Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #23

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

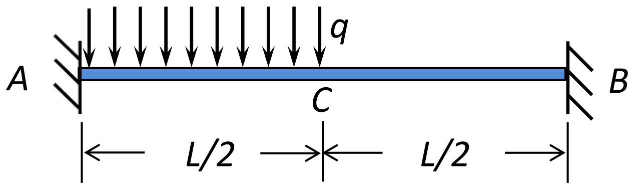
21/11/2023

Exercício

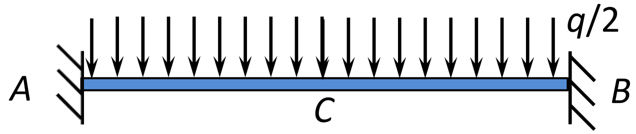
A barra AB está engastada em suas duas extremidades e está submetida à carga distribuída q, conforme a figura. Considerando apenas o efeito da flexão e usando as propriedades de simetria da estrutura, calcule:

a) a rotação em C;

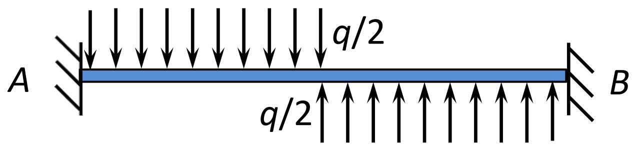
b) o deslocamento vertical em C.



A carga distribuída pode ser dividia na soma de uma parcela simétrica com uma parcela antissimétrica:



(parcela simétrica)

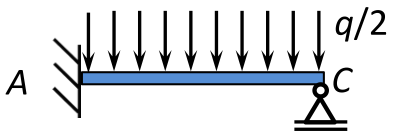


(parcela antissimétrica)

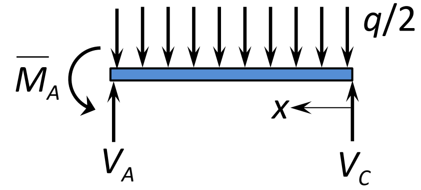
- Apenas a parcela simétrica contribui para o deslocamento vertical em *C*
- Apenas a parcela antissimétrica contribui para a rotação em *C*

a) Cálculo da rotação em *C*: (apenas a parte antissimétrica do carregamento)

Considerando-se apenas a metade esquerda da estrutura:



DCL



- Equilíbrio:

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_A + V_C = \frac{qL}{4}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \bar{M}_A + V_C\frac{L}{2} - \frac{qL^2}{16} = 0$$

- Grau de hiperestaticidade

$$g = 1$$

- Incógnita hiperestática:

Escolho V_c

- Princípio da Energia Complementar Mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial V_C} = 0 \Rightarrow \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}} M(x)\frac{\partial M}{\partial V_C}dx = 0$$

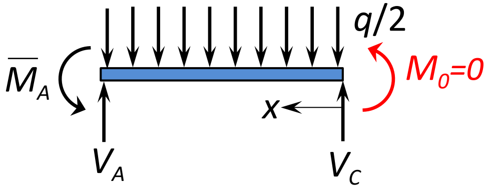
$$M(x) = V_C x - \frac{qx^2}{4}$$

$$\frac{\partial M}{\partial V_C} = x$$

$$\Rightarrow \int_0^{L/2}\left(V_C x - \frac{qx^2}{4}\right)x dx = 0 \Rightarrow \left(\frac{V_C x^3}{3} - \frac{qx^4}{16}\right)_0^{\frac{L}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow V_C = \frac{3qL}{32}$$

- Para calcular a rotação em *C* podemos aplicar um momento fictício nesse ponto:



- Pelo Teorema de Crotti-Engesser:

$$\theta_C = \left(\frac{\partial U^*}{\partial M_0}\right)_{M_0=0} = \frac{1}{EI}\left(\int_0^{\frac{L}{2}} M(x)\frac{\partial M}{\partial M_0}dx\right)_{M_0=0}$$

