III. LÓGICA COMO TEORIA AXIOMÁTICA: CP_1I - UM SISTEMA DE AXIOMAS E DE REGRAS DE INFERÊNCIA PARA O CÁLCULO DE PREDICADOS DE 1ª ORDEM COM IGUALDADE

Os axiomas aqui selecionados descrevem as propriedades fundamentais de cada um dos símbolos "primitivos"da Lógica (CP_1I): os conectivos $\rightarrow, \wedge, \vee, \neg, \leftrightarrow$; os quantificadores $\forall, \exists$; e o predicado da igualdade $=$. Este não é o único sistema possível e segue de perto uma abordagem dada por Kleene no seu livro "Introduction to Metamathematics". De certa forma, esse sistema pode ser considerado "redundante", pois é possível considerar um sistema que, por exemplo, tenha axiomas apenas para o $\neg$, o $\rightarrow$, o $\forall$, introduzindo os demais símbolos lógicos por definição. Nesses sistemas, mais enxutos em matéria de axiomas, são as deduções de Teoremas, que ficam mais longas. Essa introdução a uma abordagem axiomática do CP_1I, adota mais axiomas e, com isso, simplifica deduções.

(A) Axiomas: no que segue, ϕ, ψ e χ são fórmulas, t e t' são termos e f é um símbolo funcional unário do CP_1I.

1. $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$
2. $[\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)] \rightarrow [(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)]$
3. $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi$
4. $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \psi$
5. $\phi \rightarrow [\psi \rightarrow (\phi \wedge \psi)]$
6. $\phi \rightarrow (\phi \vee \psi)$
7. $\psi \rightarrow (\phi \vee \psi)$
8. $(\phi \rightarrow \chi) \rightarrow [(\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \vee \psi \rightarrow \chi)]$
9. $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow [(\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\phi]$
10. $\neg\neg\phi \rightarrow \phi$
11. $(\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow [(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)]$
12. $[(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)] \rightarrow (\phi \leftrightarrow \psi)$
13. $(\forall x)\phi(x) \rightarrow \phi(t)$ (onde t é o termo "livre para x em ϕ") (*)
14. $(\forall x)(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow [\phi \rightarrow (\forall x)\psi]$ (onde x não ocorre livre em ϕ)
15. $\phi(t) \rightarrow (\exists x)\phi(x)$ (onde t é o termo "livre para x em ϕ") (*)
16. $(\forall x)(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow [(\exists x)\phi \rightarrow \psi]$ (onde x não ocorre livre em ψ)
17. $t = t$
18. $t = t' \rightarrow f(t) = f(t')$
19. $t = t' \rightarrow (\phi(t) \rightarrow \phi(t'))$

(*) **Def.:** t é um termo dito **livre para** x **em** ϕ se em t não há ocorrência de variável que seja ligada em ϕ. Nesse caso, x pode ser substituído por t sem essencialmente "mudar o significado"de $\phi(x)$.

(B) Regras de Inferência:

1. "Modus Ponens": de ϕ e $\phi \rightarrow \psi$ se pode deduzir ψ.
2. Generalização: de ϕ se pode deduzir $(\forall x)\phi$.

(C) Definição de Dedução Sintática

Uma **dedução sintática**, ou simplesmente **dedução** no CP_1I é uma sequência finita $\langle \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \rangle$ de fórmulas do CP_1I tal que para cada $i = 1, 2, ..., n$, φ_i satisfaz alguma das seguintes condições:

1- φ_i é um caso particular (ou instância) de um axioma do CP_1I;

2- Existem j e k , $1 \leq j, k < i$ tais que $\varphi_j \equiv \varphi_k \to \varphi_i$ (nesse caso diremos que ϕ_i foi obtida por aplicação da regra de ***Modus Ponens***);

3- Existe j , $1 \leq j \leq i$ e variável x tais que $\varphi_i \equiv (\forall x)\varphi_j$ (nesse caso diremos que ϕ_i foi obtida por aplicação da regra de **Generalização**).

(D) Definição sintática de teorema do CP_1I

φ é chamado de **teorema do** CP_1I se existe uma dedução sintática no CP_1I $\langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \rangle$ de forma que $\varphi \equiv \varphi_n$. Nesse caso emprega-se a seguinte notação:

$$\vdash \varphi \quad \text{que é lida como “}\varphi\text{ é teorema do } CP_1I\text{”.}$$

(E) Exemplos de teoremas com suas deduções.

