. Uma forma de argumento é *válida* quaisquer que sejam as proposições substituídas nas variáveis proposicionais em suas sentenças; a conclusão é verdadeira se as premissas forem todas verdadeiras.

Da definição de forma de argumento válida, vemos que uma forma de argumento com premissas $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ e conclusão q é válida, quando $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \to q$ é uma tautologia.

A chave para mostrar que um argumento na lógica proposicional é válido é mostrar que sua forma de argumento é válida. Conseqüentemente, gostaríamos de ter técnicas para mostrar que formas de argumentos são válidas. Vamos agora desenvolver métodos para alcançar esse objetivo.

Regras de Inferência para Lógica Proposicional

Podemos sempre usar uma tabela-verdade para mostrar que uma forma de argumento é válida. Fazemos isso mostrando que sempre que as premissas são verdadeiras, a conclusão deve ser verdadeira também. No entanto, esse pode ser um modo um pouco tedioso. Por exemplo, quando uma forma de argumento envolve 10 variáveis proposicionais diferentes, usar uma tabela-verdade para mostrar que esse argumento é válido requer $2^{10} = 1.024$ linhas diferentes. Felizmente, não precisamos sempre recorrer às tabelas-verdade. Em vez disso, podemos estabelecer a validade de algumas formas de argumento relativamente simples, chamadas de **regras de inferência**. Essas regras de inferência podem ser utilizadas como tijolos para construir formas de argumento válidas mais complicadas. Vamos agora introduzir a mais importante das regras de inferência na lógica proposicional.

A tautologia $(p \wedge (p \to q)) \to q$ é a base da regra de inferência chamada de *modus ponens*, ou **propriedade de destacamento**. (*Modus ponens*, em latim, significa *modo que afirma.*) Essa tautologia nos leva à seguinte forma de argumento válida, que já foi vista na nossa discussão sobre argumentos (em que, como antes, o $\therefore$ é o símbolo para indicar "portanto"):

$$\begin{array}{rl} & p \\ & p \to q \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Usando essa notação, as hipóteses são escritas em colunas, seguidas por uma barra horizontal, seguida por uma linha que começa com o símbolo "portanto" e termina com a conclusão. Em particular, *modus ponens* nos diz que se uma sentença condicional e a hipótese dessa sentença condicional são verdadeiras, então a conclusão também deve ser verdadeira. O Exemplo 1 ilustra o uso do *modus ponens*.

EXEMPLO 1 Suponha que a sentença condicional "Se nevar hoje, então eu vou esquiar" e sua hipótese "Está nevando hoje" são verdadeiras. Então, por *modus ponens*, segue que a conclusão do condicional "Vou esquiar" é verdadeira. ◀

Como mencionado anteriormente, um argumento válido pode nos levar a uma conclusão incorreta se uma ou mais de suas premissas são falsas. Ilustramos isso, novamente, no Exemplo 2.

EXEMPLO 2 Determine se o argumento dado aqui é válido e se sua conclusão deve ser verdadeira apenas pela validade do argumento.

"Se $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$, então $(\sqrt{2})^2 > (\frac{3}{2})^2$. Sabemos que $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$. Conseqüentemente, $(\sqrt{2})^2 = 2 > (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$."

Solução: Seja p a proposição "$\sqrt{2} > \frac{3}{2}$" e q a proposição "$2 > (\frac{3}{2})^2$". As premissas do argumento são $p \to q$ e p, e q é a conclusão. Esse argumento é válido, pois é construído de acordo com *modus ponens*, uma forma válida de argumento. No entanto, uma de suas premissas, $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$, é falsa. Conseqüentemente, não podemos deduzir que a conclusão seja verdadeira. Nesse caso, notamos que a conclusão é falsa, pois $2 < \frac{9}{4}$. ◀

A Tabela 1 lista as mais importantes regras de inferência para a lógica proposicional. Os exercícios 9, 10, 15 e 30 na Seção 1.2 pedem verificações de que essas regras de inferência são formas válidas de argumento. Agora daremos exemplos de argumentos que usam essas regras de inferência. Em cada argumento, primeiro usaremos variáveis proposicionais para expressar as proposições no argumento. Depois, mostraremos que a forma resultante de argumento é uma regra da Tabela 1.

EXEMPLO 3 Diga qual regra de inferência é a base do seguinte argumento: "Está esfriando agora. Portanto, está esfriando ou chovendo agora".

TABELA 1 Regras de Inferência.

Regra de Inferência	***Tautologia***	***Nome***
p $p \to q$ $\therefore q$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$	*Modus ponens*
$\neg q$ $p \to q$ $\therefore \neg p$	$[\neg q \wedge (p \to q)] \to \neg p$	*Modus tollens*
$p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$	Silogismo hipotético
$p \vee q$ $\neg p$ $\therefore q$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$	Silogismo disjuntivo
p $\therefore p \vee q$	$p \to (p \vee q)$	Adição
$p \wedge q$ $\therefore p$	$(p \wedge q) \to p$	Simplificação
p q $\therefore p \wedge q$	$[(p) \wedge (q)] \to (p \wedge q)$	Conjunção
$p \vee q$ $\neg p \vee r$ $\therefore q \vee r$	$[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)] \to (q \vee r)$	Resolução

Solução: Seja p a proposição “Está esfriando agora” e q a proposição “Está chovendo agora”. Então esse argumento é da forma

$$\begin{array}{l} \quad p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$$

Esse é um argumento que usa a regra da adição. ◀

EXEMPLO 4 Diga qual regra de inferência é a base do seguinte argumento: “Está esfriando e chovendo agora. Portanto, está esfriando agora”.

Solução: Seja p a proposição “Está esfriando agora” e q a proposição “Está chovendo agora”. Então, esse argumento é da forma

$$\begin{array}{l} \quad p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Esse é um argumento que usa a regra da simplificação. ◀

EXEMPLO 5 Diga qual regra de inferência é a base do seguinte argumento:

> "Se chover, então não haverá churrasco hoje. Se não houver churrasco hoje, haverá amanhã. Portanto, se chover hoje, então haverá churrasco amanhã."

Solução: Seja p a proposição "Está chovendo hoje", q a proposição "Não terá churrasco hoje" e r a proposição "Terá churrasco amanhã". Então esse argumento é da forma

$$\begin{array}{rl} & p \rightarrow q \\ & q \rightarrow r \\ \hline \therefore & p \rightarrow r \end{array}$$

Logo, esse argumento é um silogismo hipotético. ◀

Usando Regras de Inferência para Construir Argumentos

Quando existem muitas premissas, muitas regras de inferência são freqüentemente necessárias para mostrar que um argumento é válido. Isso é ilustrado nos exemplos 6 e 7, onde os passos do argumento são dispostos em linhas separadas, com a razão para cada passo explicitamente colocada ao lado. Esses exemplos também mostram como argumentos em português podem ser analisados por meio de regras de inferência.

EXEMPLO 6 Mostre que as hipóteses "Não está ensolarada esta tarde e está mais frio que ontem", "Vamos nadar se estiver ensolarado", "Se não formos nadar, então vamos fazer um passeio de barco" e "Se fizermos um passeio de barco, então estaremos em casa ao anoitecer" nos levam à conclusão "Estaremos em casa ao anoitecer".

Exemplos Extras

Solução: Seja p a proposição "Está ensolarada esta tarde", q a proposição "Está mais frio que ontem", r a proposição "Vamos nadar", s a proposição "Vamos fazer um passeio de barco" e t a proposição "Estaremos em casa ao anoitecer". Então, as hipóteses se tornam $\neg p \wedge q$, $r \rightarrow p$, $\neg r \rightarrow s$, e $s \rightarrow t$ e a conclusão é simplesmente t.

Construímos um argumento para mostrar que nossas hipóteses nos levam à conclusão como se segue.

Passo	**Razão**
1. $\neg p \wedge q$	Hipótese
2. $\neg p$	Simplificação usando (1)
3. $r \rightarrow p$	Hipótese
4. $\neg r$	*Modus tollens* usando (2) e (3)
5. $\neg r \rightarrow s$	Hipótese
6. s	*Modus ponens* usando (4) e (5)
7. $s \rightarrow t$	Hipótese
8. t	*Modus ponens* usando (6) e (7)

Note que poderíamos ter empregado uma tabela-verdade para mostrar que, sempre que as hipóteses são verdadeiras, a conclusão também será. No entanto, como estamos trabalhando com cinco variáveis proposicionais (p, q, r, s e t), essa tabela teria 32 linhas. ◀

EXEMPLO 7 Mostre que as hipóteses "Se você me mandar um e-mail, então eu terminarei o programa", "Se você não me mandar um e-mail, então vou dormir cedo" e "Se eu dormir cedo, então acordarei sentindo-me bem" nos levam à conclusão "Se eu não terminar o programa, então eu acordarei sentindo-me bem".

Solução: Seja p a proposição "Você me manda um e-mail", q a proposição "Eu terminarei o programa", r a proposição "Eu vou dormir cedo" e s a proposição "Eu acordarei sentindo-me bem". Então as hipóteses são $p \to q$, $\neg p \to r$ e $r \to s$. A conclusão desejada é $\neg q \to s$. Temos de dar um argumento válido com as hipóteses $p \to q$, $\neg p \to r$ e $r \to s$ e a conclusão $\neg q \to s$.

Essa forma de argumento mostra que as hipóteses nos levam à conclusão desejada.

Passo	**Razão**
1. $p \to q$	Hipótese
2. $\neg q \to \neg p$	Contrapositiva de (1)
3. $\neg p \to r$	Hipótese
4. $\neg q \to r$	Silogismo hipotético usando (2) e (3)
5. $r \to s$	Hipótese
6. $\neg q \to s$	Silogismo hipotético usando (4) e (5) ◄

Resolução

Links

Programas de computador têm sido desenvolvidos para automatizar a tarefa de raciocinar e fornecer teoremas. Muitos desses programas fazem uso da regra de inferência conhecida como **resolução**. Essa regra de inferência baseia-se na tautologia

$$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \to (q \vee r).$$

(A verificação de que essa sentença é uma tautologia foi pedida no Exercício 30 na Seção 1.2.) A disjunção final da regra, $q \vee r$, é chamada de **resolvente**. Quando $q = r$ na tautologia, obtemos $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \to q$. Além disso, quando $r = \mathbf{F}$, obtemos $(p \vee q) \wedge (\neg p) \to q$ (porque $q \vee \mathbf{F} \equiv q$), que é a tautologia na qual está fundamentada a regra do silogismo disjuntivo.

EXEMPLO 8 Use a resolução para mostrar que as hipóteses "Jasmim está esquiando ou não está nevando" e "Está nevando ou José está jogando futebol" implica que "Jasmim está esquiando ou José está jogando futebol".

Exemplos Extras

Solução: Seja p a proposição "Está nevando", q a proposição "Jasmim está esquiando", e r a proposição "José está jogando futebol". Podemos representar as hipóteses por $\neg p \vee q$ e $p \vee r$, respectivamente. Usando resolução, a proposição $q \vee r$, "Jasmim está esquiando ou José está jogando futebol", pode ser concluída. ◄

A resolução tem um importante papel em linguagens de programação fundamentadas nas regras da lógica, como Prolog (onde as regras de resolução para sentenças quantificadas são aplicadas). Além disso, pode ser utilizada para construir sistemas que provêm teoremas automaticamente. Para construir demonstrações em lógica proposicional usando resolução como a única regra de inferência, as hipóteses e a conclusão devem ser expressas como **cláusulas**, em que uma cláusula é uma disjunção de variáveis ou das negações dessas variáveis. Podemos substituir uma sentença em lógica proposicional que não é uma cláusula por uma ou mais sentenças equivalentes que são cláusulas. Por exemplo, suponha que tenhamos uma sentença da forma $p \vee (q \wedge r)$. Como $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, podemos substituir a sentença $p \vee (q \wedge r)$ por duas sentenças

$p \vee q$ e $p \vee r$, cada uma delas sendo uma cláusula. Podemos substituir uma sentença da forma $\neg(p \vee q)$ por duas sentenças $\neg p$ e $\neg q$ porque a lei de De Morgan nos diz que $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$. Podemos também substituir uma sentença condicional $p \to q$ pela disjunção equivalente $\neg p \vee q$.

EXEMPLO 9 Mostre que as hipóteses $(p \wedge q) \vee r$ e $r \to s$ implicam a conclusão $p \vee s$.

Solução: Podemos reescrever a hipótese $(p \wedge q) \vee r$ como duas cláusulas, $p \vee r$ e $q \vee r$. Podemos também substituir $r \to s$ pela cláusula equivalente $\neg r \vee s$. Usando as duas cláusulas $p \vee r$ e $\neg r \vee s$, podemos usar uma resolução para concluir $p \vee r$. ◀

Falácias

Muitas falácias comuns aparecem em argumentos incorretos. Essas falácias assemelham-se a regras de inferência, mas baseiam-se em contingências em vez de tautologias. Isso será discutido aqui para mostrar a distinção entre um raciocínio correto e um incorreto.

A proposição $[(p \to q) \wedge q] \to p$ não é uma tautologia, pois é falsa quando p é falsa e q é verdadeira. No entanto, existem muitos argumentos incorretos que tratam isso como uma tautologia. Em outras palavras, eles tratam o argumento com premissas $p \to q$ e q e conclusão p como uma forma válida de argumento, e não é. Esse tipo de raciocínio incorreto é chamado de **falácia da afirmação da conclusão.**

EXEMPLO 10 O seguinte argumento é válido?

Se fizer todos os exercícios deste livro, então você terá aprendido matemática discreta. Você aprendeu matemática discreta.

Portanto, você fez todos os exercícios deste livro.

Solução: Seja p a proposição "Você fez todos os exercícios deste livro". Seja q a proposição "Você aprendeu matemática discreta". Então este argumento é da forma: se $p \to q$ e q, então p. Esse é um exemplo de um argumento incorreto que usa a falácia da afirmação da conclusão. Pois é possível você aprender matemática discreta de maneira diferente sem ter de fazer todos os exercícios deste livro. (Você pode aprender matemática discreta lendo, assistindo a palestras, fazendo muitos, mas não todos os exercícios e assim por diante.) ◀

A proposição $[(p \to q) \wedge \neg p] \to \neg q$ não é uma tautologia, pois é falsa quando p é falsa e q é verdadeira. Muitos argumentos usam isso incorretamente como se fosse uma regra de inferência. Esse tipo de raciocínio incorreto é chamado de **falácia da negação das hipóteses.**

EXEMPLO 11 Sejam p e q as proposições do Exemplo 10. Se a sentença condicional $p \to q$ é verdadeira, e $\neg p$ é verdadeira, é correto concluir que $\neg q$ é verdadeira? Em outras palavras, é correto assumir que você não aprende matemática discreta se você não fizer todos os exercícios do livro, assumindo que se você resolver todos os problemas do livro, então você terá aprendido matemática discreta?

Solução: É possível que você aprenda matemática discreta mesmo que você não faça todos os exercícios do livro. Esse argumento incorreto é da forma $p \to q$ e $\neg p$ implica $\neg q$, que é um exemplo de falácia da negação das hipóteses. ◀

Regras de Inferência para Sentenças Quantificadas

Discutimos regras de inferência para proposições. Vamos agora descrever algumas regras importantes de inferência para sentenças que envolvem quantificadores. Essas regras de inferência são usadas extensivamente em argumentos matemáticos, freqüentemente sem menção explícita.

Instanciação universal é a regra de inferência usada para concluir que $P(c)$ é verdadeira, em que c é um elemento particular do domínio, quando é dada a premissa $\forall x P(x)$. A instanciação universal é usada quando concluímos da sentença "Todas as mulheres são discretas" que "Maria é discreta", em que Maria é um elemento do domínio das mulheres.

Generalização universal é a regra de inferência que diz que $\forall x P(x)$ é verdadeira, dada como premissa que $P(c)$ é verdadeira para todos os elementos c do domínio. A generalização universal é usada quando mostramos que $\forall x\, P(x)$ é verdadeira tomando um elemento arbitrário c do domínio e mostrando que $P(c)$ é verdadeira. O elemento c que selecionamos deve ser um elemento do domínio arbitrário, e não um específico. Ou seja, quando concluímos de $\forall x P(x)$ a existência de um elemento c no domínio, temos o controle sobre c e não podemos fazer nenhuma outra conclusão sobre c que não seja pertencente ao domínio. A generalização universal é usada implicitamente em muitas demonstrações e é raro ser mencionada explicitamente. No entanto, o erro de fazer conclusões sem garantia sobre um elemento arbitrário c quando a generalização universal é usada é também comum em raciocínios incorretos.

Instanciação existencial é a regra que nos permite concluir que existe um elemento c no domínio para o qual $P(c)$ é verdadeira se sabemos que $\exists x P(x)$ é verdadeira. Não podemos selecionar um valor arbitrário de c aqui, mas deve ser um c para o qual $P(c)$ é verdadeira. Usualmente não temos conhecimento sobre qual c é, apenas que ele existe. Como ele existe, podemos lhe dar um nome (c) e continuar nosso argumento.

Generalização existencial é a regra de inferência que é usada para concluir que $\exists x P(x)$ é verdadeira quando um elemento particular c com $P(c)$ verdadeira é conhecido. Ou seja, se conhecemos um elemento c no domínio para o qual $P(c)$ é verdadeira, então sabemos que $\exists x P(x)$ é verdadeira.