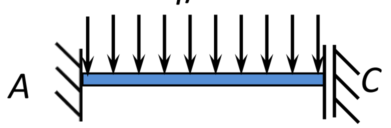
$$M(x) = V_C x - \frac{qx^2}{4} + M_0 = \frac{3qL}{32}x - \frac{qx^2}{4} + M_0$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_0} = 1$$

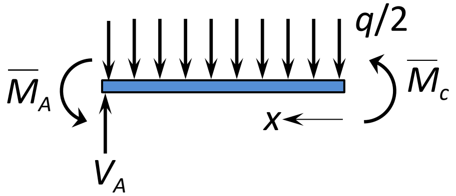
$$\Rightarrow \theta_C = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}}\left(\frac{3qL}{32}x - \frac{qx^2}{4}\right)dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{3qLx^2}{64} - \frac{qx^3}{12}\right)_0^{\frac{L}{2}} \Rightarrow \theta_C = \frac{qL^3}{768EI}$$

b) Cálculo do deslocamento vertical em *C*: (apenas a parte simétrica do carregamento)

Considerando-se apenas a metade esquerda da estrutura:



DCL



- Equilíbrio:

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_A = \frac{qL}{4}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \bar{M}_A + \bar{M}_C - \frac{qL^2}{16} = 0$$

- Grau de hiperestaticidade

$$g = 1$$

- Incógnita hiperestática:

Escolho $\bar{M}_C$

- Princípio da Energia Complementar Mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}_C} = 0 \Rightarrow \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}} M(x)\frac{\partial M}{\partial \bar{M}_C}dx = 0$$

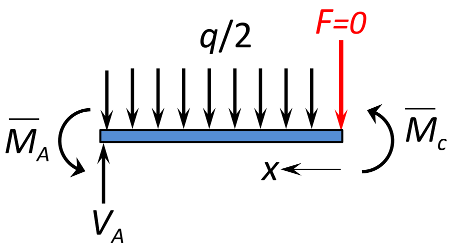
$$M(x) = \bar{M}_C - \frac{qx^2}{4}$$

$$\frac{\partial M}{\partial V_C} = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{L}{2}}\left(\bar{M}_C - \frac{qx^2}{4}\right)dx = 0 \Rightarrow \left(\bar{M}_C x - \frac{qx^3}{12}\right)_0^{\frac{L}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{M}_C = \frac{qL^2}{48}$$

- Para calcular o deslocamento vertical em *C* podemos aplicar uma força fictícia nesse ponto:



- Pelo Teorema de Crotti-Engesser:

$$\delta_C = \left(\frac{\partial U^*}{\partial F}\right)_{F=0} = \frac{1}{EI}\left(\int_0^{\frac{L}{2}} M(x)\frac{\partial M}{\partial F}dx\right)_{F=0}$$

$$M(x) = \overline{M}_C - F_x - \frac{qx^2}{4} = \frac{qL^2}{48} - Fx - \frac{qx^2}{4}$$

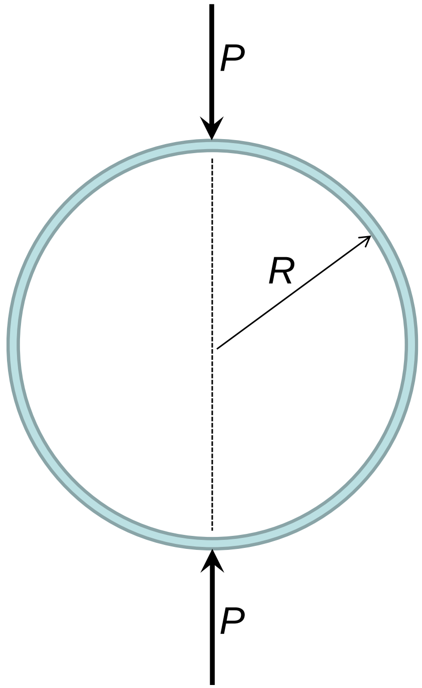
$$\frac{\partial M}{\partial F} = \mathrm{x}$$

$$\Rightarrow \delta_C = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}}\left(-\frac{qL^2}{48} + \frac{qx^2}{4}\right)xdx = \frac{1}{EI}\left(-\frac{qL^2x^2}{96} + \frac{qx^4}{16}\right)_0^{\frac{L}{2}}$$