<u>Exemplo 1:</u> Para qualquer fórmula A do CP_1I, temos que $\vdash A \to A$.

Com efeito, observemos que a seguinte sequência de fórmulas é uma dedução no CP_1I:

$$\begin{array}{ll}
Ax2: & \varphi_1 \equiv [A \to ((B \to A) \to A)] \to [(A \to (B \to A)) \to (A \to A)] \\
Ax1: & \varphi_2 \equiv A \to ((B \to A) \to A) \\
\text{MP1,2}: & \varphi_3 \equiv (A \to (B \to A)) \to (A \to A) \\
Ax1: & \varphi_4 \equiv A \to (B \to A) \\
\text{MP3,4}: & \varphi_5 \equiv A \to A \ \text{ que é a fórmula que queremos deduzir.}
\end{array}$$

Confira que φ_1, φ_2 e φ_4 são de fato casos particulares dos axiomas mencionados e que portanto elas satisfazem a condição 1 da definição (c).

Por outro lado φ_3 e φ_5 satisfazem a condição 2 da mesma definição (por quê?).

<u>Exemplo 2:</u> Para quaisquer fórmulas A, B, C do CP_1I, temos que

$\vdash [(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))]$ (que diz que a implicação é transitiva):

$$\begin{array}{ll}
Ax2: & \varphi_1 \equiv [A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)] \\
Ax1: & \varphi_2 \equiv \varphi_1 \to ((B \to C) \to \varphi_1) \\
\text{MP1,2}: & \varphi_3 \equiv (B \to C) \to \varphi_1 \\
Ax2: & \varphi_4 \equiv \varphi_3 \to \{[(B \to C) \to (A \to (B \to C))] \to [(B \to C) \to ((A \to B) \to \\
 & \qquad (A \to C))]\}
\end{array}$$

$Ax1:$ $\varphi_5 \equiv (B \to C) \to (A \to (B \to C))$
MP3,4 : $\varphi_6 \equiv \varphi_5 \to [(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))]$
MP5,6 : $\varphi_7 \equiv (B \to C) \to ((A \to B) \to A \to C))$
$Ax2:$ $\varphi_8 \equiv \varphi_7 \to \{[(B \to C) \to (A \to B)] \to [(B \to C) \to (A \to C)]\}$
MP7,8 : $\varphi_9 \equiv [(B \to C) \to (A \to B)] \to [(B \to C) \to (A \to C)]$
$Ax1:$ $\varphi_{10} \equiv \varphi_9 \to [(A \to B) \to \varphi_9]$
MP9,10 : $\varphi_{11} \equiv (A \to B) \to \varphi_9$
$Ax1:$ $\varphi_{12} \equiv (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to B))$
$Ax2:$ $\varphi_{13} \equiv \varphi_{11} \to [\varphi_{12} \to [(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))]]$
MP11,13 : $\varphi_{14} \equiv \varphi_{12} \to [(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))]$
MP12,14 : $\varphi_{15} \equiv [(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))]$

c.q.d.

<u>Exercício 1:</u> Explique exatamente porque a sequência $\varphi_1, \ldots, \varphi_{15}$ acima satisfaz a definição (C) de dedução sintática.

<u>Exemplo 3:</u> Sendo F uma fórmula qualquer do CP_1I então

$$\vdash (\exists y)(\forall x)F \to (\forall x)(\exists y)F.$$

$Ax15: \varphi_1 \equiv F \to (\exists y)F$
$Ax13: \varphi_2 \equiv (\forall x)F \to F$
(segue a sequência de 15 fórmulas análogas às do exemplo 2, para $A \equiv (\forall x)F$, $B \equiv F$ e $C \equiv (\exists y)F$, e que serve de dedução para a transitividade de implicações), onde a última é:
T2 : $\varphi_{17} \equiv [\varphi_2 \to [\varphi_1 \to ((\forall x)F \to (\exists y)F)]]$
MP2,17 : $\varphi_{18} \equiv [\varphi_1 \to ((\forall x)F \to (\exists y)A)]$
MP1,18 : $\varphi_{19} \equiv (\forall x)F \to (\exists y)F$
GEN19 : $\varphi_{20} \equiv (\forall y)[(\forall x)F \to (\exists y)F]$ (observe que y não ocorre livre em $(\exists y)F$)
$Ax16:$ $\varphi_{21} \equiv \varphi_{20} \to [(\exists y)(\forall x)F \to (\exists y)F]$
MP20,21 : $\varphi_{22} \equiv (\exists y)(\forall x)F \to (\exists y)F$
GEN22 : $\varphi_{23} \equiv (\forall x)[\varphi_{22}]$ (observe que x não ocorre livre em $(\exists y)(\forall x)F$)
$Ax14:$ $\varphi_{24} \equiv \varphi_{23} \to [(\exists y)(\forall x)F \to (\forall x)(\exists y)F]$
MP23,24 : $\varphi_{25} \equiv (\exists y)(\forall x)F \to (\forall x)(\exists y)F$

c.q.d.