Resumimos essas regras de inferência na Tabela 2. Vamos ilustrar como uma dessas regras de inferência para sentenças quantificadas é usada no Exemplo 12.

EXEMPLO 12 Mostre que as premissas "Todos os alunos da classe de matemática discreta estão tendo um curso de ciência da computação" e "Maria é uma estudante dessa classe" implica a conclusão "Maria está freqüentando um curso de ciência da computação".

TABELA 2 **Regras de Inferência para Sentenças Quantificadas.**

Regra de Inferência	*Nome*
$\dfrac{\forall x P(x)}{\therefore\ P(c)}$	Instanciação universal
$\dfrac{P(c) \text{ para um } c \text{ arbitrário}}{\therefore\ \forall x P(x)}$	Generalização universal
$\dfrac{\exists x P(x)}{\therefore\ P(c) \text{ para algum elemento } c}$	Instanciação existencial
$\dfrac{P(c) \text{ para algum elemento } c}{\therefore\ \exists x P(x)}$	Generalização existencial

Solução: Seja $D(x)$ a sentença "x está na classe de matemática discreta" e seja $C(x)$ a sentença "x está freqüentando um curso de ciência da computação." Então, as premissas são $\forall x(D(x) \rightarrow C(x))$ e D(Maria). E a conclusão é C(Maria).

Exemplos Extras

Os seguintes passos podem ser utilizados para estabelecer a conclusão a partir das premissas.

Passo	**Razão**
1. $\forall x(D(x) \rightarrow C(x))$	Premissa
2. $D(\text{Maria}) \rightarrow C(\text{Maria})$	Instanciação Universal de (1)
3. D(Maria)	Premissa
4. C(Maria)	*Modus ponens* a partir de (2) e (3)

◄

EXEMPLO 13 Mostre que as premissas "Um estudante desta classe não tem lido o livro" e "Todos nesta classe passaram no primeiro exame" implica a conclusão "Alguém passou no primeiro exame sem ter lido o livro".

Solução: Sejam $C(x)$ a sentença "x está nesta classe", $B(x)$ a sentença "x não tem lido o livro" e $P(x)$ a sentença "x passou no primeiro exame". As premissas são $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$ e $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$. A conclusão é $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$. Estes passos podem ser utilizados para estabelecer a conclusão a partir das premissas.

Passo	**Razão**
1. $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$	Premissa
2. $C(a) \wedge \neg B(a)$	Instanciação existencial a partir de (1)
3. $C(a)$	Simplificação a partir de (2)
4. $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$	Premissa
5. $C(a) \rightarrow P(a)$	Instanciação universal a partir de (4)
6. $P(a)$	*Modus ponens* a partir (3) e (5)
7. $\neg B(a)$	Simplificação a partir de (2)
8. $P(a) \wedge \neg B(a)$	Conjunção a partir de (6) e (7)
9. $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$	Generalização existencial a partir de (8)

◄

Combinando Regras de Inferência para Proposições e Sentenças Quantificadas

Desenvolvemos regras de inferência para proposições e para sentenças quantificadas. Note que em nossos argumentos nos exemplos 12 e 13 usamos tanto instanciação universal, uma regra de inferência para sentenças quantificadas, quanto *modus ponens*, uma regra de inferência para a lógica proposicional. Vamos freqüentemente precisar usar essa combinação de regras de inferência. Como instanciação universal e *modus ponens* são usadas freqüentemente juntas, essa combinação de regras é costumeiramente chamada de ***modus ponens* universal**. Essa regra nos diz que se $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ é verdadeira, e se $P(a)$ é verdadeira para algum elemento particular a no domínio do quantificador universal, então $Q(a)$ deve ser verdadeira. Para ver isso, note que, por instanciação universal, $P(a) \rightarrow Q(a)$ é verdadeira. Então, por *modus ponens*, $Q(a)$ deve também ser verdadeira. Podemos descrever o *modus ponens* universal como se segue:

$$\begin{array}{l} \quad \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ \quad \underline{P(a), \text{ em que } a \text{ é um elemento particular do domínio}} \\ \therefore Q(a) \end{array}$$

O *modus ponens* universal é comumente usado em argumentos matemáticos. Isso é ilustrado no Exemplo 14.

EXEMPLO 14 Assuma que "Para todo inteiro positivo n, se n é maior que 4, então n^2 *é* menor que 2^n" é verdadeira. Use o *modus ponens* universal para mostrar que $100^2 < 2^{100}$.

Solução: Seja $P(n)$ a sentença "$n > 4$" e $Q(n)$ a sentença "$n^2 < 2^n$". A sentença "Para todo inteiro positivo n, se n é maior que 4, então n^2 *é* menor que 2^n" pode ser representada por $\forall n(P(n) \rightarrow Q(n))$, em que o domínio consiste em todos os inteiros positivos. Estamos assumindo que $\forall n(P(n) \rightarrow Q(n))$ é verdadeira. Note que $P(100)$ é verdadeira, pois $100 > 4$. Então segue por *modus ponens* universal que $Q(n)$ é verdadeira, explicitamente $100^2 < 2^{100}$. ◀

Outra combinação muito utilizada de regra de inferência para lógica com uma regra de inferência para sentenças quantificadas é o ***modus tollens* universal.** *Modus tollens* universal combina a instanciação universal e o *modus tollens* e pode ser expresso por:

$$\begin{array}{ll} & \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ & \neg Q(a), \text{ em que } a \text{ é um elemento particular no domínio} \\ \hline \therefore & \neg P(a) \end{array}$$

Deixamos a verificação do *modus tollens* universal para o leitor (veja o Exercício 25). O Exercício 26 desenvolve combinações adicionais de regras de inferência na lógica proposicional e sentenças quantificadas.

Exercícios

1. Encontre a forma de argumento para o argumento dado e determine se é válido. Podemos inferir que a conclusão é verdadeira se as premissas forem verdadeiras?

$$\begin{array}{ll} & \text{Se Sócrates é humano, então Sócrates é mortal.} \\ & \text{Sócrates é humano.} \\ \hline \therefore & \text{Sócrates é mortal.} \end{array}$$

2. Encontre a forma de argumento para o argumento dado e determine se é válido. Podemos inferir que a conclusão é verdadeira se as premissas forem verdadeiras?

$$\begin{array}{ll} & \text{Se George não tem oito patas, então ele não é um inseto.} \\ & \text{George é um inseto.} \\ \hline \therefore & \text{George tem oito patas.} \end{array}$$

3. Qual a regra de inferência usada em cada um dos argumentos abaixo?

a) Alice é graduada em matemática. Por isso, Alice é graduada ou em matemática ou em ciência da computação.

b) Jerry é um graduado em matemática e em ciência da computação. Por isso, Jerry é um graduado em matemática.

c) Se o dia estiver chuvoso, então a piscina estará fechada. O dia está chuvoso. Por isso, a piscina está fechada.

d) Se nevar hoje, a universidade estará fechada. A universidade não está fechada hoje. Por isso, não nevou hoje.

e) Se eu for nadar, então eu ficarei no sol por muito tempo. Se eu ficar no sol por muito tempo, então eu me queimarei. Por isso, se eu for nadar, eu me queimarei.

4. Qual a regra de inferência utilizada em cada um dos argumentos a seguir?

a) Cangurus vivem na Austrália e são marsupiais. Por isso, cangurus são marsupiais.

b) Ou está mais quente que 100 graus hoje ou a poluição é perigosa. Está menos de 100 graus lá fora hoje. Por isso, a poluição é perigosa.

c) Linda é uma excelente nadadora. Se Linda é uma excelente nadadora, então ela pode trabalhar como salva-vidas. Por isso, Linda pode trabalhar como salva-vidas.

d) Steve trabalhará em uma indústria de computadores neste verão. Por isso, neste verão ele trabalhará em uma indústria de computadores ou ele será um desocupado na praia.

e) Se eu trabalhar a noite toda nesta tarefa de casa, então posso resolver todos os exercícios. Se eu resolver todos os exercícios, eu entenderei o material. Por isso, se eu trabalhar à noite nesta tarefa, então eu entenderei o material.

5. Use as regras de inferência para mostrar que as hipóteses "Randy trabalha muito", "Se Randy trabalha muito, então ele é um garoto estúpido" e "Se Randy é um garoto estúpido, então ele não conseguirá o emprego" implicam a conclusão "Randy não conseguirá o emprego".

6. Use as regras de inferência para mostrar que as hipóteses "Se não chove ou não tem neblina, então a competição de vela acontecerá e a apresentação de salvamento continuará", "Se a competição de vela é mantida, então o troféu será conquistado" e "O troféu não foi conquistado" implicam a conclusão "Choveu".

7. Quais regras de inferência são utilizadas no famoso argumento abaixo?

"Todos os homens são mortais. Sócrates é um homem. Por isso, Sócrates é mortal."

8. Quais as regras de inferência utilizadas no argumento abaixo? "Nenhum homem é uma ilha. Manhattan é uma ilha. Por isso, Manhattan não é um homem."

9. Para cada grupo de premissas abaixo, qual conclusão ou conclusões relevantes podem ser tiradas? Explique as regras de inferência utilizadas para obter cada conclusão das premissas.

a) "Se eu tiro o dia de folga, chove ou neva." "Eu tirei folga na terça-feira ou na quinta-feira." "Fez sol na terça-feira." "Não nevou na quinta-feira."

b) "Se eu como comida apimentada, então eu tenho sonhos estranhos." "Eu tenho sonhos estranhos quando cai um trovão enquanto eu durmo." "Eu não tive sonhos estranhos."

c) "Eu sou ou esperto ou sortudo." "Eu não tenho sorte." "Se eu tivesse sorte, então eu ganharia na loteria."

d) "Todo graduado em ciência da computação tem seu próprio computador." "Ralph não tem seu próprio computador." "Ana tem seu próprio computador."

e) "O que é bom para as corporações é bom para os Estados Unidos." "O que é bom para os Estados Unidos, é bom para você." "O que é bom para as corporações é você comprar muitas coisas."

f) "Todos os roedores roem sua própria comida." "Ratos são roedores." "Coelhos não roem sua comida." "Morcegos não são roedores."

10. Para cada grupo de premissas abaixo, qual conclusão ou conclusões relevantes podem ser tiradas? Explique as regras de inferência utilizadas para obter cada conclusão das premissas.

a) "Se eu jogo hóquei, então eu fico dolorido no dia seguinte." "Eu uso a hidromassagem se eu estou dolorido." "Eu não usei a hidromassagem."

b) "Se eu trabalho, o dia está ensolarado, total ou parcialmente." "Eu trabalhei segunda-feira passada ou trabalhei sexta-feira passada." "O dia não estava ensolarado na terça-feira." "Estava parcialmente ensolarado na sexta-feira."

c) "Todos os insetos têm seis patas." "Libélulas são insetos." "Aranhas não têm seis patas." "Aranhas comem libélulas."

d) "Todo estudante tem uma conta de Internet." "Homer não tem uma conta de Internet." "Maggie tem uma conta de Internet."

e) "Todas as comidas que são saudáveis não têm um sabor bom." "Tofu é uma comida saudável." "Você come apenas o que tem gosto bom." "Você não come tofu." "Cheeseburgers não são comidas saudáveis."

f) "Eu estou dormindo ou tendo alucinações." "Eu não estou dormindo." "Se eu estou tendo alucinações, eu vejo elefantes correndo na estrada."

11. Mostre que o argumento com as premissas $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e a conclusão $q \to r$ é válido se o argumento com as premissas $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ e a conclusão r é válido.

12. Mostre que o argumento com as premissas $(p \wedge t) \to (r \vee s)$, $q \to (u \wedge t)$, $u \to p$, e $\neg s$ e a conclusão $q \to r$ é válido, usando o Exercício 11 e depois usando as regras de inferência da Tabela 1.

13. Para cada argumento a seguir, aponte quais regras de inferência foram utilizadas em cada passo.

a) "Doug, um estudante desta sala, sabe como escrever programas em Java. Todos que sabem como escrever programas em Java conseguem um emprego bem remunerado. Por isso, alguém nesta sala pode conseguir um emprego bem remunerado."

b) "Alguém nesta sala gosta de ver baleias. Toda pessoa que gosta de ver baleias se preocupa com a poluição no mar. Por isso, há uma pessoa na sala que se preocupa com a poluição marinha."

c) "Cada um dos 93 estudantes nesta classe possuem seu próprio computador. Todos que possuem seu próprio computador podem usar um programa de processamento de palavras. Por isso, Zeke, um estudante da sala, pode usar um programa de processamento."

d) "Todos em Nova Jersey vivem a 50 milhas do oceano. Alguém que mora em Nova Jersey nunca viu o oceano. Por isso, alguém que mora a 50 milhas do oceano nunca o viu."

14. Para cada argumento abaixo, aponte quais regras de inferência foram utilizadas em cada passo.

a) "Linda, uma estudante desta sala, tem um conversível vermelho. Todo mundo que tem um conversível vermelho tem pelo menos uma multa por excesso de velocidade. Por isso, alguém nesta sala tem uma multa por excesso de velocidade."

b) "Cada um dos cinco colegas de quarto, Melissa, Aaron, Ralph, Veneesha e Keeshawn, freqüentou um curso de matemática discreta. Todo estudante que freqüentou um curso de matemática discreta pode freqüentar um curso de algoritmo. Por isso, todos os cinco colegas de quarto podem freqüentar um curso de algoritmo no próximo ano."

c) "Todos os filmes produzidos por John Sayles são maravilhosos. John Sayles produziu um filme sobre mineiros de carvão mineral. Por isso, há um filme maravilhoso sobre mineiros de carvão."

d) "Há alguém nesta sala que foi à França. Todos que vão à França visitam o Louvre. Por isso, alguém nesta sala visitou o Louvre."

15. Determine se cada um dos argumentos abaixo é correto ou incorreto e explique o porquê.

a) "Todos os estudantes nesta sala entendem lógica. Xavier é um estudante desta sala. Por isso, Xavier entende lógica."

b) "Todo graduando em ciência da computação faz matemática discreta. Natasha está fazendo matemática discreta. Por isso, Natasha é uma graduanda em ciência da computação."

c) "Todos os papagaios gostam de frutas. Meu passarinho de estimação não é um papagaio. Por isso, meu passarinho de estimação não gosta de frutas."

d) "Todos que comem granola todo dia são saudáveis. Linda não é saudável. Por isso, Linda não come granola todos os dias."

16. Determine se cada um dos argumentos abaixo é correto ou incorreto e explique o porquê.

a) "Todos que são matriculados na universidade moram em um dormitório. Mia nunca morou em um dormitório. Por isso, Mia não está matriculada na universidade."

b) "Um carro conversível é bom de dirigir. O carro de Isaac não é um conversível. Por isso, o carro de Isaac não é bom de dirigir."

c) "Quincy gosta de todos os filmes de ação. Quincy gosta do filme *Eight Men Out*. Por isso, *Eight Men Out* é um filme de ação."

d) "Todos os homens que pescam lagostas armam pelo menos uma dúzia de armadilhas. Hamilton é um pescador de lagostas. Por isso, Hamilton arma pelo menos uma dúzia de armadilhas."

17. O que está errado neste argumento? Considere $H(x)$ como "x é feliz". Dada a premissa $\exists x\ H(x)$, concluímos que $H(\text{Lola})$. Por isso, Lola é feliz.

18. O que está errado neste argumento? Considere $S(x, y)$ como "x é mais baixo que y". Dada a premissa $\exists s\ S(s, \text{Max})$, segue que $S(\text{Max}, \text{Max})$. Então, pela generalização existencial, temos que $\exists x\ S(x, x)$, ou seja, alguém é mais baixo que si próprio.

19. Determine se cada um dos argumentos abaixo é válido. Se um argumento estiver correto, qual regra de inferência foi utilizada? Se não, quais erros lógicos foram cometidos?

a) Se n é um número real, tal que $n > 1$, então $n^2 > 1$. Suponha que $n^2 > 1$. Então $n > 1$.

b) Se n é um número real com $n > 3$, então $n^2 > 9$. Suponha que $n^2 \leq 9$. Então $n \leq 3$.

c) Se n é um número real com $n > 2$, então $n^2 > 4$. Suponha que $n \leq 2$. Então $n^2 \leq 4$.

20. Determine se os argumentos abaixo são válidos.

a) Se x é um número real positivo, então x^2 é um número real positivo. Por isso, se a^2 é positivo, em que a é um número real, então a é um número real positivo.

b) Se $x^2 \neq 0$, em que x é um número real, então $x \neq 0$. Considere a como um número real com $a^2 \neq 0$; então $a \neq 0$.

21. Quais regras de inferência foram utilizadas para estabelecer a conclusão do argumento de Lewis Carroll descrito no Exemplo 26 da Seção 1.3?

22. Quais regras de inferência foram utilizadas para estabelecer a conclusão do argumento de Lewis Carroll descrito no Exemplo 27 da Seção 1.3?

23. Identifique o(s) erro(s) neste argumento que supostamente mostra(m) que se $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ é verdadeira, então $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$ é verdadeira.

1. $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$	Premissa
2. $\exists x\ P(x)$	Simplificação de (1)
3. $P(c)$	Instanciação Existencial de (2)
4. $\exists x\ Q(x)$	Simplificação de (1)
5. $Q(c)$	Instanciação Existencial de (4)
6. $P(c) \wedge Q(c)$	Conjunção de (3) e (5)
7. $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	Generalização Existencial

24. Identifique o(s) erro(s) neste argumento que supostamente mostra(m) que se $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ é verdadeira, então $\forall x\ P(x) \vee \forall\ x\ Q(x)$ é verdadeira.

