PLANTÃO DE DÚVIDAS DO DIA 20 DE NOVEMBRO

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS.

LISTA 4: 27 e 15-c).

LISTA 5: 2-c).

LISTA 6: 9-c).

LISTA 4.

15)

c) $V := P_3(\mathbb{R})$, e $S := \{t^3-1,\ t^3+2t+1,\ t^2-1,\ t^3+t^2+t+1\}$.

RESOLUÇÃO.

Sejam a, b, c e d em $\mathbb{R}$ tais que

$$a(t^3-1)+b(t^3+2t+1)+c(t^2-1)+d(t^3+t^2+t+1)=0$$

Note que

$$a(t^3-1)+b(t^3+2t+1)+c(t^2-1)+d(t^3+t^2+t+1)=0.$$

$$\Updownarrow$$

$$(a+b+d)t^3+(c+d)t^2+(2b+d)t+(-a+b-c+d)=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a+b+d=0 \\ c+d=0 \\ 2b+d=0 \\ -a+b-c+d=0 \end{cases} \quad (*)$$

Sendo assim, como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_4' := L_4 + L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_2' \leftrightarrow L_3'}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4''' := L_4'' - L_3''}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_4'''' := L_4''' + L_3'''}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

O sistema (*) possui apenas a solução trivial. Logo, em vista da arbitrariedade de a, b, c e d em $\mathbb{R}$ tais que

$$a(t^3-1) + b(t^3+2t+1) + c(t^2-1) + d(t^3+t^2+t+1) = 0,$$

podemos concluir que S é LI.

LISTA 5.

2)

c) $V := P_3(\mathbb{R})$, e $W := \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) : p(1) = p(-1) = 0\}$.

RESOLUÇÃO.

Seja $p(x) := a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ em W. Como $p(x) \in W$, $p(1) = p(-1) = 0$. Logo,

$$\begin{cases} a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0 \end{cases}.$$

Sendo assim, como

$$\begin{cases} a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ 2a_2 + 2a_0 = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ a_2 = -a_0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} a_3 = -a_1 \\ a_2 = -a_0 \end{cases},$$

podemos concluir que

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = -a_1x^3 - a_0x^2 + a_1x + a_0 = a_1(x - x^3) + a_0(1 - x^2).$$

E, como $p(x)$ em W é arbitrário, disso resulta que

$$W = [x - x^3, 1 - x^2].$$

Dessa forma, como $\{x - x^3, 1 - x^2\}$ é LI – pois, para quaisquer a e b em $\mathbb{R}$,

$$a(x - x^3) + b(1 - x^2) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-ax^3 - bx^2 + ax + b = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$a = b = 0$$

— $\{x - x^3, 1 - x^2\}$ é uma base de W. Por conseguinte, $\dim(W) = 2$.

LISTA 6.

9)

c) $T : P_n(\mathbb{R}) \longrightarrow P_{n+1}(\mathbb{R})$.

$$p(t) \longmapsto t\,p(t)$$

ENCONTRANDO UMA BASE DO NÚCLEO DE T.

Seja $p(t) := a_n t^n + \dots + a_0$ em $P_n(\mathbb{R})$. Como

$$\begin{aligned} p(t) \in \ker(T) &\Leftrightarrow T(p(t)) = 0 \\ &\Leftrightarrow t\,p(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow a_n t^{n+1} + \dots + a_0 t = 0 \\ &\Leftrightarrow a_n = \dots = a_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow p(t) = 0, \end{aligned}$$

decorre da arbitrariedade de $p(t)$ em $P_n(\mathbb{R})$ que $\ker(T) = \{0\}$. Portanto, $\emptyset$ é uma base de $\ker(T)$.

ENCONTRANDO UMA BASE DA IMAGEM DE T.

Observe que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(T) &= \{T(p(t)) : p(t) \in P_n(\mathbb{R})\} = \{t\,p(t) : p(t) \in P_n(\mathbb{R})\} \\ &= \{t(a_n t^n + \dots + a_0) : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\} = \{a_n t^{n+1} + \dots + a_0 t : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\} \\ &= [t, \dots, t^{n+1}]. \end{aligned}$$

Sendo assim, como $\{t, \dots, t^{n+1}\}$ é LI (pois é um subconjunto de $\{1, t, \dots, t^{n+1}\}$, e $\{1, t, \ldots, t^{n+1}\}$ é uma base de $P_{n+1}(\mathbb{R})$), podemos concluir que $\{t, \ldots, t^{n+1}\}$ é uma base de $Im(T)$.

LISTA 4.

27) Seja V um espaço vetorial, e suponhamos que V possua um conjunto gerador G com m vetores. Julgue as afirmações a seguir.

a) Nenhum subconjunto de V com menos do que m vetores gera V.

RESOLUÇÃO.

A afirmação é falsa. De fato, se $V := \mathbb{R}^2$ e $G := \{(1,0), (0,1), (1,1)\}$, então, embora G seja um conjunto gerador de V, $\{(1,0), (0,1)\}$ também o é e possui menos elementos do que G.

b) Todo subconjunto de V com mais do que m vetores é LD.

RESOLUÇÃO.

A afirmação é verdadeira e foi demonstrada em aula.

c) Se $\dim(V) = m$, então G é LI.

RESOLUÇÃO.

A afirmação é verdadeira.

DEMONSTRAÇÃO.

Como G gera V, podemos fixar uma base B de V de modo que $B \subseteq G$. Feito isso, notemos que, como $\dim(V) = m$, B possui m elementos. Logo, B é um subconjunto de G com o mesmo número de elementos que G, e, portanto, $B = G$. Consequentemente, G é uma base de V e, em particular, é LI.