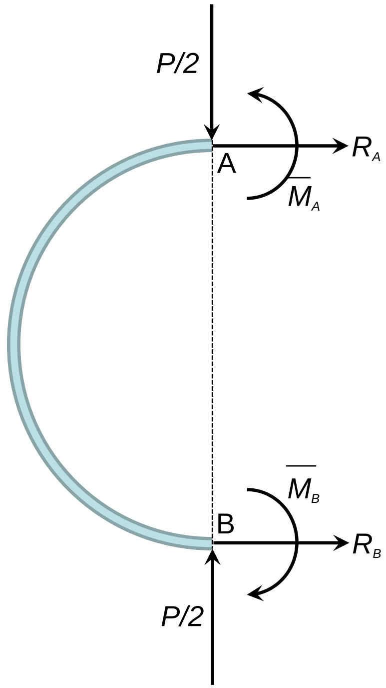
$$\Rightarrow \delta_C = \frac{qL^4}{768EI}$$

Exercício:

O anel da figura tem raio R e rigidez à flexão EI constante. A ele são aplicadas forças P diametralmente opostas, conforme esquematizado. Pede-se determinar a variação de diâmetro sofrida pelo anel com a aplicação das forças P. Usar a simetria do problema.



- O anel é simétrico em relação ao seu diâmetro vertical e está submetido a esforços simétricos. Assim, podemos cortá-lo ao meio, colocando os esforços vinculares adequados:



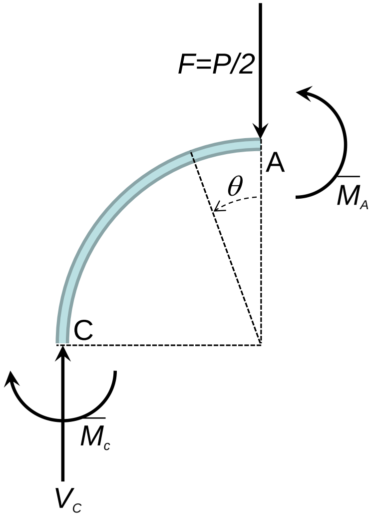
- O anel também tem uma simetria em relação ao seu diâmetro horizontal:

$$\overline{M}_A = \overline{M}_B$$
$$R_A = R_B$$

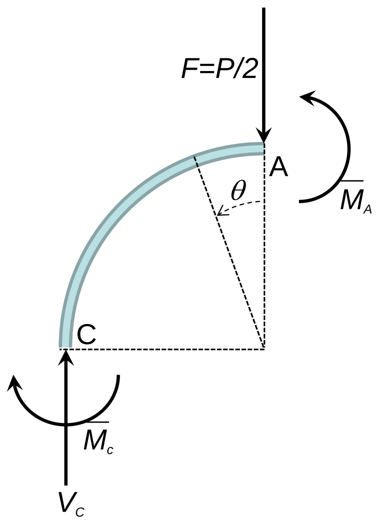
- Equilíbrio:

$$R_A + R_B = 0 \Rightarrow R_A = R_B = 0$$

- Considerando a simetria horizontal, podemos dividir o anel mais uma vez, considerando os esforços vinculares adequados:



$$g = 1$$



- Vamos adotar $\overline{M}_A$ como incógnita hiperestática

- Pelo Princípio da Energia Complementar Mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial \overline{M}_A} = 0 \;\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi R}{2}} \frac{M(s)}{EI}\frac{\partial M}{\partial \overline{M}_A} ds = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{M(\theta)}{EI}\frac{\partial M}{\partial \overline{M}_A} R d\theta = 0$$