1. $\forall x\ P(x) \vee Q(x))$	Premissa
2. $P(c) \vee Q(c)$	Instanciação universal de (1)
3. $P(c)$	Simplificação de (2)
4. $\forall x P(x)$	Generalização universal de (3)
5. $Q(c)$	Simplificação de (2)
6. $\forall x Q(x)$	Generalização universal de (5)
7. $\forall x(P(x) \vee \forall x Q(x))$	Conjunção de (4) e (6)

25. Justifique a regra universal de *modus tollens* mostrando que as premissas $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ e $\neg Q(a)$ para um elemento em particular a no domínio, implica $\neg P(a)$.

26. Justifique a regra da **transitividade universal**, que declara que se $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ e $\forall x\ (Q(x) \rightarrow R(x))$ são verdadeiras, então $\forall x\ (P(x) \rightarrow R(x))$ é verdadeira, em que os domínios de todos os quantificadores são os mesmos.

27. Use as regras de inferência para mostrar que se $\forall x (P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge S(x)))$ e $\forall x (P(x) \wedge R(x))$ são verdadeiras, então $\forall x (R(x) \wedge S(x))$ é verdadeira.

28. Use as regras de inferência para mostrar que se $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ e $\forall x (\neg P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x))$ são verdadeiras, então $\forall x(\neg R(x) \rightarrow P(x))$ é também verdadeira, em que os domínios de todos os quantificadores são os mesmos.

29. Use as regras de inferência para mostrar que se $\forall x (P(x) \vee Q(x))$, $\forall x (\neg Q(x) \vee S(x))$, $\forall x (R(x) \rightarrow \neg S(x))$, e $\exists x \neg P(x)$ são verdadeiras, então $\exists x \neg R(x)$ é verdadeira.

30. Use a resolução para mostrar que as hipóteses "Allen é um garoto mau ou Hillary é uma boa garota" e "Allen é um bom garoto ou David é feliz" implica a conclusão "Hillary é uma boa garota ou David é feliz".

31. Use a resolução para mostrar que as hipóteses "Não está chovendo ou Ivete tem sua sombrinha", "Ivete não tem uma sombrinha ou ela não quer se molhar" e "Está chovendo ou Ivete não se molha" implica que "Ivete não se molha".

32. Mostre que a equivalência $p \wedge \neg\ p \equiv \mathbf{F}$ pode ser derivada usando a resolução junto com o fato de que uma proposição condicional com uma hipótese falsa é verdadeira. [*Dica:* Considere $q = r = \mathbf{F}$ na resolução.]

33. Use a resolução para mostrar que uma proposição composta $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ não é satisfatória.

***34.** O Problema de Lógica, tirado da *Prova FBF, O Jogo da Lógica*, tem essas duas suposições:

1. "Lógica é difícil ou não muitos estudantes gostam de lógica."

2. "Se matemática é fácil, então lógica não é difícil."

Transcrevendo essas suposições em proposições que envolvam variáveis proposicionais e conectivos lógicos, determine se cada uma das seguintes conclusões é válida para as suposições:

a) Matemática não é fácil, se muitos estudantes gostam de lógica.

b) Poucos estudantes gostam de lógica, se matemática não é fácil.

c) Matemática não é fácil ou lógica é difícil.

d) Lógica não é difícil ou matemática não é fácil.

e) Se poucos estudantes gostam de lógica, então matemática não é fácil ou lógica não é difícil.

***35.** Determine se este argumento, tirado do Kalish e Montague [KaMo64], é válido.

> Se o Super-homem era capaz e tinha vontade de combater o mal, ele seria benevolente. Se o Super-homem não fosse capaz de combater o mal, ele seria impotente; se ele não tivesse vontade de combater o mal, ele seria malevolente. O Super-homem não combate o mal. Se o Super-homem existe, ele é ou impotente ou malevolente. Por isso, o Super-homem não existe.

1.6 Introdução a Demonstrações

Introdução

Nesta seção, introduziremos a noção de demonstração e descreveremos métodos para a construção de demonstrações. Uma demonstração é um argumento válido que estabelece a verdade de uma sentença matemática. Uma demonstração pode usar as hipóteses do teorema, se existirem, axiomas assumidos com verdade e teoremas demonstrados anteriormente. Usando esses ingredientes e regras de inferência, o passo final da demonstração estabelece a verdade da sentença que está sendo demonstrada.

Em nossa discussão, vamos nos mover de demonstrações formais de teoremas até demonstrações mais informais. Os argumentos que introduzimos na Seção 1.5 para demonstrar que sentenças que envolvem proposições e sentenças quantificadas são verdadeiras sob demonstrações formais, se todos os passos são dados, e as regras para cada passo do argumento são também dadas. No entanto, demonstrações formais de teoremas muito comuns podem ser extremamente longas e difíceis de fazer. Na prática, as demonstrações dos teoremas feitas por humanos são na sua maioria **demonstrações informais**, em que mais de uma regra de inferência pode ser utilizada em cada passo, passos podem ser pulados, axiomas são assumidos e as regras de inferência utilizadas em cada passo não são explicitamente demonstradas. Demonstrações informais podem explicar aos humanos por que teoremas são verdadeiros, enquanto computadores só se contentam quando produzem uma demonstração formal usando sistemas de raciocínio automático.

Os métodos de demonstrações discutidos neste capítulo são importantes não só porque são utilizados para demonstrar teoremas, mas também pelas muitas aplicações em ciência da computação. Essas aplicações incluem verificar se programas de computador são corretos, estabelecendo se sistemas de operação são seguros, fazendo inferência em inteligência artificial, mostrando que sistemas de especificações são consistentes, e assim por diante. Conseqüentemente, compreender as técnicas utilizadas em demonstrações é essencial tanto para matemática quanto para ciência da computação.

Alguma Terminologia

Links

Formalmente, um **teorema** é uma sentença que se pode demonstrar que é verdadeira. Em escrita matemática, o termo teorema é usualmente reservado para as sentenças que são consideradas com alguma importância. Teoremas menos importantes são comumente chamados de **proposições**. (Teoremas podem ser também referidos como **fatos** ou **resultados**.) Um teorema pode ser uma quantificação universal de uma sentença condicional com uma ou mais premissas e uma conclusão. No entanto, pode ser outro tipo de sentença lógica, como os exemplos vão mostrar, mais tarde, neste capítulo. Nós demonstramos que um teorema é verdadeiro com uma **demonstração**. Uma demonstração é um argumento válido que estabelece a verdade de um teorema. As sentenças utilizadas na demonstração podem incluir **axiomas** (ou **postulados**), os quais são sentenças que assumimos ser verdadeiras (por exemplo, veja Apêndice 1 com axiomas para os números reais), as premissas do teorema, se existirem, e teoremas previamente provados. Axiomas podem ser descritos usando termos primitivos que não requerem definição, mas todos os outros termos utilizados em teoremas e suas demonstrações devem ser definidos. Regras de inferência, juntamente com as definições dos termos, são utilizadas para chegar a conclusões a partir de outras afirmações, unindo os passos da demonstração. Na prática, o passo final de uma demonstração é usualmente a conclusão do teorema. No entanto, para esclarecer, vamos freqüentemente retomar a sentença do teorema como o passo final de uma demonstração.

Um teorema menos importante que nos ajuda em uma demonstração de outros resultados é chamado de **lema** (plural *lemas* ou *lemata*). Demonstrações complicadas são usualmente mais fáceis de entender quando elas são demonstradas utilizando-se uma série de lemas, em que cada lema é demonstrado individualmente. Um **corolário** é um teorema que pode ser estabelecido diretamente de um teorema que já foi demonstrado. Uma **conjectura** é uma sentença que inicialmente é proposta como verdadeira, usualmente com base em alguma evidência parcial, um argumento heurístico ou a intuição de um perito. Quando uma demonstração de uma conjectura é achada, a conjectura se torna um teorema. Muitas vezes são verificadas que conjecturas são falsas, portanto elas não são teoremas.

Entendendo como Teoremas São Descritos

Exemplos Extras

Antes de introduzir métodos para demonstrar teoremas, precisamos entender como teoremas matemáticos são expostos. Muitos teoremas dizem que essa propriedade é assegurada para todos os elementos em um domínio, como os inteiros ou os números reais. Embora as sentenças precisas desses teoremas necessitem da inclusão de um quantificador universal, a convenção em matemática é omiti-la. Por exemplo, a sentença

"Se $x > y$, em que x e y são números reais positivos, então $x^2 > y^2$."

significa que

"Para todos os números reais positivos x e y, se $x > y$, então $x^2 > y^2$."

Entretanto, quando teoremas desse tipo são demonstrados, a propriedade da instanciação universal é freqüentemente usada sem ser explicitamente mencionada. O primeiro passo da demonstração usualmente envolve selecionar um elemento geral do domínio. Os passos subseqüentes mostram que esse elemento tem a propriedade em questão. Finalmente, a generalização universal implica que o teorema é válido para todos os membros do domínio.

Métodos de Demonstrações de Teoremas

Auto-avaliação

Vamos agora mudar nossa atenção para demonstração de teoremas matemáticos. Demonstrar teoremas pode ser difícil. Vamos precisar de toda a munição que tivermos para nos ajudar a demonstrar resultados diferentes. Vamos, então, introduzir uma bateria de métodos de demonstrações diferentes. Esses métodos podem se tornar parte de nosso repertório para demonstrar teoremas.

Para demonstrar um teorema da forma $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, nosso objetivo é mostrar que $P(c) \rightarrow Q(c)$ é verdadeira, em que c é um elemento arbitrário do domínio, e então aplicar a generalização universal. Nesta demonstração, precisamos mostrar que uma sentença condicional é verdadeira. Por isso, focalizaremos métodos que demonstram que condicionais são verdadeiras. Lembre-se de que $p \rightarrow q$ é verdadeira, a menos que p seja verdadeira e q seja falsa. Note que para a sentença $p \rightarrow q$ ser demonstrada, é necessário apenas mostrar que q é verdadeira se p é verdadeira. A seguinte discussão nos dará as técnicas mais comuns para demonstrar sentenças condicionais. Mais tarde vamos discutir métodos para demonstrar outros tipos de sentenças. Nesta seção e na Seção 1.7, vamos desenvolver um arsenal de muitas técnicas diferentes de demonstração, que podem ser usadas para demonstrar uma grande variedade de teoremas.

Quando você ler demonstrações, encontrará freqüentemente as palavras "obviamente" ou "claramente". Essas palavras indicam que passos foram omitidos e que o autor espera que o leitor seja capaz de fazê-los. Infelizmente, assumir isso nem sempre é interessante, pois os leitores não são todos capazes de fazer os passos nesses buracos das demonstrações. Vamos assiduamente tentar não usar essas palavras e não omitir muitos passos. No entanto, se concluirmos todos os passos em demonstrações, nossas demonstrações serão com freqüência exaustivamente longas.

Demonstrações Diretas

Uma **demonstração direta** de uma sentença condicional $p \rightarrow q$ é construída quando o primeiro passo é assumir que p é verdadeira; os passos subseqüentes são construídos utilizando-se regras de inferência, com o passo final mostrando que q deve ser também verdadeira. Uma demonstração direta mostra que uma sentença condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira mostrando que p é verdadeira, então q deve ser verdadeira, de modo que a combinação p verdadeira e q falsa nunca ocorre. Em uma demonstração direta, assumimos que p é verdadeira e usamos axiomas, definições e teoremas previamente comprovados, junto com as regras de inferência, para mostrar que q deve ser também verdadeira. Você verá que demonstrações diretas de muitos resultados são construídas de maneira direta, com uma seqüência óbvia de passos que levam da hipótese à conclusão. No entanto, demonstrações diretas algumas vezes requerem *insights* particulares e podem ser bastante astuciosas. As primeiras demonstrações diretas que vamos apresentar aqui são bastante óbvias; mais tarde veremos algumas menos óbvias.

Vamos dar muitos exemplos de demonstrações diretas. Mas, antes de darmos o primeiro exemplo, precisamos de uma definição.

DEFINIÇÃO 1 O inteiro n é *par* se existe um inteiro k tal que $n = 2k$, e n é *ímpar* se existe um inteiro k tal que $n = 2k + 1$. (Note que um inteiro é sempre par ou ímpar e nenhum inteiro é par e ímpar.)

EXEMPLO 1 Dê uma demonstração direta do teorema "Se n é um número inteiro ímpar, então n^2 *é ímpar*".

Solução: Note que este teorema diz $\forall nP((n) \to Q(n))$, em que $P(n)$ é "n é um inteiro ímpar" e $Q(n)$ é "n^2 *é ímpar*". Como dissemos, vamos seguir a convenção matemática usual para demonstrações, mostrando que $P(n)$ implica $Q(n)$, e não usando explicitamente instanciação universal. Para começar uma demonstração direta desse teorema, vamos assumir que a hipótese dessa sentença condicional é verdadeira, ou seja, assumimos que n é ímpar. Pela definição de número ímpar, temos que $n = 2k + 1$, em que k é algum inteiro. Queremos demonstrar que n^2 é também ímpar. Podemos elevar ao quadrado ambos os membros da equação $n = 2k + 1$ para obter uma nova equação que expresse n^2. Quando fizermos isso, teremos $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Pela definição de inteiro ímpar, concluímos que n^2 é ímpar (ele é um a mais que o dobro de um inteiro). Conseqüentemente, provamos que se n é um número inteiro ímpar, então n^2 é ímpar. ◀

Exemplos Extras

EXEMPLO 2 Dê uma demonstração direta de que se m e n são ambos quadrados perfeitos, então nm também é um quadrado perfeito. (Um inteiro a é um **quadrado perfeito** se existe um inteiro b tal que $a = b^2$.)

Solução: Para produzir uma demonstração direta desse teorema, assumimos que a hipótese dessa condicional é verdadeira, ou seja, assumimos que m e n são ambos quadrados perfeitos. Pela definição de quadrado perfeito, segue-se que existem inteiros s e t tal que $m = s^2$ e $n = t^2$. O objetivo da demonstração é mostrar que mn também deve ser um quadrado perfeito quando m e n o são; olhando adiante, vemos como podemos mostrar isto apenas multiplicando as duas equações $m = s^2$ e $n = t^2$. Isso mostra que $mn = s^2t^2$, o que implica que $mn = (st)^2$ (usando comutatividade e associatividade da multiplicação). Pela definição de quadrado perfeito, segue que mn também é um quadrado perfeito, pois é o quadrado de st, o qual também é um inteiro. Demonstramos que se m e n são ambos quadrados perfeitos, então mn também é um quadrado perfeito.

Demonstração por Contraposição

Demonstrações diretas vão da hipótese do teorema à sua conclusão. Elas começam com as premissas, continuam com uma seqüência de deduções e com a conclusão. No entanto, vamos ver que tentar fazer demonstrações diretas freqüentemente não tem um bom final. Precisamos de outros métodos para demonstrar teoremas da forma $\forall x(P(x) \to Q(x))$. Demonstrações de teoremas desse tipo que não são demonstrações diretas, ou seja, que não seguem das hipóteses e terminam com a conclusão, são chamadas de **demonstrações indiretas**.

Uma demonstração indireta extremamente usada é conhecida como **demonstração por contraposição**. Demonstrações por contraposição fazem uso do fato de que a sentença condicional $p \to q$ é equivalente a sua contrapositiva, $\neg q \to \neg p$, isto significa que uma sentença condicional

$p \to q$ pode ser demonstrada mostrando que sua contrapositiva, $\neg q \to \neg p$, é verdadeira. Em uma demonstração por contraposição de $p \to q$, vamos tomar $\neg q$ como uma hipótese, e usando axiomas, definições e teoremas previamente demonstrados, juntamente com regras de inferência, mostramos que $\neg p$ deve ser verdadeira. Vamos ilustrar demonstração por contraposição com dois exemplos. Esses exemplos mostram que demonstrações por contraposição podem ser bem-sucedidas quando não é fácil achar demonstrações diretas.

EXEMPLO 3 Demonstre que se n é um inteiro e $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar.

Exemplos Extras

Solução: Primeiro vamos olhar para uma demonstração direta. Para construir uma demonstração direta, devemos assumir que $3n + 2$ é um número ímpar. Isso significa que $3n + 2 = 2k + 1$ para algum inteiro k. Podemos usar esse fato para mostrar que n é ímpar? Vemos que $3n + 1 = 2k$, mas não parece ter algum meio direto para concluir que n é ímpar. Como nossa tentativa com demonstração direta falhou, vamos tentar uma demonstração por contraposição.

O primeiro passo em uma demonstração por contraposição é assumir que a conclusão da sentença condicional "Se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar" é falsa; assumimos que n é par. Então, pela definição de número par, $n = 2k$ para algum inteiro k. Substituindo $2k$ em n, chegamos a $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$. Isso nos diz que $3n + 2$ é par (pois é um múltiplo de 2), e logo não é ímpar. Isso é a negação da hipótese do teorema. Como a negação da conclusão da sentença condicional implica que a hipótese é falsa, a sentença original é verdadeira. Nossa demonstração por contraposição foi bem-sucedida; demonstramos que se n é um inteiro e $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar. ◀

EXEMPLO 4 Demonstre que se $n = ab$, em que a e b são inteiros positivos, então $a \le \sqrt{n}$ ou $b \le \sqrt{n}$.