<u>Exercício 2:</u> Explique exatamente porque a sequência acima de fórmulas satisfaz a definição de dedução sintática.

<u>Exercício 3:</u> Encontre deduções que comprovem que são teoremas as fórmulas seguintes, onde P, Q e R são fórmulas do CP_1I. Comprove que todas elas são válidas (verdades universais).

1) $\vdash \neg(R \wedge \neg R)$
2) $\vdash (\exists x)(x = x)$
3) $\vdash (P \wedge Q) \to (Q \wedge P)$
4) $\vdash (P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$
5) $\vdash A \vee \neg A$
6) $\vdash (P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))$
7) $\vdash (A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$
8) $\vdash \neg(\exists x)(\neg A) \leftrightarrow (\forall x)A$
9) $\vdash (P \to (Q \to R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \to R)$
10) $\vdash (A \wedge \neg A) \to B$
11) $\vdash (\neg A \vee B) \leftrightarrow (A \to B)$
12) $\vdash (A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg(A \to B)$
13) $\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

(F) Definição de dedução a partir de hipóteses.

Sejam Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula do CP_1I. Chamamos de <u>dedução de φ a partir de fórmulas de Γ</u>, ou simplesmente <u>dedução de φ a partir de Γ</u> a uma sequência finita $\langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \rangle$ de fórmulas do CP_1I que, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, φ_i satisfaz alguma das 3 condições da definição (C) de dedução sintática ou a condição 4, listadas abaixo:

1- φ_i é uma instância de axioma do CP_1I;
2- Existem j e k , $1 \leq j, k < i$ tais que $\varphi_j \equiv \varphi_k \to \varphi_i$;
3- Existe j , $1 \leq j \leq i$ e variável x tais que $\varphi_i \equiv (\forall x)\varphi_j$;
4- $\varphi_i \in \Gamma$.

(G) Definição de teorema a partir de hipóteses.

Uma fórmula φ do CP_1I é chamada de <u>teorema a partir das hipóteses de Γ</u>, sendo Γ um conjunto de fórmulas, se existe uma dedução de φ a partir de Γ $\langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \rangle$ tal que $\varphi \equiv \varphi_n$. Nesse caso enprega-se a seguinte notação:

$\Gamma \vdash \varphi$ (lê-se: φ é dedutível a partir de Γ ou φ é teorema a partir de Γ).

(H) Exemplos de teoremas a partir de hipóteses.

<u>Exemplo 1:</u> $\{A\} \vdash (B \to A)$

Mostremos uma dedução para $(B \to A)$ a partir da hipótese A (único elemento de $\{A\}$).

Ax1 :	$\varphi_1 \equiv A \to (B \to A)$
HIP:	$\varphi_2 \equiv A$
MP1,2:	$\varphi_3 \equiv (B \to A)$

<u>Exemplo 2:</u> $\{(A \to (B \to C)),\ B\} \vdash (A \to C)$

A seguinte sequência de fórmulas é uma dedução para $(A \to C)$ a partir das duas hipóteses de $\Gamma = \{(A \to (B \to C)), B\}$.

HIP:	$\varphi_1 \equiv (A \to (B \to C))$
Ax2:	$\varphi_2 \equiv (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
MP1,2:	$\varphi_3 \equiv (A \to B) \to (A \to C)$
HIP:	$\varphi_4 \equiv B$
Ax1:	$\varphi_5 \equiv B \to (A \to B)$
MP4,5:	$\varphi_6 \equiv A \to B$
MP3,6:	$\varphi_7 \equiv A \to C$

c.q.d.

<u>Exercício 4:</u> Explique exatamente porque as sequências dos dois exemplos anteriores satisfazem a definição (F) de dedução a partir de hipóteses.