$$M(\theta) = \overline{M}_A - FR\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial M}{\partial \overline{M}_A} = 1$$

$$\Rightarrow \overline{M}_A = \frac{PR}{\pi}$$

- A variação do diâmetro pode ser calculada pelo Teorema de Croti-Engesser:

$$\delta = 2\left(\frac{\partial U}{\partial F}\right)_{F=\frac{P}{2}} = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M(\theta)}{EI}\frac{\partial M}{\partial F} R d\theta\right)_{F=\frac{P}{2}}$$

$$M(\theta) = \frac{PR}{\pi} - FR\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial M}{\partial F} = -R\mathrm{sen}\theta$$

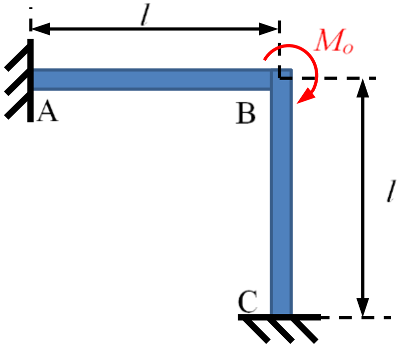
$$\Rightarrow \delta = \frac{2PR^3}{EI}\left[-\frac{1}{\pi} + \frac{\pi}{8}\right]$$

Exercício:

A estrutura ABC indicada na figura é formada pelas barras AB e BC, de mesmo comprimento (l) e mesma rigidez flexional (EI), engastada nas seções A e C e rigidamente ligadas em B. Sobre a seção B é aplicado um binário de intensidade M_o no sentido indicado. Pedem-se:

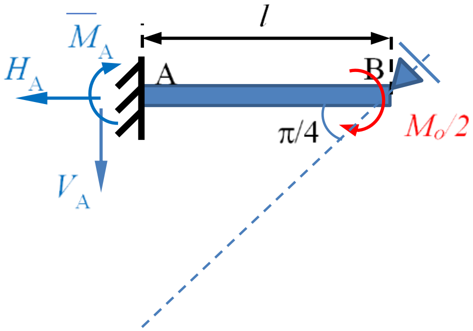
a) o DCL final da estrutura com as indicações corretas dos valores e dos sentidos das reações de apoio em A e em C;

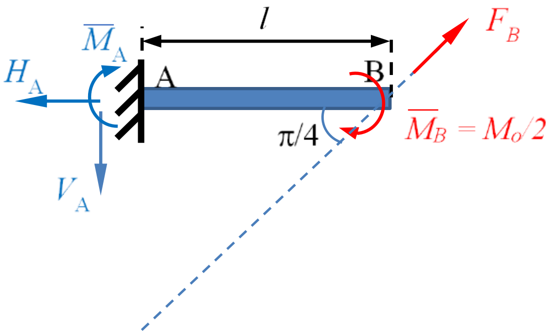
b) a rotação em B.

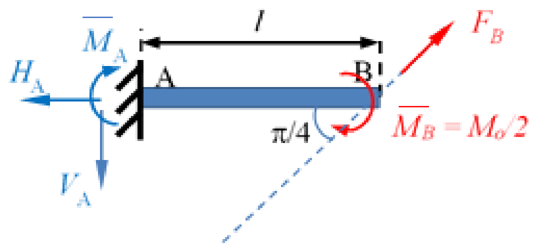


- Considerando 1/2 estrutura:

DCL







- Equilíbrio:

$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} F_B - H_A = 0$$

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} F_B - V_A = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} F_B l - \frac{M_0}{2} - \bar{M}_A = 0$$

- Vamos adotar F_B como incógnita hiperestática

- Pelo Princípio da Energia Complementar Mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial F_B} = 0 \Rightarrow \int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial F_B} dx = 0$$

$$M(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} F_B x - \frac{M_0}{2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial F_B} = \frac{\sqrt{2}}{2} x$$