Solução: Como não há um meio óbvio de mostrar que $a \le \sqrt{n}$ ou $b \le \sqrt{n}$ diretamente da equação $n = ab$, em que a e b são inteiros positivos, vamos tentar uma demonstração por contraposição.

O primeiro passo nesta demonstração é assumir que a conclusão da condicional "Se $n = ab$, em que a e b são inteiros positivos, então $a \le \sqrt{n}$ ou $b \le \sqrt{n}$" é falsa. Ou seja, assumir que a sentença $(a \le \sqrt{n}) \vee (b \le \sqrt{n})$ é falsa. Usando o significado da disjunção junto com a lei de De Morgan, vemos que isso implica que ambos $a \le \sqrt{n}$ e $b \le \sqrt{n}$ são falsas. Isso implica que $a > \sqrt{n}$ e $b > \sqrt{n}$. Podemos multiplicar essas inequações juntas (usando o fato de que se $0 < t$ e $0 < v$, então $su < tv$) para obter $ab > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$. Isso mostra que $ab \ne n$, o que contradiz a sentença $n = ab$.

Como a negação da conclusão da condicional implica que a hipótese é falsa, a sentença condicional original é verdadeira. Nossa demonstração por contraposição foi bem-sucedida; demonstramos que se $n = ab$, em que a e b são inteiros positivos, então $a \le \sqrt{n}$ ou $b \le \sqrt{n}$. ◀

DEMONSTRAÇÃO POR VACUIDADE E DEMONSTRAÇÃO POR TRIVIALIZAÇÃO Podemos rapidamente demonstrar que uma sentença condicional $p \to q$ é verdadeira quando sabemos que p é falsa, pois $p \to q$ deve ser verdadeira quando p é falsa. Conseqüentemente, se pudermos mostrar que p é falsa, então teremos uma demonstração, chamada de **demonstração por vacuidade**, da condicional $p \to q$. Demonstrações por vacuidade são empregadas para estabelecer casos especiais de teoremas que dizem que uma condicional é verdadeira para todos os números inteiros positivos [isto é, um teorema do tipo $\forall n P(n)$, em que $P(n)$ é uma função proposicional]. Técnicas de demonstração para esse tipo de teoremas serão discutidas na Seção 4.1.

EXEMPLO 5 Mostre que a proposição $P(0)$ é verdadeira, em que $P(n)$ é "Se $n > 1$, então $n^2 > n$" e o domínio consiste todos os inteiros.

Solução: Note que $P(0)$ é "Se $0 > 1$, então $0^2 > 0$". Podemos mostrar $P(0)$ utilizando-se uma demonstração por vacuidade, pois a hipótese $0 > 1$ é falsa. Isso nos diz que $P(0)$ é automaticamente verdadeira. ◀

Lembre-se: O fato de a conclusão desta sentença condicional, $0^2 > 0$, ser falsa é irrelevante para o valor-verdade da sentença condicional, pois uma condicional com uma hipótese falsa é diretamente verdadeira.

Podemos também demonstrar rapidamente que a condicional $p \to q$ é verdadeira se sabemos que a conclusão q é verdadeira. Mostrar que q é verdadeira faz com que $p \to q$ deva ser também verdadeira. Uma demonstração de $p \to q$ que usa o fato de que q é verdadeira é chamada de **demonstração por trivialização**. Demonstrações por trivialização são freqüentemente usadas e de grande importância quando demonstramos casos especiais de teoremas (veja a discussão de demonstrações por casos na Seção 1.7) e em indução matemática, que é uma técnica de demonstração discutida na Seção 4.1.

EXEMPLO 6 Seja $P(n)$ a proposição "Se a e b são inteiros positivos com $a \geq b$, então $a^n \geq b^n$", em que o domínio consiste em todos os inteiros. Mostre que $P(0)$ é verdadeira.

Solução: A proposição $P(0)$ é "Se $a \geq b$, então $a^0 \geq b^0$". Como $a^0 = b^0 = 1$, a conclusão da condicional é "Se $a \geq b$, então $a^0 \geq b^0$" é verdadeira. Portanto, a sentença condicional, que é $P(0)$, é verdadeira. Este é um exemplo de demonstração por trivialização. Note que a hipótese, a sentença "$a \geq b$", não foi necessária nesta demonstração. ◀

UM POUCO DE ESTRATÉGIA DE DEMONSTRAÇÃO Descrevemos dois importantes métodos para provar teoremas da forma $\forall x(P(x) \to Q(x))$: demonstração direta e demonstração por contraposição. Também demos exemplos que mostram como cada uma é usada. No entanto, quando você recebe um teorema da forma $\forall x(P(x) \to Q(x))$, que método você deve tentar usar para demonstrar? Vamos prover algumas regras rápidas aqui; na Seção 1.7 vamos discutir estratégias de demonstração com mais detalhes. Quando queremos demonstrar uma sentença da forma $\forall x(P(x) \to Q(x))$, primeiro devemos avaliar o que parece ser uma demonstração direta para esta sentença. Comece expandindo as definições da hipótese. Vá raciocinando sobre essas hipóteses, juntamente com os axiomas e os teoremas demonstrados. Se uma demonstração direta não aparecer em nenhuma situação, tente a mesma coisa com a contraposição. Lembre-se de que em uma demonstração por contraposição você assume que a conclusão é falsa e usa uma demonstração direta para mostrar que a hipótese deve ser falsa. Vamos ilustrar essa estratégia nos exemplos 7 e 8. Antes de apresentar nossos próximos exemplos, precisamos de uma definição.

DEFINIÇÃO 2 O número real r é *racional* se existem inteiros p e q com $q \neq 0$, tal que $r = p/q$. Um número real que não é racional é chamado de *irracional*.

EXEMPLO 7 Demonstre que a soma de dois números racionais é um racional. (Note que se incluirmos o quantificador implícito aqui, o teorema que queremos demonstrar é "Para todo número real r e todo real s, se r e s são números racionais, então $r + s$ é racional".)

Exemplos Extras

Solução: Primeiro tentemos uma demonstração direta. Para começar, suponha que r e s são racionais. Da definição de números racionais, segue que existem inteiros p e q, com $q \neq 0$, tal que $r = p/q$, e inteiros t e u, com $u \neq 0$, tal que $s = t/u$. Podemos usar essas informações para mostrar que $r + s$ é racional? O próximo passo é adicionar $r = p/q$ e $s = t/u$, para obter

$$r + s = \frac{p}{q} + \frac{t}{u} = \frac{pu + qt}{qu}.$$

Como $q \neq 0$ e $u \neq 0$, temos que $qu \neq 0$. Conseqüentemente, expressamos $r + s$ como a razão de dois inteiros, $pu + qt$ e qu, em que $qu \neq 0$. Isso significa que $r + s$ é racional. Demonstramos que a soma de dois números racionais é racional; nossa tentativa de achar uma demonstração direta foi bem-sucedida. ◀

EXEMPLO 8 Demonstre que se n é um número inteiro e n^2 *é ímpar*, então n é ímpar.

Solução: Primeiro tentaremos uma demonstração direta. Suponha que n é um inteiro e n^2 é ímpar. Então existe um inteiro k, tal que $n^2 = 2k + 1$. Podemos usar essa informação para mostrar que n é ímpar? Parece que não existe uma saída óbvia para mostrar que n é ímpar, pois, resolvendo a equação em n, temos $n = \pm\sqrt{2k+1}$, que não é interessante de trabalhar.

Como a tentativa de uma demonstração direta não rendeu frutos, tentaremos uma demonstração por contraposição. Tomaremos como hipótese a sentença n não é ímpar. Como todo inteiro é par ou ímpar, isso significa que n é par. E isso implica que existe um inteiro k, tal que $n = 2k$. Para demonstrar o teorema, devemos mostrar que essa hipótese implica a conclusão, ou seja, n^2 não é ímpar, ou ainda, que n^2 é par. Podemos usar a equação $n = 2k$ para determinar isso? Elevando ao quadrado ambos os membros da equação, obtemos $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, o que implica que n^2 é também par, pois $n^2 = 2t$, em que $t = 2k^2$. Demonstramos que se n é um número inteiro e n^2 é ímpar, então n é ímpar. Nossa tentativa de encontrar uma demonstração por contraposição foi bem-sucedida. ◄

Demonstração por Contradição

Suponha que queremos demonstrar que uma sentença p é verdadeira. Além disso, suponha que podemos achar uma contradição q tal que $\neg p \to q$ é verdadeira. Como q é falsa, mas $\neg p \to q$ é verdadeira, podemos concluir que $\neg p$ é falsa, o que significa que p é verdadeira. Como podemos encontrar uma contradição q que possa nos ajudar a demonstrar que p é verdadeira usando esse raciocínio?

Como a sentença $r \wedge \neg r$ é uma contradição qualquer que seja a proposição r, podemos demonstrar que p é verdadeira se pudermos mostrar que $\neg p \to (r \wedge \neg r)$ é verdadeira para alguma proposição r. Demonstrações desse tipo são chamadas de **demonstrações por contradição**. Como uma demonstração por contradição não mostra o resultado diretamente, esse é um outro tipo de demonstração indireta. Daremos três exemplos de demonstração por contradição. O primeiro é um exemplo de uma aplicação do princípio da casa dos pombos, uma técnica combinatória que vamos desenvolver profundamente na Seção 5.2.

EXEMPLO 9 Demonstre que ao menos 4 de 22 dias escolhidos devem cair no mesmo dia da semana.

Exemplos Extras

Solução: Seja p a proposição "Ao menos 4 dos 22 dias escolhidos caem no mesmo dia da semana". Suponha que $\neg p$ é verdadeira. Isso significa que no máximo 3 dos 22 dias caem no mesmo dia da semana. Como existem 7 dias na semana, isso implica que no máximo 21 dias podem ser escolhidos, pois, para cada dia da semana, podem ser escolhidos no máximo 3 dias que coincidem no mesmo dia da semana. Isso contradiz a hipótese que afirmava ter 22 dias considerados. Assim, se r é a sentença que diz que 22 dias foram escolhidos, então temos mostrado que $\neg p \to (r \wedge \neg r)$. Conseqüentemente, sabemos que p é verdadeira. Demonstramos que ao menos 4 de 22 dias escolhidos devem cair no mesmo dia da semana. ◄

EXEMPLO 10 Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional por meio de uma demonstração por contradição.

Solução: Seja p a proposição "$\sqrt{2}$ é irracional". Para começar uma demonstração por contradição, supomos que $\neg p$ é verdadeira. Note que $\neg p$ é a sentença "Não é o caso que $\sqrt{2}$ é irracional", o que diz que $\sqrt{2}$ é racional. Vamos demonstrar que, assumindo que $\neg p$ é verdadeira, chegaremos a uma contradição.

Se $\sqrt{2}$ é racional, existem inteiros a e b tal que $\sqrt{2} = a/b$, em que a e b não têm fator comum (então a fração a/b é irredutível). (Aqui, estamos usando o fato de que todo número racional pode ser escrito em uma fração irredutível.) Como $\sqrt{2} = a/b$, quando ambos os membros da equação são elevados ao quadrado, segue-se que

$$2 = a^2/b^2.$$

Portanto,

$$2b^2 = a^2.$$

Pela definição de número par segue-se que a^2 é par. Podemos usar o fato de que se a^2 é par, então a é par, o qual segue do Exercício 16. Mas se a é par, pela definição de número par, $a = 2c$ para algum inteiro c. Então,

$$2b^2 = 4c^2.$$

Dividindo ambos os membros dessa equação por 2, temos

$$b^2 = 2c^2.$$

Pela definição de par, isso significa que b^2 é par. Novamente usando o fato de que se o quadrado de um inteiro é par, então o inteiro também deve ser par, concluímos que b deve ser par também.

Agora mostramos que ter assumido $\neg p$ nos levou à equação $\sqrt{2} = a/b$, em que a e b não têm fator comum; mas a e b são pares, ou seja, 2 divide ambos os número a e b. Note que a sentença $\sqrt{2} = a/b$, em que a e b não têm fator comum, significa em particular que 2 não divide ambos a e b. Como ter assumido $\neg p$ nos levou à contradição de que 2 divide ambos a e b e 2 não divide ambos a e b, $\neg p$ deve ser falsa. Ou seja, a sentença p, "$\sqrt{2}$ é irracional", é verdadeira. Provamos que $\sqrt{2}$ é irracional. ◀

Demonstração por contradição pode ser usada para demonstrar condicionais. Nessas demonstrações, primeiro assumimos a negação da conclusão. Então, usamos as premissas do teorema e a negação da conclusão para chegar à contradição. (A razão pela qual essas demonstrações são válidas está na equivalência lógica $p \to q$ e $(p \wedge \neg q) \to \mathbf{F}$. Para ver que essas sentenças são equivalentes, simplesmente porque cada uma é falsa em exatamente um caso, quando p é verdadeira e q é falsa.)

Note que podemos reescrever uma demonstração por contraposição de uma sentença condicional como uma demonstração por contradição. Em uma demonstração de $p \to q$ por contraposição, assumimos que $\neg q$ é verdadeira. E, então, mostramos que $\neg p$ também deve ser verdadeira. Para reescrever uma demonstração por contraposição de $p \to q$ como uma demonstração por contradição, supomos que ambas p e $\neg q$ são verdadeiras. Então, usamos os passos de uma demonstração de $\neg q \to \neg p$ para mostrar que $\neg p$ é verdadeira. Isso nos leva à contradição $p \wedge \neg p$, completando a demonstração. O Exemplo 11 ilustra como uma demonstração por contraposição de uma condicional pode ser reescrita como uma demonstração por contradição.

EXEMPLO 11 Dê uma demonstração por contradição do teorema "Se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar".

Solução: Seja p a proposição "$3n + 2$ é ímpar" e q a proposição "n é ímpar". Para construir uma demonstração por contradição, assumimos que ambas p e $\neg q$ são verdadeiras. Ou seja, assumimos que $3n + 2$ é ímpar e que n não o é. Como n não é ímpar, sabemos que é par. Seguindo os passos da solução do Exemplo 3 (uma demonstração por contraposição), podemos mostrar que se n é par, então $3n + 2$ é par. Primeiro, como n é par, existe um inteiro k, tal que $n = 2k$. Isso implica que $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$. Como $3n + 2$ é $2t$, em que $t = 3k + 1$, $3n + 2$ é par. Note que a sentença "$3n + 2$ é par" é o mesmo que $\neg p$, pois um inteiro é par se e somente se não for ímpar. Como ambas p e $\neg p$ são verdadeiras, temos uma contradição. Isso completa a demonstração por contradição, demonstrando que se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar. ◀

Note que podemos também demonstrar por contradição que $p \to q$ é verdadeira, assumindo que p e $\neg q$ são verdadeiras, e mostrando que q deve ser também verdadeira. Isso implica que $\neg q$ e q são ambas verdadeiras, uma contradição. Essa observação nos diz que podemos tornar uma demonstração direta em uma demonstração por contradição.

DEMONSTRAÇÕES DE EQUIVALÊNCIAS Para demonstrar um teorema que é uma sentença bicondicional, ou seja, que é da forma $p \leftrightarrow q$, mostramos que $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ são ambas verdadeiras. A validade desse método baseia-se na tautologia

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)].$$

EXEMPLO 12 Prove o teorema "Se n é um inteiro positivo, então n é ímpar se e somente se n^2 for ímpar".

Solução: Esse teorema tem a forma "p se e somente se q", em que p é "n é ímpar" e q é "n^2 é ímpar". (Como usual, não explicitamos a expressão com quantificador universal.) Para demonstrar esse teorema, precisamos mostrar que $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ são verdadeiras.

Exemplos Extras

Já mostramos (no Exemplo 1) que $p \rightarrow q$ é verdadeira e (no Exemplo 8) que $q \rightarrow p$ é verdadeira.

Como evidenciamos que ambas $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ são verdadeiras, mostramos que o teorema é verdadeiro. ◀

Algumas vezes um teorema determina que muitas proposições são equivalentes. Esses teoremas determinam que as proposições $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ são equivalentes. Isso pode ser escrito por

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n,$$

que significa que todas as n proposições têm o mesmo valor-verdade e, conseqüentemente, que para todo i e j com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$, p_i e p_j são equivalentes. Uma maneira de demonstrar essa equivalência mutua é usar a tautologia

$$[p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n] \leftrightarrow [(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow p_1)].$$

Isso mostra que se as sentenças condicionais $p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, \ldots, p_n \rightarrow p_1$ podem ser demonstradas como verdadeiras, então as proposições $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são todas equivalentes.

Isso é muito mais eficiente que demonstrar que $p_i \rightarrow p_j$ para todo $i \neq j$ com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$.

Quando demonstramos que algumas sentenças são equivalentes, podemos estabelecer uma cadeia de sentenças condicionais que escolhermos tão grande quanto possível para trabalhar sobre essa cadeia e ir de qualquer uma dessas sentenças para outra. Por exemplo, podemos evidenciar que p_1, p_2 e p_3 são equivalentes mostrando que $p_1 \rightarrow p_3$, $p_3 \rightarrow p_2$ e $p_2 \rightarrow p_1$.

EXEMPLO 13 Demonstre que estas sentenças sobre o inteiro n são equivalentes:

p_1: n é par.
p_2: $n - 1$ é ímpar.
p_3: n^2 é par.

