Oficinas de Demonstração - Resoluções

20/09/2023

Introdução

Olá! Este documento tem o objetivo de mostrar uma maneira de escrever as demonstrações dos exercícios propostos no projeto Oficinas de Demonstração, realizado em 2023 pelo CAEM, em parceria com a professora Daniela Mariz Silva Vieira, na disciplina MAT1514 - A Matemática na Educação Básica.

Não queremos que este documento seja entendido como *gabarito* dos exercícios, mas sim como **uma** das formas de construir as demonstrações, entre outras possíveis.

Demonstrações com axiomas da Geometria Plana

Termos primitivos (sem definição): Ponto e Reta, onde retas são conjuntos de pontos.

Axioma I1: Para cada par de pontos P e Q distintos, existe exatamente uma reta à qual ambos pertencem.
Axioma I2: Toda reta contém pelo menos dois pontos distintos.
Definição: Três pontos A, B, C são ditos colineares se existe uma reta à qual esses três pontos pertencem.
Axioma I3: Existem pelo menos três pontos distintos e não colineares.

Exercício A1: Mostre que por cada ponto passam pelo menos 2 retas.
Seja A um ponto qualquer.
Existe um ponto B distinto de A (caso contrário, A seria o único ponto existente, contradizendo o axioma I3).
Pelo axioma I1, existe uma reta r que passa por A e B.
Existe também um ponto C fora de r (caso contrário, todos os pontos existentes seriam colineares, contradizendo o axioma I3).
Logo, A e C são distintos.
Pelo axioma I1, existe uma reta s que passa por A e C.
r e s são distintas, pois $C \in s$ e $C \notin r$. Logo existem duas retas que passam por A.

Exercício A2: Mostre que, se existem duas retas paralelas, então existem pelo menos 6 retas.
Usaremos a seguinte definição de paralelismo:
Definição: Duas retas são paralelas se a intersecção entre elas for vazia (note que essa definição é suficiente porque os axiomas não tratam da existência mais de um plano).

Sejam r e s retas paralelas.
Pelo axioma I2, existem pontos distintos $A_1, A_2 \in r$ e $B_1, B_2 \in s$.
Pelo axioma I1, existem retas t_1, t_2, t_3 e t_4 tais que:

$$A_1, B_1 \in t_1$$

$$A_1, B_2 \in t_2$$

$$A_2, B_1 \in t_3$$

$$A_2, B_2 \in t_4$$

Se t_1 e t_2 fossem iguais, então, como $B_2 \in t_2$, teríamos que $B_2 \in t_1$, logo $B_1, B_2 \in t_1$.
Como $B_1, B_2 \in s$, temos, pelo axioma I1, que $t_1 = s$.
Então, como $A_1 \in t_1$, temos que $A_1 \in s$.
Logo $A_1 \in r \cap s$. Absurdo, pois r e s são paralelas.
Portanto, t_1 e t_2 são distintas.

Com argumentos análogos, podemos provar que as retas t_1, t_2, t_3 e t_4 são duas a duas distintas.

Sabemos que r e s são distintas, pois são paralelas. Como $B_1 \in t_1$ e $B_1 \notin r$ (pelo paralelismo de r e s), temos também que t_1 e r são distintas. Por um raciocínio análogo, temos que r, s, t_1, t_2, t_3 e t_4 são duas a duas distintas, como queríamos demonstrar.

Exercício A3: Mostre que, se existem duas retas, então existem pelo menos 3 retas.
Sejam r e s as duas retas dadas.
Se r e s são paralelas, então exitem seis retas, conforme mostrado em A2, logo existem três retas.
Se r e s não são paralelas, então existe um ponto $P \in r \cap s$.
Existem também $A \in r$ e $B \in s$ distintos de P (caso contrário, uma das retas teria um único ponto, contradizendo o axioma I2).
Como r e s são distintas, P é o único ponto na intersecção $r \cap s$. De fato, se existisse $P' \in r \cap s$ distinto de P, teríamos, pelo axioma I1, que $r = s$, contradizendo a hipótese da proposição.
Segue que $A \notin s$, $B \notin r$ e A e B são distintos.
Pelo axioma I1, exite uma reta t tal que $A, B \in t$.
Afirmamos que $P \notin t$.
De fato, se $P \in t$, então, por um lado $A, P \in r \cap t$ e, pelo axioma I1, $t = r$. Por outro lado, $B, P \in s \cap t$ e, pelo axioma I1, $t = s$, logo $r = s$. Contradição.
Como $P \notin t$, segue que r, s e t são duas a duas distintas, como queríamos demonstrar.

Outra demonstração:
Pelo Axioma I3, existem pontos A, B e C distintos e não colineares.
Amplicando o Axioma I1 três vezes, temos que existem retas r, s e t tais que:

- r passa por A e B.
- s passa por A e C.
- t passa por B e C.