<u>Exercício 5:</u> Encontre deduções que comprovem que as fórmulas abaixo são teoremas a partir das hipóteses dadas:

a) $\{(A \to B),\ (B \to A)\} \vdash A \leftrightarrow B$
b) $\{\neg(P \vee Q)\} \vdash \neg P \wedge \neg Q$
c) $\{(\neg P \wedge \neg Q)\} \vdash \neg(P \vee Q)$
d) $\{(\forall x)(A \to B)\} \vdash ((\forall x)A \to (\forall x)B)$
e) $\{(\exists x)A \to (\exists x)B\} \vdash ((\exists x)(A \to B))$

(I) (Meta) Teorema da Dedução.

Sejam Γ um conjunto de fórmulas fechadas, ϕ e ψ fórmulas fechadas, então existe uma dedução para ψ a partir das fórmulas de Γ e de ϕ se e somente se existir uma dedução para $\phi \to \psi$ a partir das fórmulas de Γ. Em símbolos se pode sintetizar esse enunciado por:

$$\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \phi \to \psi$$

Faremos uma demonstração semântica para esse importante meta-teorema. Como ele não é um teorema **<u>do</u>** CP_1I, mas sim um resultado **<u>sobre</u>** o CP_1I, não cabe para ele uma dedução sintática.

<u>Demonstração:</u>

$\Leftarrow$ Este lado é uma mera aplicação de *Modus Ponens*. Com efeito, supondo que existe uma dedução $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \equiv \phi \to \psi$ para essa última fórmula a partir de Γ (sem o uso de ϕ), podemos continuar tal sequência fazendo: $\phi_{n+1} \equiv \phi$ (hipótese permitida à esquerda) e, aplicando $M.P.$ com ϕ_n e ϕ_{n+1}, faz-se $\phi_{n+2} \equiv \psi$.

Assim $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, \phi_{n+1}, \phi_{n+2}$ é uma dedução de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\phi\}$.

$\Rightarrow$ Para a prova desta implicação procede-se por indução no comprimento das deduções. Estamos agora admitindo que existe uma dedução $A_1, A_2, ..., A_n \equiv \psi$ para ψ a partir <u>das fórmulas de Γ e de ϕ</u> e queremos obter uma dedução $B_1, B_2, ..., B_k$ para $\phi \to \psi$ <u>sem utilizar ϕ como hipótese suplementar</u>, somente a partir das fórmulas de Γ. (O n - n^o de fórmulas da dedução - é chamado de <u>comprimento</u> da dedução).

1° : <u>$n = 1$:</u> Neste caso $A_1 \equiv \psi$ e portanto teremos que
a) ψ é axioma , b) $\psi \in \Gamma$ ou c) $\psi \equiv \phi$.

Nos casos a) e b) explicitamos a dedução de $\phi \to \psi$:

$B_1 \equiv \psi$
$Ax\ 1 \quad B_2 \equiv \psi \to (\phi \to \psi)$
$MP1,2 \quad B_3 \equiv \phi \to \psi$

O caso c) corresponde ao fato de que $\vdash \phi \to \phi$, deduzido anteriormente e reproduzido a seguir:

$Ax\ 2 \quad B_1 \equiv (\phi \to ((\psi \to \phi) \to \phi)) \to ((\phi \to (\psi \to \phi)) \to (\phi \to \phi)$
$Ax\ 1 \quad B_2 \equiv \phi \to (\psi \to \phi)$
$Ax\ 1 \quad B_3 \equiv \phi \to ((\psi \to \phi) \to \phi)$

$MP3,1 \quad B_4 \equiv \phi \to (\psi \to \phi) \to (\phi \to \phi)$
$MP4,2 \quad B_5 \equiv \phi \to \phi$

2° : Suponhamos agora que vale o resultado pretendido para toda fórmula com dedução de comprimento $r \leq n$ e passemos a exibir uma prova de que o resultado também é válido para o caso de uma dedução $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ cujo comprimento seja $n+1$. Ou seja, fixando melhor a hipótese de indução, admitiremos que:

"Se χ é uma fórmula para a qual existe uma dedução de comprimento $r \leq n$ a partir das hipóteses de Γ e ϕ, então existe uma dedução $B_1, B_2, ..., B_k \equiv \phi \to \chi$ somente a partir das fórmulas de Γ".

E a nossa tese agora será:

"Seja ψ uma fórmula para a qual existe uma dedução $A_1, A_2, ...A_n, A_{n+1} \equiv \psi$ a partir das fórmulas de Γ e de ϕ, então existe dedução $B_1, B_2, ..., B_l \equiv \phi \to \psi$ para $\phi \to \psi$ somente a partir das fórmulas de Γ".