Solução: Vamos demonstrar que essas três sentenças são equivalentes mostrando que as condicionais $p_1 \rightarrow p_2$, $p_2 \rightarrow p_3$, e $p_3 \rightarrow p_1$ são verdadeiras.

Vamos usar uma demonstração direta para mostrar que $p_1 \rightarrow p_2$. Suponha que n é par. Então $n = 2k$ para algum inteiro k. Conseqüentemente, $n - 1 = 2k - 1 = 2(k - 1) + 1$. Isso significa que $n - 1$ é ímpar, pois é da forma $2m + 1$, em que m é o inteiro $k - 1$.

Também vamos usar uma demonstração direta para mostrar que $p_2 \rightarrow p_3$. Agora, suponha que $n - 1$ é ímpar. Então $n - 1 = 2k + 1$ para algum inteiro k. Portanto, $n = 2k + 2$, então, $n^2 = (2k + 2)^2 = 4k^2 + 8k + 4 = 2(2k^2 + 4k + 2)$. Isso significa que n^2 é o dobro do inteiro $2k^2 + 4k + 2$, e, portanto, é par.

Para demonstrar $p_3 \rightarrow p_1$, usaremos uma demonstração por contraposição. Ou seja, provamos que se n não é par, então n^2 não é par. Isso é o mesmo que demonstrar que se n é ímpar, então n^2 é ímpar, o que já demonstramos no Exemplo 1. Isso completa a demonstração. ◀

CONTRA-EXEMPLOS Na Seção 1.3, dissemos que, para demonstrar que uma sentença da forma $\forall x\, P(x)$ é falsa, precisamos apenas encontrar um **contra-exemplo**, que é um exemplo de x para o qual $P(x)$ é falsa. Quando recebemos uma sentença da forma $\forall x\, P(x)$, a qual acreditamos ser falsa ou não conseguimos demonstrar por nenhum método, procuramos por contra-exemplos. Vamos ilustrar o uso de contra-exemplos no Exemplo 14.

EXEMPLO 14 Mostre que a sentença “Todo inteiro positivo é a soma dos quadrados de dois inteiros” é falsa.

Exemplos Extras

Solução: Para mostrar que a sentença é falsa, procuramos um contra-exemplo, que será um inteiro que não é a soma dos quadrados de dois inteiros. Isso não vai demorar muito, pois 3 não pode ser escrito como a soma dos quadrados de dois inteiros. Para mostrar esse caso, note que os quadrados que não excedem 3 são $0^2 = 0$ e $1^2 = 1$. Mais que isso, não há como obter 3 da soma desses dois quadrados, com apenas dois termos. Conseqüentemente, mostramos que “Todo inteiro positivo é a soma dos quadrados de dois inteiros” é falsa. ◄

Erros em Demonstrações

Existem muitos erros comuns na construção de demonstrações matemáticas. Vamos brevemente descrever alguns deles aqui. Os erros mais comuns são erros em aritmética e álgebra básica. Até matemáticos profissionais cometem esses erros, especialmente quando estão trabalhando com fórmulas muito complicadas. Sempre que usarmos essas computações, ou passagens, devemos verificá-las tão cuidadosamente quanto possível. (Você deve também revisar os aspectos problemáticos da álgebra básica, principalmente antes de estudar a Seção 4.1.)

Links

Cada passo de uma demonstração matemática precisa ser correto e a conclusão precisa seguir logicamente os passos que a precedem. Muitos erros resultam da introdução de passos que não seguem logicamente aqueles que o precedem. Isso está ilustrado nos exemplos 15 a 17.

EXEMPLO 15 O que está errado com a famosa suposta “demonstração” de que $1 = 2$?

“Demonstração”: Usamos estes passos, em que a e b são dois inteiros positivos iguais

Passo	**Razão**
1. $a = b$	Dado
2. $a^2 = ab$	Multiplicando ambos os membros de (1) por a.
3. $a^2 - b^2 = ab - b^2$	Subtraindo b^2 de ambos os lados de (2)
4. $(a - b)(a + b) = b\,(a - b)$	Fatorando ambos os membros de (3)
5. $a + b = b$	Dividindo ambos os lados de (4) por $a - b$
6. $2b = b$	Substituindo a por b em (5), pois $a = b$, e simplificando
7. $2 = 1$	Dividindo ambos os membros de (6) por b

Solução: Todos os passos são válidos exceto um, o passo 5, onde dividimos ambos os lados por $a - b$. O erro está no fato de $a - b$ ser zero; dividir ambos os lados de uma equação pela mesma quantidade é válido se essa quantidade não é zero. ◄

EXEMPLO 16 O que está errado com a “demonstração”?

“Teorema”: Se n^2 é positivo, então n é positivo.

"Demonstração": Suponha que n^2 é positivo. Como a sentença condicional "Se n é positivo, então n^2 é positivo" é verdadeira, podemos concluir que n é positivo.

Solução: Seja $P(n)$ a proposição "n é positivo" e $Q(n)$, "n^2 é positivo". Então nossa hipótese é $Q(n)$. A sentença "*Se n* é positivo, então n^2 é positivo*"* é a sentença $\forall n(P(n) \rightarrow Q(n))$. Da hipótese $Q(n)$ e da sentença $\forall n(P(n) \rightarrow Q(n))$ não podemos concluir que $P(n)$, pois não estamos usando uma regra válida de inferência. Pelo contrário, este é um exemplo da falácia de afirmação da conclusão. Um contra-exemplo é dado por $n = -1$ para o qual $n^2 = 1$ é positivo, mas n é negativo. ◀

EXEMPLO 17 O que está errado com a "demonstração"?

> "Teorema": Se n não é positivo, então n^2 não é positivo. (Esta é a contrapositiva do "teorema" no Exemplo 16.)

"Demonstração": Suponha que n não é positivo. Como a sentença condicional "Se n é positivo, então n^2 é positivo" é verdadeira, podemos concluir que n^2 não é positivo.

Solução: Sejam $P(n)$ e $Q(n)$ as proposições do Exemplo 16. Então nossa hipótese é $\neg P(n)$ e a sentença "Se n é positivo, então n^2 é positivo" é a sentença $\forall n(P(n) \rightarrow Q(n))$. Da hipótese $\neg P(n)$ e da sentença $\forall n(P(n) \rightarrow Q(n))$ não podemos concluir que $\neg Q(n)$, pois não estamos usando uma regra válida de inferência. Ao contrário, este é um exemplo da falácia de negação da hipótese. Um contra-exemplo é dado por $n = -1$, como no Exemplo 16. ◀

Finalmente, vamos discutir um tipo de erro particularmente desonesto. Muitos argumentos baseiam-se em uma falácia chamada de **carregando a pergunta.** Essa falácia ocorre quando um ou mais passos da demonstração fundamentam-se na sentença que está sendo demonstrada. Em outras palavras, essa falácia aparece quando uma sentença é demonstrada utilizando-se a própria sentença. Esse é o motivo pelo qual essa falácia é também chamada de **raciocínio circular**.

EXEMPLO 18 O argumento seguinte está correto? Ele supostamente mostra que n é um inteiro par sempre que n^2 é um inteiro par.

> Suponha que n^2 é par. Então $n^2 = 2k$ para algum inteiro k. Seja $n = 2l$ para algum inteiro l. Isso mostra que n é par.

Solução: Este argumento é incorreto. A sentença "Seja $n = 2l$ para algum inteiro l*"* ocorre na demonstração. Nenhum argumento foi dado para demonstrar que n pode ser escrito como $2l$ para algum inteiro l. Este é um raciocínio circular, pois essa sentença é equivalente à sentença que está sendo demonstrada, "n é par". É claro que o resultado está correto; apenas o método de demonstração está errado. ◀

Cometer erros nas demonstrações faz parte do processo de aprendizado. Quando você comete um erro que alguém encontra, você deve analisar cuidadosamente onde está errando e garantir que não cometerá mais o mesmo erro. Matemáticos profissionais também cometem erros em demonstrações. Algumas demonstrações incorretas de importantes resultados enganaram as pessoas por anos antes de os erros serem encontrados.

Só um Começo

Temos agora desenvolvido um arsenal básico de métodos de demonstrações. Na próxima seção, vamos introduzir outros métodos de demonstração importantes. Também vamos introduzir muitas técnicas importantes de demonstração no Capítulo 4, incluindo indução matemática ou indução matemática, que pode ser usada para demonstrar resultados que valem para todos os inteiros positivos. No Capítulo 5, vamos introduzir a noção de demonstrações combinatórias.

Nesta seção, introduzimos muitos métodos para demonstrar teoremas da forma $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, incluindo demonstrações diretas e demonstrações por contraposição. Existem muitos teoremas desse tipo que têm suas demonstrações facilmente construídas pelo método direto através de hipóteses e definições de termos do teorema. No entanto, é freqüentemente difícil demonstrar um teorema sem utilizar uma demonstração por contraposição ou uma demonstração por contradição, ou alguma outra técnica de demonstração. Na Seção 1.7, vamos direcionar estratégias de demonstrações. Vamos descrever várias possibilidades que podem ser usadas para encontrar demonstrações quando o método direto não funciona. Construir demonstrações é uma arte que só pode ser aprendida através da experiência, incluindo escrever demonstrações, ter uma demonstração sua criticada e ler e analisar demonstrações.

Exercícios

1. Use uma demonstração direta para mostrar que a soma de dois números inteiros ímpares é par.

2. Use uma demonstração direta para mostrar que a soma de dois números inteiros pares é par.

3. Mostre que o quadrado de um número par é um número par, usando a demonstração direta.

4. Mostre que o inverso aditivo, ou negativo, de um número par é um número par, usando a demonstração direta.

5. Demonstre que se $m + n$ e $n + p$ são números inteiros pares, em que m, n e p são números inteiros, então $m + p$ é par. Que tipo de demonstração você utilizou?

6. Use uma demonstração direta para mostrar que o produto de dois números ímpares é ímpar.

7. Use uma demonstração direta para mostrar que todo número inteiro ímpar é a diferença de dois quadrados.

8. Demonstre que se n é um quadrado perfeito, então $n + 2$ não é um quadrado perfeito.

9. Use um demonstração por contradição para provar que a soma de um número irracional e um racional é irracional.

10. Use uma demonstração direta para mostrar que o produto de dois números racionais é racional.

11. Demonstre ou contrarie que o produto de dois números irracionais é irracional.

12. Demonstre ou contrarie que o produto de um número racional diferente de zero e um número irracional é irracional.

13. Demonstre que se x é irracional, então $1/x$ é irracional.

14. Demonstre que se x é racional e $x \neq 0$, então $1/x$ é racional.

15. Use uma demonstração por contraposição para mostrar que se $x + y \geq 2$, em que x e y são números reais, então $x \geq 1$ ou $y \geq 1$.

☞ **16.** Demonstre que se m e n são números inteiros e mn é par, então m *é par* ou n é par.

17. Mostre que se n é um número inteiro e $n^3 + 5$ é ímpar, então n é par, usando:

a) uma demonstração por contraposição.

b) uma demonstração por contradição.

18. Demonstre que se n é um número inteiro e $3n + 2$ é par, então n é par, usando:

a) uma demonstração por contraposição.

b) uma demonstração por contradição.

19. Demonstre a proposição $P(0)$, em que $P(n)$ é a proposição "Se n é um número inteiro positivo maior que 1, então $n^2 > n$". Qual tipo de demonstração você utilizou?

20. Demonstre a proposição $P(1)$, em que $P(n)$ é a proposição "Se n é um número inteiro positivo, então $n^2 \geq n$". Qual tipo de demonstração você utilizou?

21. Assuma $P(n)$ como a proposição "Se a e b são números reais positivos, então $(a + b)^n \geq a^n + b^n$". Comprove que $P(1)$ é verdadeira. Qual tipo de demonstração você utilizou?

22. Mostre que se você pegar 3 meias de uma gaveta, com apenas meias azuis e pretas, você deve pegar ou um par de meias azuis ou um par de meias pretas.

23. Mostre que pelo menos 10 de quaisquer 64 dias escolhidos devem cair no mesmo dia da semana.

24. Mostre que pelo menos 3 de quaisquer 25 dias escolhidos devem cair no mesmo mês do ano.

25. Use uma demonstração por contradição para mostrar que não há um número racional r para que $r^3 + r + 1 = 0$. [*Dica:* Assuma que $r = a/b$ seja uma raiz, em que a e b são números inteiros e a/b é o menor termo. Obtenha uma equação que envolva números inteiros, multiplicando-os por b^3. Então, veja se a e b são pares ou ímpares.]

26. Demonstre que se n é um número inteiro positivo, então n é par se e somente se $7n + 4$ for par.

27. Demonstre que se n é um número inteiro positivo, então n é ímpar se e somente se $5n + 6$ for ímpar.

28. Demonstre que $m^2 = n^2$ se e somente se $m = n$ ou $m = -n$.

29. Demonstre ou contrarie que se m e n são números inteiros, tal que $mn = 1$, então ou $m = 1$ e $n = 1$, ou $m = -1$ e $n = -1$.

30. Mostre que essas três proposições são equivalentes, em que a e b são números reais: (*i*) a é menor que b, (*ii*) a média de a e b é maior que a, e (*iii*) a média de a e b é menor que b.

31. Mostre que essas proposições sobre o número inteiro x são equivalentes: (*i*) $3x + 2$ é par, (*ii*) $x + 5$ é ímpar, (*iii*) x^2 é par.

32. Mostre que essas proposições sobre o número real x são equivalentes: (i) x é racional, (ii) $x/2$ é racional, e (iii) $3x - 1$ é racional.

33. Mostre que essas proposições sobre o número real x são equivalentes: (i) x é irracional, (ii) $3x + 2$ é irracional, (iii) $x/2$ é irracional.

34. Esta é a razão para encontrar as soluções da equação $\sqrt{2x^2 - 1} = x$ correta? (1) $\sqrt{2x^2 - 1} = x$ é dado; (2) $2x^2 - 1 = x^2$, obtido pelo quadrado dos dois lados de (1); (3) $x^2 - 1 = 0$, obtido pela subtração de x^2 dos dois lados de (2); (4) $(x - 1)(x + 1) = 0$, obtido pela fatoração do lado esquerdo de $x^2 - 1$; (5) $x = 1$ ou $x = -1$, confirmado, pois $ab = 0$ implica que $a = 0$ ou $b = 0$.

35. Os passos abaixo para encontrar as soluções de $\sqrt{x + 3} = 3 - x$ são corretos? (1) $\sqrt{x + 3} = 3 - x$ é dado; (2) $x + 3 = x^2 - 6x + 9$, obtido tirando a raiz quadrada dos dois lados de (1); (3) $0 = x^2 - 7x + 6$, obtido pela subtração de $x + 3$ dos dois lados de (2); (4) $0 = (x - 1)(x - 6)$, obtido pela fatoração do lado direito de (3); (5) $x = 1$ ou $x = 6$, tirado de (4) porque $ab = 0$ implica que $a = 0$ ou $b = 0$.

36. Comprove que as proposições p_1, p_2, p_3 e p_4 podem ser equivalentes mostrando que $p_1 \leftrightarrow p_4$, $p_2 \leftrightarrow p_3$ e $p_1 \leftrightarrow p_3$.

37. Mostre que as proposições p_1, p_2, p_3, p_4 e p_5 podem ser equivalentes, demonstrando que as proposições condicionais $p_1 \rightarrow p_4$, $p_3 \rightarrow p_1$, $p_4 \rightarrow p_2$, $p_2 \rightarrow p_5$ e $p_5 \rightarrow p_3$ são verdadeiras.

38. Encontre um contra-exemplo para a proposição: todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma dos quadrados de três números inteiros.

39. Comprove que pelo menos um dos números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é maior que ou igual ao valor da média desses números. Que tipo de demonstração você utilizou?

40. Use o Exercício 39 para mostrar que se os primeiros 10 números inteiros positivos forem colocados em círculo, em qualquer ordem, haverá três números inteiros, em localização consecutiva no círculo, que terão uma soma maior que ou igual a 17.

41. Comprove que se n é um número inteiro, estas quatro proposições são equivalentes: (i) n é par, (ii) $n + 1$ é ímpar, (iii) $3n + 1$ é ímpar, (iv) $3n$ é par.

42. Comprove que estas quatro proposições sobre o número inteiro n são equivalentes: (i) n^2 é ímpar, (ii) $1 - n$ é par, (iii) n^3 é ímpar, (iv) $n^2 + 1$ é par.

1.7 Métodos de Demonstração e Estratégia

Introdução

Auto-avaliação

Na Seção 1.6 introduzimos uma variedade de métodos de demonstrações e ilustramos como cada método pode ser usado. Nesta seção vamos continuar neste esforço. Vamos introduzir muitos outros importantes métodos de demonstrações, incluindo demonstrações em que consideramos diferentes casos separadamente e demonstrações em que comprovamos a existência de objetos com determinada propriedade desejada.

Na Seção 1.6 apenas discutimos brevemente a estratégia por trás da construção das demonstrações. Essa estratégia inclui a seleção de um método de demonstrações e então a construção com sucesso de um argumento passo a passo, com base nesse método. Nesta seção, depois que tivermos desenvolvido um grande arsenal de métodos de demonstração, vamos estudar alguns aspectos adicionais da arte e da ciência das demonstrações. Vamos prover avanços em como encontrar demonstrações trabalhando de trás para frente e adaptando demonstrações existentes.