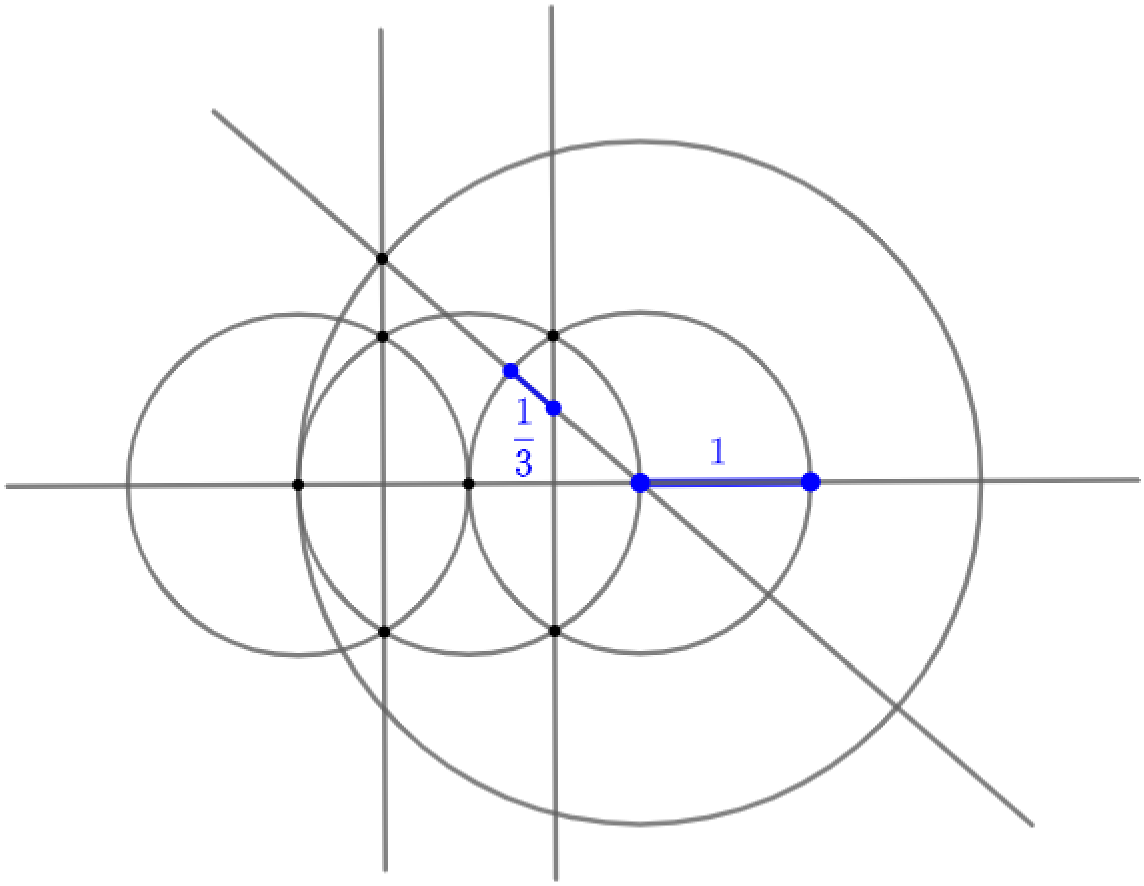
Supondo, por absurdo, que $r = s$, como $C \in s$, segue que $C \in r$. Logo, $A, B, C \in r$. Absurdo, pois A, B e C não são colineares. Então $r \neq s$.
Analogamente, pode-se provar que $r \neq t$ e $s \neq t$. Portanto, r, s e t são, de fato, três retas.

Observação:
Veja que nesta última demonstração não foi necessário utilizar a hipótese da proposição (de que existem duas retas distintas) e nem o Axioma I2. Em contrapartida, foi utilizado o Axioma I3, que não havia sido usado na primeira demonstração apresentada para essa proposição.

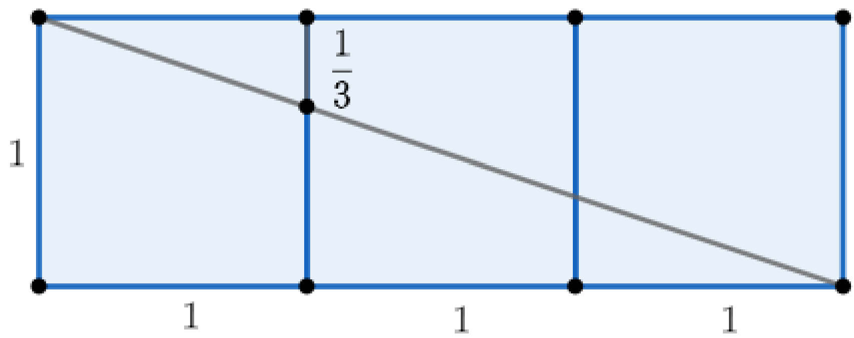
Construções em Geomertria Plana

Exercício: Dado um segmento de comprimento 1, mostre que é possível construir um segmento de comprimento $\frac{1}{3}$.

Este exercício tem o propósito de estimular a criatividade. Há muitas formas diferentes de se realizar a construção pedida. Podemos fazer desde as construções mais simples às mais complicadas. Podemos ser extremamente rigorosos, mas também podemos suspender parte do rigor e nos permitir que criemos livremente.
Tente puxar seus limites, pensar "fora da caixa" e criar suas próprias regras para construir suas resoluções.
A seguir, para exemplificar a multiplicidade de possibilidades criativas para esse problema, apresentamos duas construções (feitas no GeoGebra) de naturezas bem distintas. Tente justificá-las, mas, principalmente, tente criar suas próprias resoluções seguindo suas próprias regras de rigor!



1/3
1



1/3
1
1
1
1