Demostração da Segunda Parte:

Temos 3 sub-casos a considerar:
a) ψ é axioma, $\psi \in \Gamma$ ou $\phi = \psi$, onde se procede como no caso $n = 1$;
b) ψ é obtido por *Modus Ponens*; ou
c) ψ é obtido por generalização.

Sub-caso b): Neste caso $\psi \equiv A_{n+1}$ e $\exists\ i, j < n+1 (i, j \leq n$ e portanto comprimentos que caem na hipótese de indução) tais que $A_j \equiv A_i \to \psi$. Podemos assim aplicar a hipótese de indução tanto para A_i como para A_j. Assim sabemos que existem deduções sem utilizar ϕ tanto para $\phi \to A_i$ como para $\phi \to A_j$. Eventualmente renomeando as fórmulas, sejam:

$B_1, B_2, ..., B_l \equiv \phi \to A_i$ dedução para $\phi \to A_i$ a partir de Γ (sem usar ϕ) e $B_{l+1}, B_{l+2}, ..., B_{l+r} \equiv \phi \to A_j \equiv \phi \to (A_i \to \psi)$ dedução para $\phi \to A_j$ a partir de Γ (também sem usar ϕ).

Temos agora que a concatenação das duas sequências pode ser completada a uma dedução de $\phi \to \psi$, fazendo:
$Ax\ 2: \qquad B_{l+r+1} \equiv (\phi \to (A_i \to \psi)) \to ((\phi \to A_i) \to (\phi \to \psi))$
$MPl+r, l+r+1 \qquad B_{l+r+2} \equiv (\phi \to A_i) \to (\phi \to \psi)$
$MPl, l+r+2 \quad B_{l+r+3} \equiv \phi \to \psi$
ou seja, fazendo $l + r = m$, a sequência $B_1, B_2, ..., B_m, B_{m+1}, B_{m+2}, B_{m+3}$ é uma dedução a partir de Γ de $\phi \to \psi$.

c.q.d.

Sub-caso c): Neste caso $\psi \equiv A_{n+1}$ e $\exists\ j < n+1 \quad (j \leq n$, dentro portanto da hipótese de indução) tal que $A_{n+1} \equiv (\forall x)A_j$. Podemos aplicar a hipótese de indução para A_j que tem dedução de comprimento $j \leq n$. Sabemos assim que existe dedução $B_1, B_2, ..., B_k \equiv \phi \to A_j$ a partir de Γ (sem usar ϕ). Completemos essa sequência a uma dedução de $\phi \to (\forall x)A_j$, que é o mesmo que $\phi \to \psi$, fazendo:

por generalização

$B_{k+1} \equiv (\forall x)(\phi \to A_j)$ (aplicando a regra de generalização)
$Ax\ 14$ $B_{k+2} \equiv (\forall x)(\phi \to A_j) \to (\phi \to (\forall x)A_j)$. (desde que x não ocorra livre em ϕ)
$MP k+1, k+2$ $B_{k+3} \equiv (\phi \to (\forall x)A_j) \equiv \phi \to \psi$

Obs. Importante 1: Esse caso está sujeito à observação acima, entre parêntese e sublinhada. Isso significa que o enunciado que demos ao teorema poderia ser menos restritivo, o que exigiria que adicionássemos outras hipóteses ao enunciado do teorema. Não o fizemos para não incluir muitos aspectos técnicos. Mas chamamos a atenção de que se ϕ não tiver ocorrência livre de variáveis, isso estará satisfeito e portanto o teorema vale integralmente para ϕ fórmula fechada, como está suposto no enunciado adotado.

Obs. Importante 2: Observe, por exemplo, que a regra de generalização garante que $\phi \vdash (\forall x)\phi$. Mas o teorema de dedução não nos permite concluir que $\vdash \phi \to (\forall x)\phi$, pois não podemos afirmar que x não ocorre livre em ϕ. Assim **não se pode deduzir** $\vdash \phi \to (\forall x)\phi$ para qualquer fórmula ϕ. Por exemplo, seja $\phi \equiv \phi(y) \equiv (y = x)$. Se nessa fórmula trocarmos a ocorrência livre de y por x obteremos que $\phi(x) \equiv (x = x)$, que é válida. Porém, claramente, $(\forall x)\phi \equiv (\forall x)\phi(y) \equiv (\forall x)(x = y)$ não é válida.

(J) Exemplos de uso de Teorema da Dedução.