Quando matemáticos trabalham, eles formulam conjecturas e tentam comprová-las ou tentam encontrar um contra-exemplo. Vamos brevemente descrever esse processo aqui, comprovando resultados sobre ladrilhar tabuleiros de xadrez com dominós ou outros tipos de peças. Olhando para esse método de ladrilhar, podemos ser capazes de rapidamente formular conjecturas e comprovar teoremas sem que tenhamos desenvolvido uma teoria.

Vamos concluir a seção discutindo o papel das questões abertas. Em particular, vamos discutir alguns problemas interessantes que apenas foram resolvidos depois de permanecerem abertos por centenas de anos ou porque ainda estão abertos.

Demonstração por Exaustão e Demonstração por Casos

Algumas vezes, não podemos comprovar um teorema usando um único argumento que satisfaça todos os casos possíveis. Vamos agora introduzir um método que pode ser usado para comprovar teoremas, considerando diferentes casos separadamente. Esse método baseia-se em uma regra de inferência que vamos introduzir agora. Para comprovar uma sentença condicional da forma

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q$$

a tautologia

$$[(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q] \leftrightarrow [(p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)]$$

pode ser usada como regra de inferência. Isso mostra que o condicional original com a hipótese formada por uma disjunção das proposições $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pode ser comprovada verificando-se cada uma das n condicionais $p_i \to q$, $i = 1, 2, \ldots, n$, individualmente. Esse argumento é chamado de **demonstração por casos**. Algumas vezes para comprovar que uma sentença condicional $p \to q$ é verdadeira, é conveniente usar a disjunção $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ em vez de p como hipótese da sentença condicional, em que p e $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ são equivalentes.

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO Alguns teoremas podem ser comprovados examinando-se um número relativamente pequeno de exemplos. Essas demonstrações são chamadas de **demonstrações por exaustão**, pois procedem pela exaustão de todas as possibilidades. Uma demonstração por exaustão é um tipo especial de demonstração por casos em que cada caso envolve apenas a demonstração de um simples exemplo. Vamos ver algumas ilustrações de demonstrações por exaustão.

EXEMPLO 1 Comprove que $(n + 1)^2 \geq 3^n$ se n é um inteiro positivo com $n \leq 4$.

Exemplos Extras

Solução: Vamos usar a demonstração por exaustão. Apenas precisamos verificar que a inequação $(n + 1)^2 \geq 3^n$ é verdadeira quando $n = 1, 2, 3$ e 4. Para $n = 1$, temos $(n + 1)^2 = 2^2 = 4$ e $3^n = 3^1 = 3$; para $n = 2$, temos $(n + 1)^2 = 3^2 = 9$ e $3^n = 3^2 = 9$; para $n = 3$, temos $(n + 1)^3 = 4^3 = 64$ e $3^n = 3^3 = 27$; e para $n = 4$, temos $(n + 1)^3 = 5^3 = 125$ e $3^n = 3^4 = 81$. Em cada um dos quatro casos, vemos que $(n + 1)^2 \geq 3^n$. Usamos o método de demonstração por exaustão para demonstrar que $(n + 1)^2 \geq 3^n$ se n é um número inteiro positivo com $n \leq 4$. ◀

EXEMPLO 2 Demonstre que os únicos inteiros positivos consecutivos não excedendo 100 que são potências perfeitas são 8 e 9. (Um inteiro é uma **potência perfeita** se for igual a n^a, em que a é um inteiro maior que 1.)

Solução: Podemos demonstrar esse fato mostrando que o único par n, $n + 1$ de inteiros positivos consecutivos que são potências perfeitas com $n < 100$ ocorre quando $n = 8$. Podemos demonstrar esse fato examinando os números inteiros positivos n não excedendo 100; primeiro verificamos quando n é uma potência perfeita e, se for, verificamos se $n + 1$ também o é. O método mais rápido para fazer isto é simplesmente olhar para todas as potências perfeitas não excedendo 100. Os quadrados que não excedem 100 são 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100. Os cubos que não excedem 100 são 1, 8, 27 e 64. As quartas potências que não excedem 100 são 1, 16 e 81. As quintas potências que não excedem 100 são 1 e 32. As sextas potências de números inteiros que não excedem 100 são 1 e 64. Não existem outras potências maiores que as sextas que excedam 100, exceto o número 1. Olhando para essa lista de potências, vemos que $n = 8$ é a única potência perfeita para a qual $n + 1$ também é uma potência perfeita. Ou seja, $2^3 = 8$ e $3^2 = 9$ são as únicas duas potências perfeitas consecutivas que não excedem 100. ◀

Podemos recorrer às demonstrações por exaustão apenas quando é necessário verificar um número relativamente pequeno de instâncias da sentença. Computadores não se incomodam quando é pedido para verificar um número muito grande de instâncias, mas eles têm limitações. Note que nenhum computador pode verificar todas as instâncias quando é impossível listar todas as possibilidades.

DEMONSTRAÇÕES POR CASOS Uma demonstração por casos deve cobrir todos as possibilidades que aparecem no teorema. Ilustramos demonstrações por casos com alguns exemplos. Em cada exemplo, você deve verificar que são cobertos todos os casos possíveis.

EXEMPLO 3 Demonstre que se n é um inteiro, então $n^2 \geq n$.

Solução: Podemos demonstrar que $n^2 \geq n$ para todos os inteiros considerando três casos, quando $n = 0$, quando $n \geq 1$ e quando $n \leq -1$. Dividimos a demonstração em três casos, pois é rápido demonstrar o resultado considerando zero, inteiros positivos e inteiros negativos separadamente.

Caso (i). Quando $n = 0$, como $0^2 = 0$, vemos que $0^2 \geq 0$. Disso segue que $n^2 \geq n$ é verdadeira nesse caso.

Exemplos Extras

Caso (ii). Quando $n \geq 1$, quando multiplicamos ambos os membros da inequação $n \geq 1$ pelo número inteiro positivo n, obtemos $n \cdot n \geq n \cdot 1$. Isso implica que $n^2 \geq n$ para $n \geq 1$.

Caso (iii). Nesse caso, $n \leq -1$. No entanto, $n^2 \geq 0$. Disso segue que $n^2 \geq n$.

Como a inequação $n^2 \geq n$ é verdadeira para os três casos, podemos concluir que se n é um inteiro, então $n^2 \geq n$. ◀

EXEMPLO 4 Use uma demonstração por casos para mostrar que $|xy| = |x||y|$, em que x e y são números reais. (Lembre-se de que $|a|$, o valor absoluto de a, é igual a a quando $a \geq 0$ e igual a $-a$ quando $a \leq 0$.)

Solução: Em nossa demonstração desse teorema, vamos remover os valores absolutos usando o fato de que $|a| = a$ quando $a \geq 0$ e $|a| = -a$ quando $a < 0$. Como ambos $|x|$ e $|y|$ ocorrem em nossa fórmula, vamos precisar de quatro casos: *(i)* x e y ambos não negativos, *(ii)* x não negativo e y negativo, *(iii)* x negativo e y não negativo e *(iv)* x negativo e y negativo.

(Note que podemos remover o valor absoluto, fazendo a escolha apropriada dos sinais em cada caso.)

Caso (i). Vemos que $p_1 \to q$, pois $xy \geq 0$ quando $x \geq 0$ e $y \geq 0$, então $|xy| = xy = |x||y|$.

Caso (ii). Para ver que $p_2 \to q$, note que se $x \geq 0$ e $y < 0$, então $xy \leq 0$, logo $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$. (Aqui, como $y < 0$, temos $|y| = -y$.)

Caso (iii). Para ver que $p_3 \to q$, seguimos o mesmo raciocínio como no caso anterior com os papéis de x e y invertidos.

Caso (iv). Para ver que $p_4 \to q$, note que quando $x < 0$ e $y < 0$, daí segue que $xy > 0$. Logo, $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.

Como completamos os quatro casos e esses casos são todas as possibilidades, podemos concluir que $|xy| = |x||y|$, sempre que x e y são números reais. ◀

ALAVANCANDO DEMONSTRAÇÕES POR CASOS Os exemplos que apresentamos para ilustrar demonstrações por casos proveram algum *insight* sobre quando usar esse método de demonstração. Em particular, quando não é possível tratar todos os casos ao mesmo tempo, uma demonstração por casos deve ser considerada. Mas quando usar essa demonstração? Geralmente, tentar uma demonstração por casos quando não existe um meio óbvio de começar a demonstração, mas também quando informações extras de cada caso podem ser usadas para seguir a demonstração. O Exemplo 5 ilustra como o método de demonstrações por casos pode ser usado efetivamente.

EXEMPLO 5 Formule uma conjectura sobre os dígitos decimais que ocorrem como algarismo das unidades nos quadrados de um número inteiro e demonstre seu resultado.

Solução: Os menores quadrados perfeitos são 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, e assim por diante. Notamos que os dígitos que ocorrem com algarismos das unidades dos quadrados são 0, 1, 4, 5, 6 e 9, com 2, 3, 7 e 8 não aparecendo como o último dígito dos quadrados. Conjeturamos este teorema: O último dígito decimal de um quadrado perfeito é 0, 1, 4, 5, 6 ou 9. Como podemos demonstrar esse teorema?

Primeiro, note que podemos expressar um inteiro n como $10a + b$, em que a e b são inteiros positivos e b é 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Aqui, a é o inteiro obtido quando subtraímos o algarismo decimal final do n de n e dividimos por 10. Depois, note que $(10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = 10(10a^2 + 2b) + b^2$, então o algarismo final de n^2 é o mesmo algarismo final de b^2. Além disso, note-se que o dígito decimal final de b^2 é o mesmo dígito final de $(10 - b)^2 = 100 - 20b + b^2$. Conseqüentemente, podemos reduzir nossa demonstração em seis casos.

Caso (i). O dígito final de n é 1 ou 9. Então o dígito decimal final de n^2 é o dígito decimal final de $1^2 = 1$ ou $9^2 = 81$, ou seja, 1.
Caso (ii). O dígito final de n é 2 ou 8. Então o dígito decimal final de n^2 é o dígito decimal final de $2^2 = 4$ ou $8^2 = 64$, ou seja, 4.
Caso (iii). O dígito final de n é 3 ou 7. Então o dígito decimal final de n^2 é o dígito decimal final de $3^2 = 9$ ou $7^2 = 49$, ou seja, 9.
Caso (iv). O dígito final de n é 4 ou 6. Então o dígito decimal final de n^2 é o dígito decimal final de $4^2 = 16$ ou $6^2 = 36$, ou seja, 6.
Caso (v). O dígito final de n é 5. Então o dígito decimal final de n^2 é o dígito decimal final de $5^2 = 25$, ou seja, 5.
Caso (vi). O dígito final de n é 0. Então o dígito decimal final de n^2 é o dígito decimal final de $0^2 = 0$, ou seja, 0.

Como consideramos todos os seis casos, podemos concluir que o dígito decimal final de n^2 em que n é um número inteiro, é 0, 1, 2, 4, 5, 6 ou 9. ◀

Às vezes, podemos eliminar alguns dos casos, restando poucos exemplos, como o Exemplo 6 ilustra.

EXEMPLO 6 Mostre que não existem soluções inteiras para x e y de $x^2 + 3y^2 = 8$.

Solução: Podemos rapidamente reduzir a demonstração apenas verificando poucos casos, pois $x^2 > 8$ quando $|x| \geq 3$ e $3y^2 > 8$ quando $|y| \geq 2$. Disso restam os casos em que x toma um dos valores $-2, -1, 0, 1$ ou 2 e y toma um dos valores $-1, 0$, ou 1. Podemos terminar usando uma demonstração exaustiva. Para economizar com os casos restantes, notamos que x^2 só pode ser 0, 1 ou 4, e os possíveis valores de $3y^2$ são 0 e 3, logo vemos que a maior soma possível para os valores de x^2 e $3y^2$ é 7. Conseqüentemente, é impossível termos $x^2 + 3y^2 = 8$ com x e y inteiros. ◀

SEM PERDA DE GENERALIDADE Na demonstração do Exemplo 4, dispensamos o caso (*iii*), em que $x < 0$ e $y \geq 0$, pois é o mesmo que o caso (*ii*), em que $x \geq 0$ e $y < 0$, com os papéis de x e y invertidos. Para encurtar a demonstração, pudemos demonstrar os casos (*ii*) e (*iii*) juntos, assumindo, **sem perda de generalidade**, que $x \geq 0$ e $y < 0$. Implícito nessa sentença está o fato de que podemos provar o caso com $x < 0$ e $y \geq 0$, usando o mesmo argumento utilizado para o caso com $x \geq 0$ e $y < 0$, mas com as mudanças óbvias. Em geral, quando a frase "sem perda de generalidade" é usada em uma demonstração, queremos dizer que demonstrando um caso do teorema, nenhum argumento adicional é necessário para demonstrar o outro caso especificado. Ou seja, o outro caso segue o mesmo argumento, com as mudanças necessárias. É claro que o uso incorreto desse princípio pode levar a erros desafortunados. Às vezes assume-se que não perderemos a generalidade, mas isso leva à perda de generalidade. Esses erros podem ser cometidos por não levarmos em conta que um caso é substancialmente diferente dos outros. Isso pode levar a uma demonstração incompleta ou, possivelmente, errada. De fato, muitas demonstrações incorretas de famosos teoremas tinham seus erros em argumentos que usavam a idéia de "sem perda de generalidade" para demonstrar casos que não poderiam ser rapidamente demonstrados a partir de casos mais simples.

Vamos agora ilustrar uma demonstração em que "sem perda de generalidade" é usada efetivamente.

EXEMPLO 7 Mostre que $(x + y)^r < x^r + y^r$ quaisquer que sejam x e y reais positivos e r é um número real com $0 < r < 1$.

Solução: Sem perda de generalidade, podemos assumir que $x + y = 1$. [Para ver isso, suponha que tenhamos demonstrado o teorema, assumindo que $x + y = 1$. Suponha que $x + y = t$. Então $(x/t) + (y/t) = 1$, o que implica que $((x/t) + (y/t))^r < (x/t)^r + (y/t)^r$. Multiplicando-se ambos os lados dessa última equação por t^r, mostramos que $(x + y)^r < x^r + y^r$.]

Assumindo que $x + y = 1$, como x e y são positivos, temos $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$. Como $0 < r < 1$, segue que $0 < 1 - r < 1$, portanto $x^{1-r} < 1$ e $y^{1-r} < 1$. Isso significa que $x < x^r$ e $y < y^r$. Conseqüentemente, $x^r + y^r > x + y = 1$. Isso significa que $(x + y)^r = 1^r < x^r + y^r$. Isso demonstra o teorema para $x + y = 1$.

Como assumimos $x + y = 1$ sem perda de generalidade, sabemos que $(x + y)^r < x^r + y^r$ quaisquer que sejam x e y reais positivos e r é um número real com $0 < r < 1$. ◀

ERROS COMUNS COM DEMONSTRAÇÕES EXAUSTIVAS E DEMONSTRAÇÕES POR CASOS Um erro comum de raciocínio é tirar conclusões incorretas dos exemplos. Não importa quantos exemplos separados são considerados, um teorema não é demonstrado considerando-se exemplos, a menos que todos os possíveis casos sejam cobertos. O problema de demonstrar um teorema é análogo a mostrar que um programa de computador sempre fornece a saída desejada. Não importa quantos valores de entrada são testados, a menos que todos os valores sejam testados, não podemos concluir que o programa sempre produz a saída correta.

EXEMPLO 8 É verdade que todo número inteiro positivo é a soma de 18 quartas potências de inteiros?

Solução: Para determinar quando n pode ser escrito como a soma de 18 quartas potências de inteiros, devemos começar examinando quando n é a soma de 18 quartas potências de inteiros para o menor inteiro positivo. Como as quatro primeiras quartas potências são 0, 1, 16, 81, . . . , se pudermos selecionar 18 termos desses que adicionados resultam n, então n é a soma de 18 quartas potências. Podemos mostrar que todos os números inteiros positivos até o 78 podem ser escritos como a soma de 18 quartas potências. (Os detalhes são deixados para o leitor.) No entanto, se decidirmos que já é o bastante, podemos chegar a uma conclusão errada. Pois não é verdade que todo inteiro positivo pode ser escrito como a soma de 18 quartas potências de inteiros, uma vez que 79 não pode ser escrito como essa soma (como o leitor pode verificar). ◀

Outro erro comum envolve fazer afirmações não garantidas que levam a demonstrações por casos incorretas em que nem todos os casos são considerados. Isso é ilustrado no Exemplo 9.

EXEMPLO 9 O que está errado com esta "demonstração"?

"Teorema": Se x é um número real, então x^2 é um número real positivo.

"Demonstração": Seja p_1 "x é positivo", seja p_2 "x é negativo" e seja q "x^2 é positivo". Para mostrar que $p_1 \to q$ é verdadeira, note que quando x é positivo, x^2 é positivo, pois é o produto de dois números positivos, x e x. Para mostrar que $p_2 \to q$, note que, quando x é negativo, x^2 é positivo, pois é o produto de dois números negativos, x e x. Isso completa a demonstração.