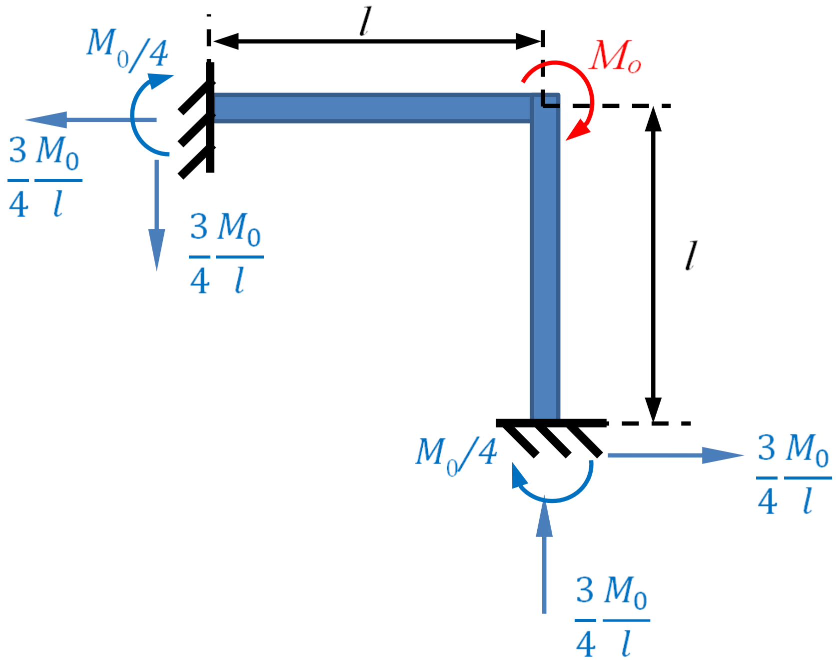
$$\Rightarrow \frac{1}{EI}\int_0^l \left(\frac{\sqrt{2}}{2} F_B x - \frac{M_0}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} x\right) dx = 0$$

$$\Rightarrow F_B = \frac{3\sqrt{2}}{4}\frac{M_0}{l}$$

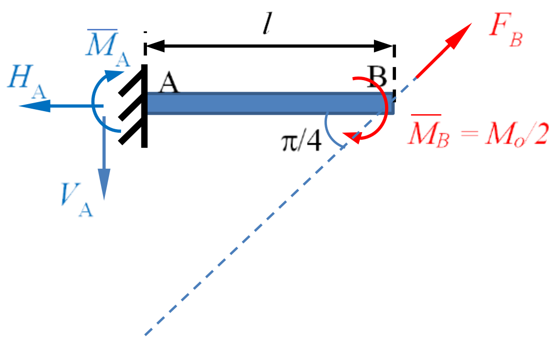
- As outras reações são obtidas a partir das equações de equilíbrio:

$$H_A = \frac{3}{4}\frac{M_0}{l} \qquad V_A = \frac{3}{4}\frac{M_0}{l} \qquad \bar{M}_A = \frac{M_0}{4}$$

- Como a estrutura é simétrica e o carregamento é antissimétrico, as reações vinculares devem ser antissimétricas:



- Para calcular a rotação em *B* usamos o Teorema de Crotti-Engesser:



$$\theta_B = \frac{\partial U^*}{\partial \overline{M}_B} = \int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial \overline{M}_B}\,dx$$

$$M(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}F_B x - \overline{M}_B$$

$$\frac{\partial M}{\partial \overline{M}_B} = -1$$

$$\Rightarrow \theta_B = \frac{M_B l}{EI} - \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{F_B l^2}{EI}$$

$$\Rightarrow \theta_B = \frac{1}{8}\frac{M_0 l}{EI}$$

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar.* Disponível no Moodle