Exemplo 1: Podemos determinar que a fórmula do exemplo 2, ítem E, é um teorema de maneira muito mais simples, empregado o Teorema de Dedução. Vejamos como:
$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
$\Leftrightarrow$ (pelo TD) $\{A \to B\} \vdash (B \to C) \to (A \to C)$
$\Leftrightarrow$ (pelo TD) $\{(A \to B), (B \to C)\} \vdash A \to C$
$\Leftrightarrow$ (pelo TD) $\{(A \to B), (B \to C), A\} \vdash C$

Determinemos uma dedução para A a partir das hipóteses contidas em $\{(A \to B), (B \to C), A\}$:

HIP:	$\varphi_1 \equiv A \to B$
HIP:	$\varphi_2 \equiv A$
MP1,2:	$\varphi_3 \equiv B$
HIP:	$\varphi_4 \equiv B \to C$
MP3,4:	$\varphi_5 \equiv C$

Assim o $T.D.$ nos garante que existe uma dedução sem hipóteses para a fórmula que descreve a propriedade transitiva da implicação - o que já sabíamos, mas cuja dedução é muito mais longa e menos intuitiva. Observe-se que como não há uso de generalização na dedução acima, não há restrições, portanto, no uso do Teorema de Dedução.

Exemplo 2: $\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$
$\Leftrightarrow$ (pelo TD) $\{P \to Q\} \vdash \neg Q \to \neg P$
$\Leftrightarrow$ (pelo TD) $\{(P \to Q), \neg Q\} \vdash \neg P$

Comprovemos a existência de uma dedução de $\neg P$ a partir das hipóteses constantes em $\{(P \to Q), \neg Q\}$:

HIP:	$\varphi_1 \equiv P \to Q$
HIP:	$\varphi_2 \equiv \neg Q$
Ax1:	$\varphi_3 \equiv \neg Q \to (P \to \neg Q)$
MP2,3	$\varphi_4 \equiv P \to \neg Q$
Ax9	$\varphi_5 \equiv (P \to Q) \to [(P \to \neg Q) \to \neg P]$
MP1,5	$\varphi_6 \equiv (P \to \neg Q) \to \neg P$
MP4,6	$\varphi_7 \equiv \neg P$

Exemplo 3: $\vdash (\forall x)(A \to B) \to ((\forall x)A \to (\forall x)B)$

$\Leftrightarrow$ (pelo TD) $\{(\forall x)(A \to B)\} \vdash (\forall x)A \to (\forall x)B$ $(*)$

A dedução desse teorema foi solicitada no exercício 5d) da página 25. É possível simplificar mais ainda a prova, utilizando uma vez mais o Teorema da Dedução, como faremos a seguir.)

$(*) \Leftrightarrow$ (pelo TD) $\{(\forall x)(A \to B), (\forall x)A\} \vdash (\forall x)B$

A dedução de $(\forall x)B$ a partir das duas hipóteses $(\forall x)(A \to B)$ e $(\forall x)A$ é bastante simples, como podemos constatar:

HIP:	$\varphi_1 \equiv (\forall x)(A \to B)$
HIP:	$\varphi_2 \equiv (\forall x)A$
Ax13:	$\varphi_3 \equiv (\forall x)(A \to B) \to (A \to B)$
Ax13:	$\varphi_4 \equiv (\forall x)A \to A$
MP1,3 :	$\varphi_5 \equiv A \to B$
MP2,4 :	$\varphi_6 \equiv A$
MP5,6 :	$\varphi_7 \equiv B$
GEN7 :	$\varphi_8 \equiv (\forall x)B$

Obs.: A dedução acima é simples, mas utiliza a Regra de Generalização. Nesse caso devemos observar que a restrição que aparece ao emprego dessa regra na demostração do Teorema da Dedução (na p. 25) está satisfeita. Isso é verdade pois as premissas (utilizadas como hipóteses) das implicações que queremos deduzir são fórmulas onde a variável x (usada na generalização que fornece φ_8) de fato não ocorre livre.

Exercício 6: Utilizando o Teorema da Dedução, demostre que:

a) $\vdash (\neg Q \to \neg P) \to (P \to Q)$
b) $\vdash [(P \wedge \neg Q) \to (R \wedge \neg R)] \to (P \to Q)$
c) $\vdash \phi \to \neg\neg\phi$
d) $\vdash [(\forall x)A \vee (\forall x)B] \to [(\forall x)(A \vee B)]$
e) $\vdash (\exists x)\phi \leftrightarrow \neg(\forall x)\neg\phi$