Oficinas de Demonstração - Resoluções

08/11/2023

Introdução

Olá! Este documento tem o objetivo de mostrar uma maneira de escrever as demonstrações dos exercícios propostos no projeto Oficinas de Demonstração, realizado em 2023 pelo CAEM, em parceria com a professora Daniela Mariz Silva Vieira, na disciplina MAT1514 - A Matemática na Educação Básica.

Não queremos que este documento seja entendido como *gabarito* dos exercícios, mas sim como **uma** das formas de construir as demonstrações, entre outras possíveis.

Demonstrações com quantificadores

1. Números reais

Seja x um número real. Mostre que:

a) se $x < p$, para todo $p > 0$ real, então $x \leq 0$.
Suponha por absurdo que $x > 0$. Como $x < p$, para todo $p > 0$, segue que $x < x$. Absurdo.
Portanto, $x \geq 0$.
Outra ideia de demonstração: A hipótese pode ser interpretada em linguagem natural como "x é menor que todo número positivo", de onde concluímos que x é *diferente* de todo número positivo, e por isso x não pode ser positivo, restando apenas que seja negativo ou nulo.

b) se $x \leq p$, para todo $p > 0$ real, então $x \leq 0$.
Suponha por absurdo que $x > 0$. Então $\frac{x}{2} > 0$. Como $x \leq p$, para todo $p > 0$, segue que $x \leq \frac{x}{2}$. Absurdo.
Portanto, $x \leq 0$.

c) se $x \leq p$, para todo $p \geq 0$ real, então $x \leq 0$.
Particularizando $p = 0$, como $x \leq p$, segue que $x \leq 0$.
Outra demonstração: A hipótese pode ser escrita em linguagem formal (no universo dos números reais) como:
$(\forall p)(p \geq 0 \to x \leq p)$, de onde concluímos que $0 \geq 0 \to x \leq 0$.
E como $0 \geq 0$ é uma afirmação verdadeira, segue que $x \leq 0$.

2. Função afim

Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.
Mostre que f é bijetiva.

Considere as seguintes definições:

Definição 1: $f\colon A \to B$ é injetiva se, para todo $a_1, a_2 \in A$, vale que

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Definição 2: $f\colon A \to B$ é sobrejetiva se, para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Definição 3: Uma função f é bijetiva se for injetiva e sobrejetiva.

Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, temos que

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \Rightarrow ax_1 = ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

pois $a \neq 0$.
Então, pela Definição 1, f é injetiva.

Dado $y \in \mathbb{R}$, tome $x = \frac{y-b}{a}$. Então

$$f(x) = ax + b = a\Big(\frac{y-b}{a}\Big) + b = (y-b) + b = y.$$

Então, pela Definição 2, f é sobrejetiva.

Portanto, pela Definição 3, f é bijetiva.

Outra demonstração:

Considere a função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{x-b}{a}$.
Temos que o domínio de f é igual ao contradomínio de g, e o domínio de g é igual ao contradomínio de f.
Temos também que

$$f(g(x)) = a \cdot g(x) + b = a\Big(\frac{x-b}{a}\Big) + b = (x-b) + b = x;$$

$$g(f(x)) = \frac{f(x)-b}{a} = \frac{(ax+b)-b}{a} = \frac{ax}{a} = x.$$

Então a função g é inversa de f, logo f é invertível.
Usando o fato de que toda função invertível é bijetiva, segue que f é bijetiva.

3. Números inteiros

Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+3}{n+2} = 1 - \frac{1}{k}.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+3}{n+2} = \frac{n^2+3n}{n^2+3n+2} = \frac{n^2+3n+2-2}{n^2+3n+2} = 1 - \frac{2}{n^2+3n+2}.$$

Tome $k = \frac{n^2+3n+2}{2}$.

Segue que

$$\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+3}{n+2} = 1 - \frac{2}{n^2+3n+2} = 1 - \frac{1}{k}.$$

Se n é par, então n^2 e $3n$ são pares, logo n^2+3n+2 é par.
Se n é ímpar, então n^2 e $3n$ são ímpares, logo n^2+3n+2 é par.

Em todos os casos, temos que n^2+3n+2 é um múltiplo de 2, e por isso $k \in \mathbb{N}$.

Outra demonstração:

Dado $n \in \mathbb{N}$, tome $k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Como $n+1$ e $n+2$ são números consecutivos, então um dos dois é par, logo o produto $(n+1)(n+2)$ é par, e por isso é divisível por 2. Segue que $k \in \mathbb{N}$.

Então

$$\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+3}{n+2} = \frac{2k-2}{2k} = \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k}.$$