Solução: O problema com a demonstração que demos está no fato de não notarmos o caso $x = 0$. Quando $x = 0$, $x^2 = 0$ não é positivo, portanto o suposto teorema é falso. Se p é "x é um número real", então podemos demonstrar resultados em que p é a hipótese com três casos, p_1, p_2 e p_3, em que p_1 é "x é positivo", p_2 é "x é negativo" e p_3 é "$x = 0$" uma vez que temos a equivalência $p \leftrightarrow p_1 \vee p_2 \vee p_3$. ◀

Demonstrações de Existência

Muitos teoremas são afirmações de que determinados objetos de certo tipo existem. Um teorema desse tipo é uma proposição da forma $\exists x\, P(x)$, em que P é um predicado. Uma demonstração de uma proposição da forma $\exists x\, P(x)$ é chamada de **demonstração de existência**. Existem muitos meios de demonstrar um teorema desse tipo. Às vezes, uma demonstração de existência de $\exists x\, P(x)$ pode ser dada encontrando-se um elemento a tal que $P(a)$ é verdadeira. Essas demonstrações de existência são chamadas de **construtivas**. Também é possível dar uma demonstração de existência que seja **não construtiva**; ou seja, não encontramos um elemento a tal que $P(a)$ é verdadeira, mas podemos provar que $\exists x\, P(x)$ é verdadeira de alguma outra maneira. Um método comum de fornecer uma demonstração de existência não construtiva é usar a demonstração por contradição e mostrar que a negação da quantificação existencial implica uma contradição. O conceito de demonstração construtiva de existência é ilustrado no Exemplo 10 e o conceito de não construtiva, no Exemplo 11.

EXEMPLO 10 **Demonstração de Existência Construtiva** Mostre que existe um inteiro positivo que pode ser escrito como a soma de cubos de duas maneiras diferentes.

Exemplos Extras

Solução: Depois de considerável trabalho (tal como uma procura computacional), encontramos

$$1.729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3.$$

Como mostramos um inteiro positivo que pode ser escrito como a soma de cubos de dois modos diferentes, está feito. ◀

EXEMPLO 11 **Demonstração de Existência Não Construtiva** Mostre que existem números irracionais x e y, tal que x^y *é* racional.

Solução: De acordo com o Exemplo 10 na Seção 1.6, sabemos que $\sqrt{2}$ é irracional. Considere o número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Se ele é racional, temos dois números irracionais x e y com x^y racional, ou seja, $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2}$. Por outro lado, se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é irracional, então podemos tomar $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}$, logo $x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = \sqrt{2}^2 = 2$.

Esta demonstração é um exemplo de demonstração de existência não construtiva, pois não encontramos números irracionais x e y, tal que x^y é racional. No entanto, mostramos que ou o par $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ ou o par $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{2}$ tem a propriedade desejada, mas não mostramos para qual dos dois pares isso funciona! ◀

Demonstrações não construtivas de existência são delicadas, como o Exemplo 12 ilustra.

EXEMPLO 12 **Chomp** é um jogo para dois jogadores. Nesse jogo, biscoitos são dispostos em uma grade retangular. O biscoito na ponta esquerda é envenenado, como mostra a Figura 1(a). Os dois jogadores fazem movimentos alternadamente, um tem de comer um biscoito restante, junto com todos os biscoitos à direita e/ou abaixo deste (veja a Figura 1(b), por exemplo). O perdedor é o jogador que não tiver escolha e tiver de comer o biscoito envenenado. Perguntamos se um dos dois jogadores pode ter uma estratégia vencedora. Ou seja, pode um jogador sempre fazer movimentos que garantam a ele a vitória?

Links

Solução: Vamos dar uma demonstração de existência não construtiva de uma estratégia vencedora para o primeiro jogador. Ou seja, vamos mostrar que o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora sem descrevê-la explicitamente.

Primeiro, note que o jogo tem um fim e não pode terminar empatado porque, com cada movimento, ao menos um biscoito é comido; portanto, depois de $m \times n$, o jogo chega ao fim, em

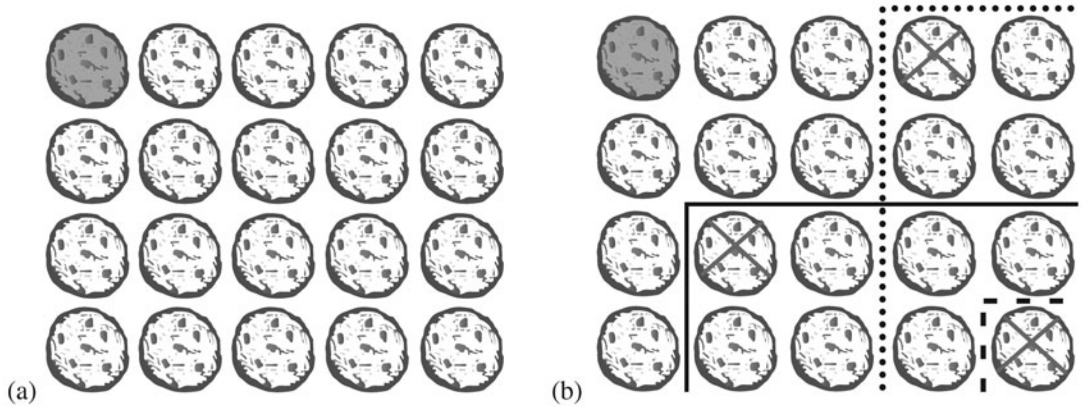


FIGURA 1 **(a) Chomp, o Biscoito na Ponta Superior Esquerda é Envenenado (b) Três Movimentos Possíveis**

que a grade original é $m \times n$. Agora, suponha que o primeiro jogador comece o jogo comendo exatamente o biscoito no canto direito inferior. Existem duas possibilidades, esse é o primeiro movimento de uma estratégia vencedora para o primeiro jogador ou o segundo jogador pode fazer uma jogada que seja o primeiro movimento de uma estratégia vencedora para o segundo jogador. Nesse segundo caso, em vez de comer o biscoito no canto inferior direito, o primeiro jogador poderia ter feito o mesmo movimento que o segundo jogador fez como seu primeiro movimento de uma estratégia vencedora (e então continuar seguindo aquela estratégia vencedora). Isso garantiria uma vitória para o primeiro jogador.

Note que mostramos que uma estratégia vencedora existe, mas não especificamos uma tal estratégia. Conseqüentemente, a demonstração é não construtiva. De fato, ninguém foi capaz de descrever uma estratégia vencedora para o Chomp que se aplique para todas as grades retangulares, e descreva os movimentos que o primeiro jogador deve seguir. No entanto, estratégias vencedoras podem ser descritas para determinados casos especiais, como quando a grade é quadrada e quando tem apenas duas linhas de biscoitos (veja os exercícios 15 e 16 na Seção 4.2). ◀

Demonstrações de Unicidade

Alguns teoremas afirmam a existência de um único elemento com uma determinada propriedade. Em outras palavras, esses teoremas afirmam que existe exatamente um elemento com essa propriedade. Para demonstrar uma sentença desse tipo, precisamos mostrar que um elemento com essa propriedade existe e que nenhum outro elemento tem essa propriedade. As duas partes de uma **demonstração de unicidade** são:

Existência: Mostramos que um elemento x com a propriedade desejada existe.
Unicidade: Mostramos que se $y \neq x$, então y não tem a propriedade desejada.

Equivalentemente, podemos mostrar que se x e y têm ambos essa propriedade, então $x = y$.

Observação: Mostrar que existe um único elemento x, tal que $P(x)$ é o mesmo que demonstrar a sentença $\exists x(P(x) \wedge \forall y(y \neq x \rightarrow \neg P(y)))$.

Vamos ilustrar os elementos de uma demonstração de unicidade no Exemplo 13.

EXEMPLO 13 Mostre que se a e b são números reais e $a \neq 0$, então existe um único número real r, tal que $ar + b = 0$.

Solução: Primeiro, note que o número real $r = -b/a$ é uma solução para $ar + b = 0$, pois $a(-b/a) + b = -b + b = 0$. Conseqüentemente, um número real r existe para o qual $ar + b = 0$. Esta é a parte de existência da demonstração.

Segundo, suponha que s é um número real, tal que $as + b = 0$. Então, $ar + b = as + b$, em que $r = -b/a$. Subtraindo b de ambos os lados, encontramos $ar = as$. Dividindo ambos os lados dessa última equação por a, que não é zero, vemos $r = s$. Isso significa que se $s \neq r$, então $as + b \neq 0$. Isso estabelece a parte da unicidade da demonstração. ◄

Exemplos Extras

Estratégias de Demonstração

Encontrar demonstrações pode ser um trabalho desafiador. Quando você é confrontado com uma sentença para demonstrar, você deve primeiro substituir os termos por suas definições e, então, cuidadosamente analisar o que as hipóteses e a conclusão significam. Depois disso, você pode tentar demonstrar o resultado usando um dos métodos de demonstração avaliados. Geralmente, se a sentença é uma sentença condicional, você deve primeiro tentar uma demonstração direta; se esta

Links

GODFREY HAROLD HARDY (1877–1947) Hardy, nascido em Cranleigh, Surrey, Inglaterra, foi o mais velho de dois filhos de Isaac Hardy e Sophia Hall Hardy. Seu pai era mestre em geografia e desenho pela Escola de Cranleigh e também dava aulas de canto e jogava futebol. Sua mãe dava aulas de piano e mantinha uma pensão para jovens estudantes. Os pais de Hardy eram devotos da educação de seus filhos. Hardy demonstrou suas habilidades com números com apenas dois anos de idade, quando começou a desenhar números em milhões. Ele teve um tutor em matemática em vez de freqüentar a escola regular. Foi para a Winchester College, escola de segundo grau particular, aos 13 anos ao ganhar uma bolsa de estudos. Ele era um excelente aluno e demonstrou um intenso interesse por matemática. Hardy entrou para o Trinity College, Cambridge, em 1896, com uma bolsa de estudos e ganhou vários prêmios durante o tempo que passou por lá, graduando-se em 1899.

Hardy manteve o cargo de professor em matemática na Trinity College, na Cambridge University, de 1906 a 1919, quando foi indicado para a cadeira de geometria de Sullivan, em Oxford. Ele ficou descontente com Cambridge por causa da demissão do famoso filósofo e matemático Bertrand Russell, do Trinity, pelas atividades antibélicas, e não apoiava algumas atitudes administrativas tomadas. Em 1931, ele retornou a Cambridge como professor de matemática pura, onde permaneceu até sua aposentadoria em 1942. Ele foi um matemático purista e manteve uma visão elitista da matemática, esperando que sua pesquisa nunca fosse aplicada.

Ironicamente, Hardy é talvez o mais conhecido dos criadores da lei Hardy–Weinberg, que predita os modelos de herança. Seu trabalho nessa área aparece como uma carta no periódico *Science,* no qual ele usa as idéias de álgebra simples para demonstrar os erros em um artigo sobre genética. Hardy trabalhou primeiramente com a teoria de números e função, explorando alguns tópicos como a função zeta de Riemann, séries de Fourier e a distribuição dos números primos. Ele fez muitas contribuições importantes a destacados problemas, como os de Waring sobre a representação dos números inteiros positivos como soma da k-ésima potência e o problema da representação dos números inteiros ímpares como a soma de três primos. Hardy é também lembrado pelas suas colaborações com John E. Littlewood, colega de trabalho com quem escreveu mais de 100 artigos, e com o famoso matemático indiano prodígio Srinivasa Ramanujan. Sua colaboração com Littlewood formou a piada de que existiam apenas três matemáticos importantes naquela época, Hardy, Littlewood e Hardy–Littlewood, embora algumas pessoas pensassem que Hardy teria inventado uma pessoa fictícia, Littlewood, porque Littlewood era muito pouco visto fora de Cambridge. Hardy teve a sabedoria de reconhecer a genialidade de Ramanujan a partir de escritos não convencionais, mas extremamente criativos enviados por Ramanujan para ele, enquanto outros matemáticos falharam nesta tarefa. Hardy trouxe Ramanujan para Cambridge, e ele colaborou em importantes artigos, estabelecendo novos resultados no número de partições de números inteiros. Hardy se interessava pela educação matemática, e seu livro *Um Curso de Matemática Pura* teve um grande efeito na educação primária e secundária em matemática na primeira metade do século XX. Hardy também escreveu *Uma Apologia de um Matemático*, em que ele deu sua resposta à pergunta de que se vale a pena devotar a vida ao estudo da matemática. Neste livro é apresentada a visão dele do que é matemática e o que ela faz.

Hardy teve um grande interesse por esportes. Ele era um fã ávido de críquete e acompanhava os resultados de perto. Em uma determinada partida em que ele estava, tiraram uma foto dele da qual não gostou (apenas cinco fotos são conhecidas), além disso, não gostava de espelhos, cobrindo-os com uma toalha imediatamente ao entrar em um quarto de hotel.

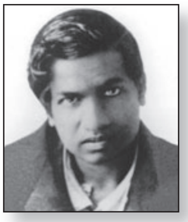
NOTA HISTÓRICA O matemático inglês G. H. Hardy, quando visitava o indiano prodígio Ramanujan no hospital, contou-lhe que se lembrara do número 1.729, o número de táxis que tomara, que era bastante estúpido. Ramanujan respondeu: “Não; é um número muito interessante; é o menor número que pode ser expresso como a soma dos cubos de duas formas diferentes”.

falhar, você pode tentar uma demonstração indireta. Se nenhuma dessas tentativas funcionar, você deve tentar uma demonstração por contradição.

RACIOCÍNIO DIRETO E PARA TRÁS Qualquer que seja o método escolhido, você precisa de um ponto de partida para sua demonstração. Para começar uma demonstração direta de uma sentença condicional, comece com as premissas. Usando estas premissas, juntamente com os axiomas e conhecendo teoremas, você pode construir uma demonstração usando uma seqüência de passos que nos leva à conclusão. Esse tipo de raciocínio, chamado de *raciocínio direto*, é o tipo mais comum de raciocínio usado para demonstrar resultados relativamente simples. Similarmente, com raciocínios indiretos, você pode começar com a negação da conclusão e, usando uma seqüência de passos, obter a negação das premissas.

Infelizmente, raciocínio direto é com freqüência difícil de usar para demonstrar resultados mais complicados, pois os raciocínios necessários para alcançar a conclusão desejada podem estar distantes do óbvio. Nesses casos pode ser interessante usar um *raciocínio para trás*. Raciocinando de trás para frente para demonstrar uma sentença q, achamos uma sentença p que pode demonstrar a propriedade que $p \rightarrow q$. (Note que isso não ajuda a encontrar uma sentença r que você pode demonstrar que $q \rightarrow r$, pois esta é uma falácia de carregar a pergunta para concluir de $q \rightarrow r$ e r que q é verdadeira.) Raciocínios de trás para frente serão ilustrados nos exemplos 14 e 15.

Links



SRINIVASA RAMANUJAN (1887–1920) Famoso prodígio matemático, Ramanujan nasceu e foi criado no sul da Índia, próximo à cidade de Madras (agora chamada de Chennai). Seu pai era balconista em uma loja de roupas. Sua mãe contribuía com a renda familiar cantando em um templo local. Ramanujan estudou em uma escola de língua inglesa, expondo seu talento e interesse pela matemática. Com 13 anos, ele usava um livro de teoria para universitários. Quando ele tinha 15 anos, um universitário deu-lhe uma cópia de *Sinopse da Matemática Pura*. Ramanujan decidiu trabalhar com os mais de 6 mil resultados do livro, declarados sem demonstração ou explicação, escrevendo tudo em folhas depois coletadas em um livro de anotações. Terminou o colegial em 1904 e ganhou uma bolsa de estudos para a Universidade de Madras. Inscrito em um currículo de artes finas, ele não freqüentava suas aulas e assistia às aulas de matemática, o que o fez perder sua bolsa. Ele não passou nos exames na universidade quatro vezes, de 1904 a 1907, indo bem apenas em matemática. Durando esse tempo, ele completava seu caderno de anotações com escritos originais, algumas vezes redescobrindo trabalhos já publicados e, em outras, fazendo novas descobertas.

Sem um diploma universitário, era difícil para Ramanujan conseguir um emprego decente. Para sobreviver, ele dependia de ajuda de amigos. Ele foi tutor de estudantes em matemática, mas suas maneiras não convencionais de pensar e sua falta de conhecimento do programa de ensino causavam-lhe problemas. Ele casou-se em 1909, um casamento arranjado com uma garota 9 anos mais nova que ele. Por precisar sustentar a nova família, mudou-se para Madras e foi atrás de um emprego. Ele mostrava suas anotações matemáticas aos empregadores em potencial, mas elas os transtornavam. Entretanto, um professor da Presidency College reconheceu sua genialidade e o apoiou e, em 1912, ele conseguiu um emprego como gerente de contas, ganhando um pequeno salário.

Ramanujan continuou seu trabalho matemático durante esse tempo e publicou seu primeiro artigo em 1910 em um periódico indiano. Ele percebeu que seu trabalho ía além daquilo já feito pelos matemáticos indianos e decidiu escrever aos matemáticos ingleses. O primeiro matemático a quem escreveu, recusou seu pedido de ajuda. Mas, em janeiro de 1913, ele escreveu a G. H. Hardy, que estava inclinado a recusar Ramanujan, mas as proposições matemáticas em sua carta, sem demonstrações, chamaram a atenção de Hardy. Ele decidiu examiná-las de perto com a ajuda de seu colega e colaborador J. E. Littlewood. Eles decidiram, depois de um estudo minucioso, que Ramanujan era provavelmente um gênio, porque suas proposições "poderiam ser escritas apenas por um matemático de alto nível; elas devem ser verdadeiras, porque se forem falsas, ninguém poderia ter a imaginação de inventá-las".

Hardy conseguiu uma bolsa de estudos para Ramanujan, trazendo-o para a Inglaterra, em 1914. Hardy pessoalmente o auxiliou na análise matemática e eles trabalharam juntos por 5 anos, provando teoremas significativos sobre o número de partições de inteiros. Durante esse tempo, Ramanujan fez importantes contribuições para a teoria dos números e também trabalhou com frações, séries infinitas e funções elípticas. Ramanujan teve várias idéias que envolviam determinados tipos de funções e séries, mas suas suposições de teoremas de números primos estavam geralmente erradas. Isso ilustra sua vaga idéia do que constitui uma demonstração correta. Ele foi um dos membros mais novos que se juntou à Irmandade da Sociedade Real. Infelizmente, em 1917, Ramanujan ficou muito doente. Nesta época, pensou-se que ele estava tendo problemas com o clima inglês e tivesse contraído tuberculose. Sabe-se agora que ele sofria de deficiência de uma vitamina, uma vez que Ramanujan era vegetariano. Ele retornou para a Índia em 1919, continuando seus estudos em matemática mesmo quando estava confinado em sua cama. Ele era religioso e acreditava que seu talento matemático procedia da divindade de sua família, Namagiri. Ramanujan considerava a matemática e a religião como que entrelaçadas. Ele dizia que "uma equação para mim não tem significado a menos que expresse um pensamento de Deus". Sua curta vida veio ao final em abril de 1920, quando ele tinha 32 anos de idade. Ramanujan deixou muitas anotações com resultados não publicados. Os escritos nesses cadernos mostram os pensamentos de Ramanujan, mas são limitados. Muitos matemáticos devotaram anos de estudo para explicar e justificar os resultados dos cadernos.

EXEMPLO 14 Dados dois números reais positivos x e y, sua **média aritmética** é $(x + y)/2$ e sua **média geométrica** é $\sqrt{xy}$. Quando comparamos essas médias para pares de números reais positivos distintos, vemos que a média aritmética é sempre maior que a geométrica. [Por exemplo, quando $x = 4$ e $y = 6$, temos $5 = (4 + 6)/2 > \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24}$.] Podemos demonstrar que essa inequação é sempre verdadeira?

Solução: Para demonstrar que $(x + y)/2 > \sqrt{xy}$ quando x e y são números reais distintos, podemos pensar de trás para frente. Construímos a seqüência de inequações equivalentes. As inequações equivalentes são:

$$
\begin{aligned}
(x + y)/2 &> \sqrt{xy},\\
(x + y)^2/4 &> xy,\\
(x + y)^2 &> 4xy,\\
x^2 + 2xy + y^2 &> 4xy,\\
x^2 - 2xy + y^2 &> 0,\\
(x - y)^2 &> 0.
\end{aligned}
$$

Exemplos Extras

Como $(x - y)^2 > 0$ quando $x \neq y$, segue que a inequação final é verdadeira. Como todas essas inequações são equivalentes, segue que $(x + y)/2 > \sqrt{xy}$ quando $x \neq y$. Uma vez que fizemos esse raciocínio, podemos facilmente reverter os passos para construir uma demonstração usando um raciocínio direto. Daremos agora esta demonstração.

Suponha que x e y são números reais distintos. Então $(x - y)^2 > 0$, pois o quadrado de um número diferente de zero é positivo (veja Apêndice 1). Como $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, isso implica que $x^2 - 2xy + y^2 > 0$. Adicionando $4xy$ em ambos os lados, obtemos $x^2 + 2xy + y^2 > 4xy$. Como $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, isso significa que $(x + y)^2 \geq 4xy$. Dividindo ambos os membros dessa equação por 4, vemos que $(x + y)^2/4 > xy$. Finalmente, tomando raízes quadradas dos dois lados (o que preserva a inequação, pois ambos os lados são positivos), temos $(x + y)/2 > \sqrt{xy}$. Concluímos que se x e y são números reais positivos, então sua média aritmética $(x + y)/2$ é maior que sua média geométrica $\sqrt{xy}$. ◀

EXEMPLO 15 Suponha que duas pessoas participem de um jogo, e que cada um na sua vez toma uma, duas ou três pedras de uma pilha que contém 15 pedras. A pessoa que remove a última pedra ganha o jogo. Mostre que o primeiro jogador pode ganhar, não importando o que o segundo jogador faça.

Solução: Para comprovar que o primeiro jogador pode sempre ganhar o jogo, podemos pensar de trás para frente. No último passo, o primeiro jogador pode ganhar se sobrar uma pilha com uma, duas ou três pedras. O segundo jogador será forçado a deixar uma, duas ou três pedras se ele tiver de jogar com uma pilha que contém quatro pedras. Conseqüentemente, uma maneira de o primeiro jogador ganhar é deixar quatro pedras para o segundo jogador na sua penúltima jogada. O primeiro jogador pode deixar quatro pedras quando existirem cinco, seis ou sete na pilha que o segundo jogador deixou, o que acontecerá quando o segundo jogador fizer seu movimento em uma pilha com oito pedras. Conseqüentemente, para forçar o segundo jogador a deixar cinco, seis ou sete pedras, o primeiro jogador deve deixar oito pedras para o segundo na sua antipenúltima jogada. Isso significa que deve ter nove, dez ou onze pedras para esta jogada. Similarmente, o segundo jogador deve deixar doze pedras quando fizer sua primeira jogada. Podemos reverter este argumento para mostrar que o primeiro jogador deve sempre fazer jogadas para ganhar o jogo, qualquer que sejam as jogadas do segundo. Essas jogadas sucessivamente deixam doze, oito e quatro pedras para o segundo. ◀

ADAPTANDO DEMONSTRAÇÕES DE EXISTÊNCIA Uma excelente maneira de procurar por possíveis métodos que podem ser usados para demonstrar uma sentença é tomar vantagem das demonstrações de existência. Freqüentemente, uma demonstração de existência pode ser adaptada para demonstrar um novo resultado. Mesmo quando esse não é o caso, alguma idéia da demonstração de existência pode ser usada para ajudar. Como demonstrações de existência nos dão dicas para novas demonstrações, você deve ler e entender essas demonstrações quando encontrá-las em seus estudos. Esse processo é ilustrado no Exemplo 16.

EXEMPLO 16 No Exemplo 10 da Secção 1.6, demonstramos que $\sqrt{2}$ é irracional. Agora, conjecturamos que $\sqrt{3}$ é irracional. Podemos adaptar a demonstração do Exemplo 10 da Seção 1.6 para mostrar que $\sqrt{3}$ é irracional?

Exemplos Extras

Solução: Para adaptar a demonstração do Exemplo 10 da Seção 1.6, começamos imitando os passos da demonstração, mas substituindo $\sqrt{2}$ por $\sqrt{3}$. Primeiro, supomos que $\sqrt{3} = d/c$ em que a fração c/d é irredutível. Elevando ambos os lados ao quadrado, temos $3 = c^2/d^2$, logo $3d^2 = c^2$. Podemos usar essa equação para mostrar que 3 deve ser um fator de c e d, similar a como usamos a equação $2b^2 = a^2$ no Exemplo 10 da Seção 1.6 para mostrar que 2 deveria ser um fator de a e b? (Lembre-se de que um inteiro s é um fator de um inteiro t se t/s for um inteiro. Um inteiro n é par se e somente se 2 for um fator de n.) Sim, podemos, mas precisamos de mais alguma munição da teoria dos números, que vamos desenvolver no Capítulo 3. Vamos terminar a demonstração, mas deixaremos as justificativas desses passos para o Capítulo 3. Como 3 é um fator de c^2, este deve ser um fator de c. Mais que isso, como 3 é um fator de c, 9 deve ser um fator de c^2, o que significa que 9 é um fator de $3d^2$. Isso implica que 3 é um fator de d^2, o que significa que 3 é um fator de d. Isso mostra que 3 é um fator de c e d, o que é uma contradição. Depois de termos certeza das justificativas desses passos, teremos mostrado que $\sqrt{3}$ é irracional pela adaptação da demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional. Note que esta demonstração pode ser estendida para mostrar que $\sqrt{n}$ é irracional sempre que n for um inteiro positivo que não é um quadrado perfeito. Deixaremos estes detalhes para o Capítulo 3. ◀

Uma boa dica é procurar demonstrações de existência que você pode adaptar quando for confrontado com a demonstração de um novo teorema, particularmente quando o novo teorema parece semelhante a um que você já demonstrou.

Procurando Contra-exemplos

Na Seção 1.5, introduzimos o uso de contra-exemplos para mostrar que determinadas sentenças são falsas. Quando confrontado com uma conjectura, você deve primeiro tentar demonstrar essa conjectura, e, se suas tentativas não tiverem sucesso, você deve tentar encontrar um contra-exemplo. Se você não conseguir um contra-exemplo, deve tentar demonstrar a sentença. De qualquer forma, procurar contra-exemplos é extremamente importante, pois freqüentemente nos dá algum *insight* sobre o problema. Vamos ilustrar o papel dos contra-exemplos com alguns exemplos.

EXEMPLO 17 No Exemplo 14 da Seção 1.6, mostramos que a sentença "Todo inteiro positivo é a soma de dois quadrados de inteiros" é falsa, encontrando um contra-exemplo. Ou seja, existem inteiros positivos que não podem ser escritos como a soma de dois quadrados de inteiros. Portanto, não podemos escrever todos os inteiros como a soma de quadrados de dois números inteiros, mas talvez possamos escrever todo número inteiro como a soma dos quadrados de três números inteiros. Ou seja, a sentença "Todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma dos quadrados de três números inteiros" é verdadeira ou falsa?

Exemplos Extras

Solução: Como sabemos mostrar que nem todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma de dois quadrados de inteiros, devemos inicialmente ser céticos sobre todo inteiro poder ser escrito como a soma de três quadrados de inteiros. Portanto, vamos primeiro procurar por um contra-exemplo. Ou seja, podemos mostrar que a sentença "Todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma dos quadrados de três números inteiros" é falsa se encontrarmos um inteiro que não seja a soma de quadrados de três inteiros. Para encontrar um contra-exemplo, tentamos escrever a sucessão dos inteiros como a soma de três quadrados. Vemos que $1 = 0^2 + 0^2 + 1^2$, $2 = 0^2 + 1^2 + 1^2$, $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$, $4 = 0^2 + 0^2 + 2^2$, $5 = 0^2 + 1^2 + 2^2$, $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$, mas não podemos encontrar um modo de escrever 7 como a soma de três quadrados. Para mostrar que não existem três quadrados que somados resultem 7, notemos que os únicos quadrados possíveis que podemos usar menores que 7 são 0, 1 e 4. Como não existe soma de três termos que resulte 7 com essas parcelas, segue-se que 7 é um contra-exemplo. Concluímos que a sentença "Todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma dos quadrados de três números inteiros" é falsa.

Mostramos que nem todo inteiro positivo pode ser escrito como a soma de quadrados de três inteiros. A próxima pergunta deve ser se podemos escrever todos os inteiros positivos como a soma de quatro quadrados de inteiros. Alguma experimentação mostra evidências de que sim. Por exemplo, $7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$, $25 = 4^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$ e $87 = 9^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$. Isso nos faz conjecturar que "Todo inteiro positivo é a soma dos quadrados de quatro inteiros" é verdadeira. Para uma demonstração, veja [Ro05]. ◄

Estratégia de Demonstração em Ação

A matemática é geralmente concebida como se fatos matemáticos estivessem cravados em pedras. Textos de matemática (incluindo este livro) apresentam formalmente teoremas e suas demonstrações. Essas apresentações não nos levam a descobrir o processo matemático. Esse processo começa com a exploração de conceitos e exemplos, fazendo perguntas, formulando conjecturas e tentando valorar essas conjecturas com uma demonstração ou com contra-exemplos. Essas são as atividades do dia-a-dia de um matemático. Acredite ou não, o material apresentado em livros é originalmente concebido dessa forma.

Pessoas formulam conjecturas com base em muitos tipos de evidência. O exame de casos especiais pode nos levar a uma conjectura, como a identificação de possíveis modelos. Alterando hipóteses e conclusões de teoremas conhecidos também podemos ser levados a conjecturas plausíveis. Em outros tempos, conjecturas eram feitas com base na intuição, na crença de que um resultado era verdadeiro. Independentemente de como uma conjectura foi feita, uma vez formulada, o objetivo é demonstrar que é verdadeira ou falsa. Quando um matemático acredita que uma conjectura deve ser verdadeira, ele tenta encontrar uma demonstração. Se não consegue encontrá-la, deve procurar por um contra-exemplo. Quando não encontra um contra-exemplo, deve tornar atrás e tentar provar a conjectura novamente. Embora muitas conjecturas sejam verificadas rapidamente, algumas resistem por centenas de anos e levam ao desenvolvimento de novas partes da matemática. Vamos mencionar algumas famosas conjecturas mais tarde, nesta seção.

Ladrilhando

Podemos ilustrar os aspectos de estratégia de demonstrações através de um breve estudo sobre como fazer coberturas de um tabuleiro de xadrez, como se colocássemos ladrilhos em um piso. Olhando para esse processos, podemos rapidamente descobrir e demonstrar muitos resultados diferentes, usando vários métodos de demonstração. Existe um sem-número de conjecturas que pode ser feito e estudado nessa área. Para começar, precisamos definir alguns termos. Um **tabuleiro de xadrez** é um retângulo dividido em quadrados de mesmo tamanho em linhas horizontais e verticais. O jogo de xadrez é jogado em um tabuleiro com 8 linhas e 8 colunas; esse tabuleiro será chamado de **tabuleiro standard** e é mostrado na Figura 2. Nesta seção, usaremos o termo **tabuleiro** para representar qualquer quadriculado de qualquer tamanho, como, por exemplo, as partes do tabuleiro de xadrez obtidas pela retirada de um ou mais quadrados. Um **dominó** é uma peça retangular formada por dois quadrados, como mostra a Figura 3. Dizemos que um tabuleiro está **ladrilhado** por dominós quando todos os seus quadrados estão cobertos sem haver dominós sobrepostos nem dominós com partes para fora do tabuleiro. Agora podemos desenvolver alguns resultados sobre ladrilhamento de tabuleiros usando dominós.

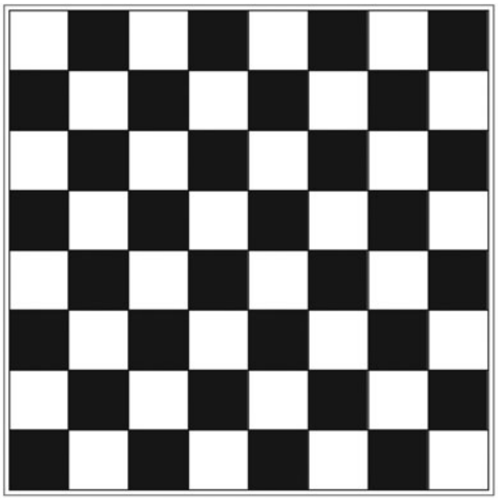


FIGURA 2 **O Tabuleiro Standard.**

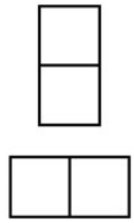


FIGURA 3
Dois Dominós.

EXEMPLO 18 Podemos ladrilhar um tabuleiro standard usando dominós?

Solução: Podemos encontrar muitas maneiras de ladrilhar um tabuleiro standard usando dominós. Por exemplo, podemos ladrilhá-lo colocando 32 dominós horizontais, como mostra a Figura 4. A existência de uma tal situação completa a demonstração construtiva de existência. É claro que existe um grande número de maneiras para fazer essa cobertura. Podemos colocar 32 dominós verticais no tabuleiro ou podemos colocar alguns verticais e outros horizontais. Contudo, para uma demonstração de existência construtiva, precisamos encontrar apenas uma tal situação. ◀

EXEMPLO 19 Podemos ladrilhar um tabuleiro obtido pela remoção de um dos cantos de um tabuleiro standard?

Exemplos Extras

Solução: Para responder a essa questão, note que um tabuleiro standard tem 64 quadrados, portanto, removendo um quadrado, teremos um tabuleiro com 63 quadrados. Agora, suponha que possamos ladrilhar o tabuleiro obtido. O tabuleiro deve ter um número par de quadrados, pois cada dominó cobre dois quadrados e não existem dominós sobrepostos nem que ultrapassam as bordas do tabuleiro. Conseqüentemente, demonstramos por contradição que um tabuleiro de xadrez com um de seus quadrados removidos não pode ser ladrilhado usando dominós, pois esse tabuleiro tem um número ímpar de quadrados. ◀

Agora considere uma situação mais ardilosa.

EXEMPLO 20 Podemos ladrilhar um tabuleiro obtido pela retirada do quadrado superior esquerdo e do inferior direito de um tabuleiro standard, mostrado na Figura 5?

Solução: Um tabuleiro obtido pela retirada de dois quadrados de um tabuleiro standard contém $64 - 2 = 62$ quadrados. Como 62 é par, não podemos dizer imediatamente que não existe essa situação, como fizemos no Exemplo 19, em que demonstramos que não existia um ladrilhamento de um tabuleiro com um quadrado removido. Procurar construir um ladrilhamento desse tabuleiro através da colocação de sucessivos dominós pode ser uma primeira tentativa, como o leitor pode experimentar. No entanto, mesmo depois de muitas tentativas, não conseguimos encontrar essa solução. Como nossos esforços não resultaram em uma solução, somos levados a conjecturar que não existe essa solução.